YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRİLL ARACILIĞIYLA BAZI KÜME TÜRLERİ

Gökmen TAŞDAN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM

Matematik Bölümü

Sunum Tarihi: 26.01.2016

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ABSTRACT

SOME TYPES OF SETS VIA GRILL

TAŞDAN, Gökmen
MSc in Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Esra DALAN YILDIRIM
January 2016, 43 pages

This thesis consists mainly of five chapters. In the first chapter, the thesis subject is introduced, and in the second one, some definitions are supplied to make easier the reading of the thesis.

In the third chapter, the concept of a grill and examples are given, and via this concept we introduce a type of operator that gives rise to another operator satisfying Kuratowski's closure axioms and thus we study topology induced by means of grills.

In the fourth chapter, we provide definitions of some classes of sets defined via grills, and study the relationships between them. We give support with original examples for the counterimplications.

In the fifth chapter, we investigate some types of continuity defined by using types of sets already mentioned in the preceding chapter and give authentic examples.

Keywords: Grill, $\mathcal{G}$-α-open set, $\mathcal{G}$-semi-open set, $\mathcal{G}$-pre-open set, $\mathcal{G}$-β-open set,Φ-open set, $\mathcal{G}$-α- continuous, $\mathcal{G}$-semi-continuous, $\mathcal{G}$-pre-continuous, $\mathcal{G}$-β-continuous, Φ-continuous.

ÖZET

GRİLL ARACILIĞIYLA BAZI KÜME TÜRLERİ

Gökmen TAŞDAN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM

Ocak 2016, 43 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış, ikinci bölümde ise tezin anlaşılabilirliğini kolaylaştırmak için bazı tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde grill kavramı ve örnekleri verilmiş; bu kavram yardımıyla Kuratowski kapanış aksiyomlarını sağlayan bir diğer operatörün ortaya çıkmasına neden olan bir operatör türü tanıtılmış ve böylece grill yardımıyla üretilen topoloji üzerinde çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde grill aracılığıyla tanımlanan bazı küme sınıflarının tanımları verilmiş ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Karşıt gerektirmeler özgün örneklerle desteklenmiştir.

Beşinci bölümde bir önceki bölümde adı geçen küme türleri kullanılarak tanımlanan bazı süreklilik çeşitleri çalışılmış ve özgün örnekler verilmiştir.

Anahtar sözcükler: Grill, $\mathcal{G}$-α-açık küme, $\mathcal{G}$-yarı-açık küme, $\mathcal{G}$-ön-açık küme, $\mathcal{G}$-β-açık küme,Φ-açık küme, $\mathcal{G}$-α-sürekli, $\mathcal{G}$-yarı-sürekli, $\mathcal{G}$-ön-sürekli, $\mathcal{G}$-β-sürekli, Φ-sürekli.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlarken bana rehberlik eden ve yardımını asla esirgemeyen saygıdeğer tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM'a çok teşekkür ederim. Bu süreçte bana yardımcı olan okul idarecilerime, Yaşar Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve her zaman yanımda olup beni destekleyen eşime ve aileme çok teşekkür ederim.

Gökmen TAŞDAN

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Grill Aracılığıyla Bazı Küme Türleri” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığının ve yararlandığım eserlerin “Kaynaklar Dizini” bölümünde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Gökmen TAŞDAN

26/01/2016

İÇİNDEKİLER

		Sayfa
ABSTRACT		iii
ÖZET		iv
TEŞEKKÜR		v
YEMİN METNİ		vi
İÇİNDEKİLER		vii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR		viii
1	GİRİŞ	1
2	ÖN BİLGİLER	2
3	GRİLL YARDIMI İLE ÜRETİLEN TOPOLOJİ	4
4	GRİLL ARACILIĞIYLA KÜME ÇEŞİTLERİ	14
5	GRİLL ARACILIĞIYLA SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ	31
6	SONUÇ	39
KAYNAKLAR DİZİNİ		41
ÖZGEÇMİŞ		43

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathcal{T}$	Topoloji
$\mathcal{K}$	Kapalı kümeler ailesi
$\mathcal{P}(X)$	X ‘in kuvvet kümesi
$\mathcal{G}$	Grill
$\mathcal{U}(x)$	x noktasını içeren açık kümeler ailesi
int(A)	A kümesinin içi
cl(A)	A kümesinin kapanışı
$\mathcal{T}^{\alpha}$	α-açık kümelerin oluşturduğu topolojik yapı
$\mathcal{G}\alpha O(X)$	Grill aracılığıyla tanımlanan α-açık kümelerin ailesi
$\mathcal{G}SO(X)$	Grill aracılığıyla tanımlanan yarı-açık kümelerin ailesi
$\mathcal{G}PO(X)$	Grill aracılığıyla tanımlanan ön-açık kümelerin ailesi
$\mathcal{G}\beta O(X)$	Grill aracılığıyla tanımlanan β-açık kümelerin ailesi

1 GİRİŞ

Bir topolojik uzay üzerinde grill fikri ilk olarak Choquet (1947) tarafından ortaya atılmıştır. Grill, kapanış uzayları ve kompaktlaştırma teorisi gibi bazı topolojik kavramlar üzerine daha ileri çalışmalar yapmayı sağlayan yararlı bir araçtır.

Roy ve Mukherjee (2007), verilen bir topolojik uzay üzerinde bir grill ve var olan topoloji ile ilişkili bir topoloji türü tanımlamışlar ve ayrıntılı biçimde temel özelliklerini incelemişlerdir.

Hatır ve Jafari (2010) grill aracılığıyla Φ-açık ve $\mathcal{G}$-ön-açık küme çeşitlerini tanımlamışlar ve grill açısından yeni bir süreklilik parçalanışı elde etmişlerdir.

Al-Omari ve Noiri (2011), $\mathcal{G}$-α-açık, $\mathcal{G}$-yarı-açık ve $\mathcal{G}$- β-açık kümeleri tanımlamış ve incelemişlerdir. Aynı yazarlar (2013) bu kümelerden yararlanarak süreklilik parçalanışlarına ulaşmışlardır.

Bu tezde, söz edilen tüm makaleler ayrıntılı bir şekilde çalışılmış, özgün örnekler sağlanmış ve ayrıca makalelerde karşılaşılan eksikliklerin kanıtları verilmiştir.

.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak olan gerekli bilgiler verilmiştir.

Tanım 2.1: (X,$\mathcal{T}$) topolojik uzay ve A⊆X olsun.

a) A ⊆ int(cl(int(A))) ise A kümesine ∝-açık küme denir.

(Njastad, 1965)

b) A ⊆ cl(int(A)) ise A kümesine yarı-açık küme denir.

(Levine, 1963)

c) A ⊆ int(cl(A)) ise A kümesine ön-açık küme denir.

(Mashhour ve diğerleri, 1982)

d) A ⊆ cl(int(cl(A))) ise A kümesine β-açık küme denir.

(Abd El-Monsef ve diğerleri, 1983**)**

X deki tüm α-açık(Yarı-açık, Ön-açık, β-açık) kümelerinin oluşturduğu aile sırasıyla α(X) (S(X),P(X),β(X)) ile gösterilir.

Önerme 2.1:

a) Her açık küme aynı zamanda bir yarı-açık kümedir. (Levine, 1963)

b) Her açık küme aynı zamanda bir α-açık kümedir. (Njastad, 1965)

c) Her α-açık küme aynı zamanda bir yarı-açık kümedir. (Noiri, 1984)

d) Her α-açık küme aynı zamanda bir ön-açık kümedir. (Noiri, 1984)

e) Her yarı açık küme aynı zamanda β-açık kümedir.

(Abd El-Monsef ve diğerleri, 1983)

f) Her ön açık küme aynı zamanda β-açık kümedir.

(Abd El-Monsef ve diğerleri, 1983)

Tanım 2.2: (X,$\mathcal{T}$) topolojik uzay olsun.

a) α-açık kümenin tümleyenine α-kapalı küme denir.

(Mashour ve diğerleri,1983)

b) Yarı-açık kümenin tümleyenine yarı-kapalı küme denir.

(Crossley ve Hildebrand,1971)

c) Ön-açık kümenin tümleyenine ön-kapalı küme denir.

(El-Deeb ve diğerleri, 1983)

d) β-açık kümenin tümleyenine β-kapalı küme denir.

(Abd El-Monsef ve diğerleri,1983)

Tanım 2.3: $(X,\mathcal{T})$ ve (Y,σ) iki topolojik uzay ve $f: (X,\mathcal{T}) \to (Y,\sigma)$ bir fonksiyon olsun.

a) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \subseteq X$ $\propto$-açık ise f fonksiyonuna $\propto$-süreklidir denir.

(Mashhour ve diğerleri, 1983)

b) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \subseteq X$ yarı-açık ise f fonksiyonuna yarı-süreklidir denir.

(Levine, 1963)

c) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \subseteq X$ ön-açık ise f fonksiyonuna ön-süreklidir denir.

(Mashhour ve diğerleri, 1982)

d) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \subseteq X$ β-açık ise f fonksiyonuna β-süreklidir denir.

(Abd El-Monsef ve diğerleri, 1983)

3 GRİLL YARDIMI İLE ÜRETİLEN TOPOLOJİ

Tanım 3.1: X in altkümelerinin boştan farklı bir $\mathcal{G}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyor ise $\mathcal{G}$ ye X üzerinde bir grill denir.

i. $\emptyset \notin \mathcal{G}$ dir.
ii. A,B $\subseteq$ X ve $A \cup B \in \mathcal{G}$ ise $A \in \mathcal{G}$ veya $B \in \mathcal{G}$ dir.
iii. $A \in \mathcal{G}$ ve $A \subseteq B \subseteq X$ ise $B \in \mathcal{G}$ dir.

(Choquet,1947)

Örnek 3.1: $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\mathcal{G}_1 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ ve $\mathcal{G}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ ailelerini düşünelim. $\mathcal{G}_1$, X üzerinde grilldir. Fakat $\{b\} \in \mathcal{G}_2$ ve $\{b\} \subset \{b, c\}$ iken $\{b, c\} \notin \mathcal{G}_2$ olduğundan $\mathcal{G}_2$, X üzerinde bir grill değildir.

Örnek 3.2: X=$\mathbb{R}$ olmak üzere $\mathcal{G} = \{F \subseteq \mathbb{R} | F \text{ sayılamaz}\}$ ailesi X üzerinde bir grilldir.

(Roy ve Mukherjee,2007)

Tanım 3.2: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, X üzerinde bir grill olsun. A⊆X için

$$\Phi_{\mathcal{G}}(A, \mathcal{T}) = \{x \in X | \text{her } U \in \mathcal{U}(x) \text{ için } A \cap U \in \mathcal{G}\}$$

olarak tanımlanan $\Phi: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ dönüşümüne $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{G}$ ye bağlı operatör denir ve kısaca $\Phi_{\mathcal{G}}(A)$ veya $\Phi(A)$ ile gösterilir.

(Roy ve Mukherjee,2007)

Önerme 3.1: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay; $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) $A \subseteq B$ ise $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$ dir.

(b)$A \notin \mathcal{G}$ ise $\Phi(A) = \emptyset$ dir.

(c)$\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$

(d)$\Phi(\Phi(A)) \subseteq \Phi(A) = cl(\Phi(A)) \subseteq cl(A)$

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat:

(a)$A \subseteq B$ ve $x \notin \Phi(B)$ olsun. Buradan $U \cap B \notin \mathcal{G}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir U açık kümesi vardır. $U \cap A \subseteq U \cap B$ olduğu için $U \cap B \notin \mathcal{G}$ ise $U \cap A \notin \mathcal{G}$ dir. O halde $x \notin \Phi(A)$ elde edilir.

(b)$A \notin \mathcal{G}$ ve $x \in X$ olsun. Buradan x noktasını içeren bir U açığı için $A \cap U \subseteq A$ tır. O halde $A \cap U \notin \mathcal{G}$ dir. Böylece $x \notin \Phi(A)$ olduğu görülür. O halde $\Phi(A) = \emptyset$ dir.

(c)$A \subseteq A \cup B$ ve $B \subseteq A \cup B$ olduğu için (a) şıkkından $\Phi(A) \subseteq \Phi(A \cup B)$ ve $\Phi(B) \subseteq \Phi(A \cup B)$ elde edilir. Buradan $\Phi(A) \cup \Phi(B) \subseteq \Phi(A \cup B)$ dir. $\Phi(A \cup B) \subseteq \Phi(A) \cup \Phi(B)$ yi ispatlamak için $x \notin \Phi(A) \cup \Phi(B)$ olduğunu varsayalım. Buradan $x \notin \Phi(A)$ ve $x \notin \Phi(B)$ dir. $x \notin \Phi(A)$ olduğundan x noktasını içeren öyle bir U açığı için $A \cap U \notin \mathcal{G}$ ve $x \notin \Phi(B)$ olduğundan x noktasını içeren öyle bir V açığı için $B \cap V \notin \mathcal{G}$ dir. $H = U \cap V$ olsun. Bu durumda $H \cap A \subseteq U \cap A$ ve $H \cap B \subseteq V \cap B$ olduğu için $H \cap A \notin \mathcal{G}$ ve $H \cap B \notin \mathcal{G}$ bulunur. $\mathcal{G}$ bir grill olduğuna göre x noktasını içeren bir H açığı için $(H \cap A) \cup (H \cap B) = H \cap (A \cup B) \notin \mathcal{G}$ dir. O halde $x \notin \Phi(A \cup B)$ olduğu elde edilir.

(d)İlk olarak $\Phi(A) \subseteq cl(A)$ olduğunu gösterelim. $x \notin cl(A)$ olsun. Buradan x noktasını içeren her U açığı için $U \cap A = \emptyset$ dir. O halde $A \cap U \notin \mathcal{G}$ dir. Böylece $x \notin \Phi(A)$ olur. Dolayısıyla, $\Phi(\Phi(A)) \subseteq cl(\Phi(A))$ bulunur.

$\Phi(A) = cl(\Phi(A))$ olduğunu gösterelim. $\Phi(A) \subseteq cl(\Phi(A))$ daima doğru olduğu için $cl(\Phi(A)) \subseteq \Phi(A)$ olduğunu ispatlamamız yeterli olacaktır. $x \in cl(\Phi(A))$ olduğunu varsayalım. Bu durumda x noktasını içeren her U açığı için $U \cap \Phi(A) \neq \emptyset$ dir. $y \in U \cap \Phi(A)$ olsun. Buradan U kümesi aynı zamanda y noktasını içeren bir açık ve $y \in \Phi(A)$ olduğundan $U \cap A \in \mathcal{G}$ dir. Böylece $x \in \Phi(A)$ dır.

Aşağıdaki örnek sırasıyla Önerme 3.1 in (a) ve (d) koşullarının terslerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.3:

a) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji ve grill sırasıyla, $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \emptyset, X\}$ ve $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$ olsun. A={b,d} ve B={a,b}kümeleri için $\Phi(A) = \{b, d\} \subset \Phi(B) = \{a, b, d\}$ olmasına karşı $A \nsubseteq B$ dir.

b) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji ve grill sırasıyla, $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \emptyset, X\}$ ve $\mathcal{G} = \{\{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$ olsun. $A = \{a, c\}$ kümesi için $cl(A) = \{a, c, d\} \nsubseteq \Phi(A) = \emptyset$ dir.

Önerme 3.2: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay; $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) A açık ve $A \cap B \notin \mathcal{G}$ ise $A \cap \Phi(B) = \emptyset$ dir.

b) A kapalı ise $\Phi(A) \subseteq A$ dır.

İspat:

a) A açık bir küme ve $A \cap B \notin \mathcal{G}$ olsun. $A \cap \Phi(B) \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x \in A \cap \Phi(B)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $x \in \Phi(B)$ olduğundan x noktasını içeren her U açığı için $U \cap B \in \mathcal{G}$ dir. A kümesi açık ve $x \in A$ olduğu için $A \cap B \in \mathcal{G}$ olur. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde $A \cap \Phi(B) = \emptyset$ dir.

b) A kümesi kapalı olsun. Buradan Önerme3.1 (d) yoluyla $\Phi(A) \subseteq cl(A) = A$ bulunur.

Aşağıdaki örnek sırasıyla Önerme 3.2 nin (a) ve (b) koşullarının terslerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.4: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \emptyset, X\}$ olsun.

(a) X üzerindeki $\mathcal{G}_1 = \{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},X\}$ grillini düşünelim. $A = \{b,d\}$ ve $B = \{a,c,d\}$ kümeleri için $A \cap \Phi_{\mathcal{G}_1}(B) = \emptyset$ ve $A \cap B = \{d\} \notin \mathcal{G}_1$ olmasına rağmen $A \notin \mathcal{T}$ dur.

(b) X üzerindeki $\mathcal{G}_2 = \{\{b\},\{d\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\},\{a,d\},\{c,d\},\{a,c,d\},X\}$ grillini düşünelim. $C = \{a,c\}$ kümesi için $\Phi_{\mathcal{G}_2}(C) = \emptyset \subset C$ olmasına rağmen $X - C = \{b,d\} \notin \mathcal{T}$ olduğundan C kümesi kapalı değildir.

Önerme 3.3: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay; $\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}_2$ aileleri X üzerinde iki grill ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ ise $\Phi_{\mathcal{G}_1}(A) \subseteq \Phi_{\mathcal{G}_2}(A)$ dır.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ ve $x \notin \Phi_{\mathcal{G}_2}(A)$ olsun. Buradan x noktasını içeren bir U açığı için $A \cap U \notin \mathcal{G}_2$ dir. Hipotezden $A \cap U \notin \mathcal{G}_1$ dir. Böylece $x \notin \Phi_{\mathcal{G}_1}(A)$ bulunur.

Aşağıdaki örnek Önerme3.3 ün tersinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.5: $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerindeki topoloji ve iki grill sırasıyla $\mathcal{T} = \{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{b,c,d\},\emptyset,X\}$, $\mathcal{G}_1 = \{\{b\},\{d\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,a,c\},\{b,c,d\},\{a,d\},\{c,d\},\{d,a,c\},\{d,a,b\},X\}$ ve $\mathcal{G}_2 = \{\{a\},\{c\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c\},\{c,d\},\{b,c,d\},X\}$ olsun. A={a,c} kümesi için $\Phi_{\mathcal{G}_1}(A) = \emptyset \subset \Phi_{\mathcal{G}_2}(A) = \{a,c,d\}$ olduğu halde $\mathcal{G}_1 \nsubseteq \mathcal{G}_2$ dir.

$(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, X üzerindeki bir grill olsun. Her $A \subseteq X$ için $\Psi: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ dönüşümü $\Psi(A) = A \cup \Phi(A)$ olarak tanımlanır.

(Roy ve Mukherjee,2007)

Teorem 3.1: Ψ dönüşümü Kuratowski kapanış aksiyomlarını sağlar.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat:

(a) $\emptyset \notin \mathcal{G}$ olduğundan $\Phi(\emptyset) = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $\Psi(\emptyset) = \emptyset \cup \Phi(\emptyset) = \emptyset$ olur.

(b) Ψ dönüşümünün tanımı gereği her $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ için $\mathrm{A} \subseteq \Psi(\mathrm{A})$ dır.

(c) Önerme3.1(c) den her $\mathrm{A}, \mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ için $\Phi(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \Phi(\mathrm{A}) \cup \Phi(\mathrm{B})$ olduğundan $\Psi(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \Phi(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup (\Phi(\mathrm{A}) \cup \Phi(\mathrm{B})) = \Psi(\mathrm{A}) \cup \Psi(\mathrm{B})$ dir.

(d) Her $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ için $\Psi(\Psi(\mathrm{A})) = \Psi(\mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A})) = (\mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A})) \cup \Phi(\mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A}))$ dır. Önerme 3.1 (c) ve (d) den $(\mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A})) \cup \Phi(\mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A})) = \mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A}) \cup \Phi(\Phi(\mathrm{A})) = \mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A}) = \Psi(\mathrm{A})$ dır. Böylece $\Psi(\Psi(\mathrm{A})) = \Psi(\mathrm{A})$ olduğu görülür.

Uyarı 3.1: Kuratowski kapanış aksiyomlarına ek olarak Ψ dönüşümü için $\Psi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ ve $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ ise $\Psi(\mathrm{A}) \subseteq \Psi(\mathrm{B})$ dir. İspatları Ψ nin tanımından ve Önerme3.1 (a)'dan açıktır.

Tanım 3.3: $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$; X üzerinde bir grill olsun. Bu durumda X üzerinde $\mathcal{G}$ ye karşılık gelen bir tek $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} = \{\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X} | \Psi(\mathrm{X} - \mathrm{U}) = \mathrm{X} - \mathrm{U}\}$ topolojisi vardır; burada her $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ için $\Psi(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \cup \Phi_{\mathcal{G}}(\mathrm{A}) = \mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ dır.

(Roy ve Mukherjee,2007)

Örnek 3.6: $\mathrm{X} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ kümesi üzerindeki topoloji ve grill sırasıyla, $\mathcal{T} = \{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \mathrm{X}, \emptyset\}$ ve $\mathcal{G} = \{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{d}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}, \mathrm{X}\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} = \{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \mathrm{X}, \emptyset\}$ olur. $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$ için $\Phi(\mathrm{A}) = \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}$ olduğundan $\Psi(\mathrm{A}) = \mathrm{A} \cup \Phi(\mathrm{A}) = \mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(\mathrm{A}) = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ dir.

Teorem 3.2: $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(a)$\mathcal{G}_1$ ve $\mathcal{G}_2$, X üzerinde iki grill olmak üzere $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ ise $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_2} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}_1}$ dir.

(b)$\mathcal{G}$, X üzerinde bir grill ve $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}$ için $\mathrm{B} \notin \mathcal{G}$ ise B kümesi $(\mathrm{X}, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ de kapalıdır.

(c)X in herhangi bir A altkümesi ve X üzerindeki herhangi bir $\mathcal{G}$ grilli için $\Phi(\mathrm{A})$ kümesi $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$- kapalıdır.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat:

(a) $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2$ ve $\mathrm{U} \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}_2}$ olsun. Buradan $\mathrm{X}-\mathrm{U}=\Psi(\mathrm{X}-\mathrm{U})=(\mathrm{X}-\mathrm{U}) \cup \Phi_{\mathcal{G}_2}(\mathrm{X}-\mathrm{U})$ dur. O halde $\Phi_{\mathcal{G}_2}(\mathrm{X}-\mathrm{U}) \subseteq (\mathrm{X}-\mathrm{U})$ bulunur. Önerme3.3 ten $\Phi_{\mathcal{G}_1}(\mathrm{X}-\mathrm{U}) \subseteq (\mathrm{X}-\mathrm{U})$ elde edilir. Böylece $\Psi(\mathrm{X}-\mathrm{U})=(\mathrm{X}-\mathrm{U}) \cup \Phi_{\mathcal{G}_1}(\mathrm{X}-\mathrm{U})=\mathrm{X}-\mathrm{U}$ olur. Bu durumda $\mathrm{U} \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}_1}$ dir.

(b) $\mathrm{B} \notin \mathcal{G}$ olsun. Önerme3.1 (b) gereği $\Phi(\mathrm{B})=\emptyset$ tur. Dolayısıyla $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}-\mathrm{cl}(\mathrm{B})=\Psi(\mathrm{B})=\mathrm{B} \cup \Phi(\mathrm{B})=\mathrm{B}$ olur. Buradan B kümesi $(\mathrm{X},\mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ de kapalıdır.

(c) Önerme3.1 (d) den $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}-\mathrm{cl}\big(\Phi(\mathrm{A})\big)=\Psi\big(\Phi(\mathrm{A})\big)=\Phi(\mathrm{A}) \cup \Phi\big(\Phi(\mathrm{A})\big)=\Phi(\mathrm{A})$ dır. Böylece $\Phi(\mathrm{A})$ kümesi $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$-kapalıdır.

Aşağıda verilen örnek sırasıyla Teorem 3.2 nin (a) ve (b) koşullarının terslerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.7:

a) $\mathrm{X}=\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\{\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{b},\mathrm{c}\},\mathrm{X},\emptyset\}$ topolojisi ve iki grill sırasıyla $\mathcal{G}_1=\{\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{a},\mathrm{b}\},\{\mathrm{a},\mathrm{c}\},\mathrm{X}\}$ ve $\mathcal{G}_2=\{\{\mathrm{b}\},\{\mathrm{b},\mathrm{c}\},\{\mathrm{a},\mathrm{b}\},\mathrm{X}\}$ olsun. Buradan $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_1}=\{\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{b}\},\{\mathrm{c}\},\{\mathrm{a},\mathrm{b}\},\{\mathrm{a},\mathrm{c}\},\{\mathrm{b},\mathrm{c}\},\mathrm{X},\emptyset\}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_2}=\{\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{b}\},\{\mathrm{a},\mathrm{b}\},\{\mathrm{b},\mathrm{c}\},\mathrm{X},\emptyset\}$ bulunur. $\mathcal{T}_{\mathcal{G}_2} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{G}_1}$ olmasına rağmen $\mathcal{G}_1 \nsubseteq \mathcal{G}_2$ dir.

b) Örnek 3.6 daki topolojik uzayı ve grilli göz önünde bulundurduğumuzda B$=\{\mathrm{c}\}$ kümesi $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$-kapalı olmasına karşın $\mathrm{B} \in \mathcal{G}$ dir.

Teorem 3.3: $(\mathrm{X},\mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, X üzerinde bir grill olsun. Burada

$$\mathcal{B}(\mathcal{G},\mathcal{T})=\{\mathrm{V}-\mathrm{A} \mid \mathrm{V} \in \mathcal{T} \text{ ve } \mathrm{A} \notin \mathcal{G}\}$$

ailesi $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ için bir açık bazdır.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: $\mathrm{U} \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ ve $\mathrm{x} \in \mathrm{U}$ olsun. $\mathrm{X}-\mathrm{U}$ kümesi $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}-$ kapalı olduğundan $\Psi(\mathrm{X}-\mathrm{U})=\mathrm{X}-\mathrm{U}$ dur. Buradan $\Phi(\mathrm{X}-\mathrm{U}) \subseteq \mathrm{X}-\mathrm{U}$ olur. $\mathrm{x} \notin \Phi(\mathrm{X}-\mathrm{U})$ olduğu için

$(X - U) \cap V \notin \mathcal{G}$ olacak şekilde x noktasını içeren bir V açığı vardır. $(X - U) \cap V = A$ olsun. Bu durumda $x \notin A$ ve $A \notin \mathcal{G}$ dir. Böylece $x \in V - A = V - (X - U) \subseteq U$ bulunur. $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ ve $A, B \notin \mathcal{G}$ olmak üzere $V_1 - A, V_2 - B \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{T})$ olsun. Buradan $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}$ ve $A \cup B \notin \mathcal{G}$ dir. Böylece $(V_1 - A) \cap (V_2 - B) = (V_1 \cap V_2) - (A \cup B) \in \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{T})$. Dolayısıyla , $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{T})$ sonlu kesişim altında kapalıdır. O halde $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{T})$, $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ için açık bir bazdır.

Sonuç 3.1: $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, X üzerinde bir grill olmak üzere

$$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{T}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$$

dir.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: $\emptyset \notin \mathcal{G}$ ve Teorem3.3 den ispat açıktır.

Örnek 3.8: $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ olsun. Burada $\mathcal{B}(\mathcal{G}, \mathcal{T}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$ ve $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X, \emptyset\}$ olarak bulunur.

Teorem 3.4: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, X üzerinde bir grill olsun. $A \subseteq X$ için $U \in \mathcal{T}$ ise $U \cap \Phi(A) = U \cap \Phi(U \cap A)$ dır.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: Önerme 3.1 (a) dan $U \cap \Phi(U \cap A) \subseteq U \cap \Phi(A)$ dir. O halde $U \cap \Phi(A) \subseteq U \cap \Phi(U \cap A)$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $x \in U \cap \Phi(A)$ ve $x \in V \in \mathcal{U}(x)$ olsun. $x \in \Phi(A)$ ve $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$ olduğundan $(U \cap V) \cap A = (U \cap A) \cap V \in \mathcal{G}$ dir. Buradan $x \in \Phi(A \cap U)$ bulunur. O halde $x \in U \cap \Phi(A \cap U)$ dır.

Aşağıdaki örnek Teorem 3.4 ün tersinin her zaman doğru olmayacağını gösterir.

Örnek 3.9: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji ve grill sırasıyla $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{b, d\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \emptyset, X\}$ ve $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, X\}$ olsun. A={b} ve $U = \{b, d, c\}$ kümeleri için $U \cap \Phi(A) = U \cap \Phi(U \cap A) = \emptyset$ olmasına rağmen $U \notin \mathcal{T}$ dur.

Yardımcı Teorem 3.1: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay,$\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. $U \in \mathcal{T}$ ise $U \cap \Psi(A) \subseteq \Psi(U \cap A)$ dır.

(Al-Omari ve Noiri, 2011)

İspat: $U \in \mathcal{T}$ olduğu için Teorem3.4 ten $U \cap \Psi(A) = U \cap \big(A \cup \Phi(A)\big) = (U \cap A) \cup \big(U \cap \Phi(A)\big) \subseteq (U \cap A) \cup \Phi(U \cap A) = \Psi(U \cap A)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki örnek Yardımcı Teorem 3.1 in tersinin her zaman doğru olmayacağını gösterir.

Örnek 3.10: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, d, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$ olsun. $A = \{a, c, d\}$ ve $U = \{c\}$ kümeleri için $U \cap \Psi(A) = \{c\} = \Psi(U \cap A)$ olmasına rağmen $U = \{c\} \notin \mathcal{T}$ dur.

Teorem 3.5: $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzay ve $\mathcal{G}$, X üzerinde $\mathcal{T} - \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{G}$ koşulunu sağlayan bir grill ise her $U \in \mathcal{T}$ için $U \subseteq \Phi(U)$ dur.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: $U = \emptyset$ iken $\Phi(U) = \Phi(\emptyset) = \emptyset$ dir. $U = X$ iken $\mathcal{T} - \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{G}$ olduğu için $\Phi(X) = X$ dir. $U \in \mathcal{T} - \{\emptyset\}$ iken Teorem3.4 den $U \cap \Phi(X) = U \cap \Phi(U \cap X)$ olduğundan $U = U \cap X = U \cap \Phi(U)$ ve $U \subseteq \Phi(U)$ olur.

Aşağıdaki örnek Teorem 3.5 de $U \notin \mathcal{T}$ alındığında $U \subseteq \Phi(U)$ nun her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.11: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, X\}$ olsun. $A = \{d\}$ kümesi için $\Phi(A) = \emptyset$ dir. $\mathcal{T} - \{\emptyset\} \subseteq \mathcal{G}$ olmasına rağmen $A \nsubseteq \Phi(A)$ dır.

Yardımcı Teorem 3.2: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ kümeler ailesi X üzerinde bir grill ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda $\Phi(A) - \Phi(B) = \Phi(A - B) - \Phi(B)$ dir.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: $\Phi(A) = \Phi[(A - B) \cup (A \cap B)] = \Phi(A - B) \cup \Phi(A \cap B) \subseteq \Phi(A - B) \cup \Phi(B)$ dir. Buradan $\Phi(A) - \Phi(B) \subseteq \Phi(A - B) - \Phi(B)$ olur. Ayrıca $\Phi(A - B) \subseteq \Phi(A)$ olduğundan $\Phi(A - B) - \Phi(B) \subseteq \Phi(A) - \Phi(B)$ dir. Böylece $\Phi(A) - \Phi(B) = \Phi(A - B) - \Phi(B)$ olduğu görülür.

Sonuç 3.2: $(X, \mathcal{T})$bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ kümeler ailesi X üzerinde bir grill ve $A, B \subseteq X$ için $B \notin \mathcal{G}$ olsun. Buradan $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) = \Phi(A - B)$ dir.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: Önerme 3.1 (b) ve (c) den $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B) = \Phi(A)$ olduğu açıktır. Ayrıca Önerme 3.1 (b) ve Yardımcı Teorem 3.1 den $\Phi(A - B) = \Phi(A)$ dir.

Teorem 3.6: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ kümeler ailesi X üzerinde bir grill ve A kümesi $A \subseteq \Phi(A)$ olacak şekilde X in bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\mathrm{cl}(A) = \mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}\big(\Phi(A)\big) = \Phi(A)$$

dır.

(Roy ve Mukherjee,2007)

İspat: $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ olduğundan $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ olur. $\mathrm{x} \notin \mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ olsun. Buradan $\mathrm{x} \in \mathrm{V} - \mathrm{B}$ ve $(\mathrm{V} - \mathrm{B}) \cap \mathrm{A} = \emptyset$ olacak şekilde $\mathrm{V} \in \mathcal{T}$ ve $\mathrm{B} \notin \mathcal{G}$ vardır. Böylece Sonuç3.2 den $\Phi((\mathrm{V} - \mathrm{B}) \cap \mathrm{A}) = \Phi\big((\mathrm{V} \cap \mathrm{A}) - \mathrm{B}\big) = \Phi(\mathrm{V} \cap \mathrm{A})$ olduğundan $\Phi(\mathrm{V} \cap \mathrm{A}) = \emptyset$ dir. Teorem3.4 den $\mathrm{V} \cap \Phi(\mathrm{A}) = \emptyset$ bulunur. $\mathrm{A} \subseteq \Phi(\mathrm{A})$ olduğu için $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} = \emptyset$ dir. O halde $\mathrm{x} \notin \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ dır. Dolayısıyla $\mathrm{cl}(\mathrm{A}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ bulunur.

Önerme 3.1 (d) den $\mathrm{cl}\big(\Phi(\mathrm{A})\big) = \Phi(\mathrm{A})$ dır. Ayrıca yine Önerme 3.1 (d) den $\Phi(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ dır. Buradan $\mathrm{cl}\big(\Phi(\mathrm{A})\big) \subseteq \mathrm{cl}\big(\mathrm{cl}(\mathrm{A})\big) = \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ bulunur. $\mathrm{A} \subseteq \Phi(\mathrm{A})$ olduğundan $\mathrm{cl}(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{cl}(\Phi(\mathrm{A}))$ elde edilir. Böylece $\Phi(\mathrm{A}) = \mathrm{cl}\big(\Phi(\mathrm{A})\big) = \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ olur.

Sonuç olarak $\mathrm{cl}(\mathrm{A}) = \mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(\mathrm{A}) = \mathrm{cl}\big(\Phi(\mathrm{A})\big) = \Phi(\mathrm{A})$ olduğu görülür.

4 GRİLL ARACILIĞIYLA KÜME ÇEŞİTLERİ

Tanım 4.1: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun.

(a) $A \subseteq \text{int}(\Phi(A))$ ise A kümesine Φ-açık denir.(Hatır ve Jafari, 2010)

(b) $A \subseteq \text{int}(\Psi(\text{int}A))$ ise A kümesine $\mathcal{G}$-α-açık denir. (Al Omari ve Noiri, 2011)

(c) $A \subseteq \text{int}(\Psi(A))$ ise A kümesine $\mathcal{G}$-ön-açık denir. (Hatır ve Jafari, 2010)

(d) $A \subseteq \Psi(\text{int}A)$ ise A kümesine $\mathcal{G}$-yarı-açık denir. (Al Omari ve Noiri, 2011)

(e) $A \subseteq \text{cl}(\text{int}(\Psi(A)))$ ise A kümesine $\mathcal{G}$-β-açık denir. (Al Omari ve Noiri, 2011)

$\mathcal{G}$-α-açık (sırasıyla, $\mathcal{G}$-ön-açık, $\mathcal{G}$-yarı-açık, $\mathcal{G}$-β-açık) kümelerin ailesi $\mathcal{G}$αO(X) (sırasıyla, $\mathcal{G}$PO(X), $\mathcal{G}$SO(X), $\mathcal{G}$βO(X)) ile gösterilir.

Önerme 4.1: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) A kümesi açık ise $\mathcal{G}$-α-açıktır.
b) A kümesi $\mathcal{G}$-α-açık ise $\mathcal{G}$-ön-açık, $\mathcal{G}$-yarı-açık ve α-açıktır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat:

a) A kümesi açık olduğundan $A = \text{int}A \subseteq \text{int}A \cup \Phi(\text{int}A) = \Psi(\text{int}(A))$ dır. Buradan $A \subseteq \text{int}(\Psi(\text{int}A))$ bulunur.

b) A kümesi $\mathcal{G}$-α-açık olsun. $A \subseteq \text{int}(\Psi(\text{int}A)) \subseteq \text{int}(\Psi(A))$ olduğundan A kümesi $\mathcal{G}$-ön-açıktır. Ayrıca $A \subseteq \text{int}(\Psi(\text{int}A)) \subseteq \Psi(\text{int}(A))$ olduğundan A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır. $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ olduğundan $A \subseteq \text{int}(\Psi(\text{int}A)) \subseteq \text{int}(\text{cl}(\text{int}A))$ dır. O halde A kümesi α-açıktır.

Önerme 4.1 deki gerektirmelerin terslerinin her zaman doğru olmadığına ilişkin aşağıdaki örnekler oluşturulmuştur.

Örnek 4.1:

(a) $X = \{1,2,3,4\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{3\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, X, \emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\{1,3\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,4,3\}, \{2,3,4\}, X\}$ olsun. $A = \{3,4\} \subset X$ kümesini ele alalım. $A = \{3,4\} \subset \mathrm{int}\big(\Psi(\mathrm{int}A)\big) = X$ olduğundan A kümesi $\mathcal{G}$-α-açık küme olmasına rağmen açık değildir.

(b) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, d, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}, X\}$ olsun. $B = \{a, b\} \subset X$ kümesini ele alalım. $B \subset \mathrm{int}\big(\Psi(B)\big) = X$ olduğundan B kümesi bir $\mathcal{G}$-ön-açık kümedir fakat $B \not\subseteq \mathrm{int}\big(\Psi(\mathrm{int}(B))\big) = \{b\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-α-açık küme değildir.

(c) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X, \emptyset\}$, grill $\mathcal{G} = \{\{a\},\{b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\}, \{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\}, \{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\}\{a,b,d,e\},\{a,c,d,e\},\{a,b\},\{b,c\},\{b,d\},\{b,e\}, \{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{b,c,d,e\},X\}$ ve $C = \{a, e\} \subset X$ olsun. $C = \Psi(\mathrm{int}(C)) = \{a, e\}$ olduğundan C kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır fakat $C \not\subseteq \mathrm{int}\big(\Psi(\mathrm{int}(C))\big) = \{a\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-α-açık değildir.

(d) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{e\}, \{b, e\}, \{a, e\}, \{a, b, e\}, X, \emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, c\}, \{e, c\}, \{a, b, c\}, \{a, d, c\}, \{a, e, c\}, \{b, d, c\}, \{b, e, c\}, \{d, e, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, X\}$ olsun. D$= \{a, b, d, e\} \subset X$ kümesi için $D \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(D))) = X$ olduğundan bir α-açık kümedir fakat $D \not\subseteq \mathrm{int}\big(\Psi(\mathrm{int}(D))\big) = \{a, b, e\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-α-açık küme değildir.

Önerme 4.2: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) A kümesi Φ-açık ise $\mathcal{G}$-ön-açıktır.

b) A kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık ise $\mathcal{G}$-β-açık ve ön-açıktır.

(Hatır ve Jafari, 2010; Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat:

a) $\Psi(A) = A \cup \Phi(A)$ olduğundan ispatı açıktır.

b) $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ olduğu için A kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık ise ön-açıktır. Ayrıca $\mathrm{int}(\Psi(A)) \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A)))$ olduğundan A kümesi aynı zamanda $\mathcal{G}$-β-açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 4.2 deki koşulların terslerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.2:

a) Örnek 3.7 (a) da verilen $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\mathcal{T}$ topolojisi ve $\mathcal{G}_2$ grilline göre $A = \{a\}$ için $A = \mathrm{int}(\Psi(A))$ olduğundan $\mathcal{G}$-ön-açık kümedir fakat $A \nsubseteq \mathrm{int}(\Phi(A)) = \emptyset$ olduğundan Φ-açık küme değildir.

b) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{b, c\}, \{a, d\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, X\}$ olsun. $B = \{c\}$ kümesi bir ön-açık kümedir, fakat $B \nsubseteq \mathrm{int}(\Psi(B)) = \emptyset$ olduğundan B kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık küme değildir.

c) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, X, \emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{d, c\}, \{e, c\}, \{a, b, c\}, \{a, d, c\}, \{a, e, c\}, \{b, d, c\}, \{b, e, c\}, \{d, e, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, X\}$ olsun. $C = \{a, c\} \subset X$ kümesi $\mathcal{G}$-β-açık iken $C \nsubseteq \mathrm{int}(\Psi(C)) = \{a\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-ön-açık değildir.

Önerme 4.3: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık ise yarı-açık ve $\mathcal{G}$-β-açıktır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık olsun. Bu durumda $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ olduğundan $A \subseteq \Psi(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A)))$ dır. Buradan A kümesi $\mathcal{G}$-β-açıktır. Ayrıca $\Psi(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$ olduğu için A kümesi aynı zamanda yarı-açıktır.

Önerme 4.3 deki gerektirmelerin terslerinin her zaman doğru olmadığına dair örnek aşağıdadır.

Örnek 4.3: Örnek 4.1 (d) de verilen $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji ve grille göre $A = \{a, b, d, e\}, B = \{a, c, d\} \subset X$ kümeleri için, $A \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) = X$ olduğundan A kümesi yarı-açıktır. Fakat $A \nsubseteq \Psi(\mathrm{int}A) = \{a, b, e\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-yarı-açık değildir. Ayrıca B kümesi $\mathcal{G}$-β-açık olmasına rağmen $B \nsubseteq \Psi(\mathrm{int}(B)) = \{a\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-yarı-açık değildir.

Önerme 4.4: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesi $\mathcal{G}$-β-açık ise β -açıktır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: İspat açıktır.

Önerme 4.4 deki gerektirmenin tersinin her zaman doğru olmadığına ilişkin aşağıdaki örnek oluşturulmuştur.

Örnek 4.4: $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\{\{a\},\{b,c\},\emptyset,X\}$ ve grill $\mathcal{G}=\{\{b\},\{a,b\},\{b,c\},X\}$ olsun. $A = \{a, c\} \subset X$ kümesini ele alalım. $A \subset \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) = X$ olduğundan A kümesi β-açık kümedir. Fakat $A \nsubseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A))) = \{a\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-β-açık küme değildir.

Önerme 4.5: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) A kümesi α-açık ise $\mathcal{G}$-β-açıktır.

b) A kümesi yarı açık ise $\mathcal{G}$-β-açıktır.

İspat:

a) A kümesi α-açık olsun. O halde $A \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)))$ dır. Ayrıca $A \subseteq \Psi(A)$ olduğundan

$$\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(\Psi(A))$$
$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A)))$$
$$\mathrm{int}\left(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))\right) \subseteq \mathrm{int}\left(\mathrm{cl}\left(\mathrm{int}(\Psi(A))\right)\right) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A)))$$

elde edilir. Buradan A kümesi $\mathcal{G}$-β-açıktır.

b) A kümesi yarı-açık küme olsun. O halde $A \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))$ dır. Ayrıca $A \subseteq \Psi(A)$ olduğundan

$$\mathrm{int}(A) \subseteq \mathrm{int}(\Psi(A))$$
$$\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A)))$$

elde edilir. Buradan, A kümesi $\mathcal{G}$-β-açıktır.

Önerme 4.5 deki gerektirmenin tersinin her zaman doğru olmadığına ilişkin aşağıdaki örnek oluşturulmuştur.

Örnek 4.5:

a) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ olmak üzere A={a,b} kümesi $A = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A))) = \{a, b\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-β-açık kümedir fakat $A \nsubseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))) = \{a\}$ olduğundan α-açık küme değildir.

b) X= $\{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$ olmak üzere B={b,c,d} kümesi $B \subseteq \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}(\Psi(B))\right) = X$ olduğundan $\mathcal{G}$-β-açık kümedir fakat $B \nsubseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(B)) = \{b, d\}$ olduğundan yarı-açık küme değildir.

Not 4.1:

a) Açık küme ve Φ-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

(Hatır ve Jafari, 2010)

b) $\mathcal{G}$-ön-açık ve yarı-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

c) $\mathcal{G}$-ön-açık ve $\mathcal{G}$-yarı-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

d) $\mathcal{G}$-ön-açık ve α-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

e) $\mathcal{G}$ –yarı-açık ve α-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

f) $\mathcal{G}$ – yarı-açık ve ön-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

g) $\mathcal{G}$ –β-açık ve ön-açık küme kavramları birbirlerinden bağımsızdır.

Aşağıdaki örnekler Not4.1'i doğrulamaktadır.

Örnek 4.6:

a) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, d, c\}, \{b, c, d\}, X\}$ olmak üzere;

i) $A = \{a, b, c\} \subset X$ açık kümedir fakat $A \not\subseteq \mathrm{int}(\Phi(A)) = \{b, c\}$ olduğundan A kümesi Φ-açık küme değildir.

ii) $B = \{c\} \subset X$ için $B \subset \mathrm{int}(\Phi(B)) = \{b, c\}$ olduğundan B kümesi Φ-açık kümedir fakat açık küme değildir.

b)

i) X= $\{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ olmak üzere $A = \{a, c\} \subset X$ için $A = \mathrm{cl}\big(\mathrm{int}(A)\big) = \{a, c\}$ olduğundan yarı-açık kümedir fakat $A \not\subseteq \mathrm{int}\big(\Psi(A)\big) = \{a\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-ön-açık küme değildir.

ii) X= $\{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{a, c\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ olmak üzere $A = \{a\} \subset X$ için $A \subset \mathrm{int}(\Psi(A)) = X$ olduğundan $\mathcal{G}$-ön açık kümedir fakat $A \not\subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) = \emptyset$ olduğundan yarı-açık küme değildir.

c)

i) X= $\{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{a, c\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ olmak üzere $A = \{a, b\} \subset X$ için $A \subset \mathrm{int}(\Psi(A)) = X$

olduğundan $\mathcal{G}$-ön-açık kümedir fakat $A \nsubseteq \Psi(\mathrm{int}(A)) = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{G}$-yarı-açık küme değildir.

ii) $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}\{b, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}\{a, d, e\}\{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}\{a, b, c, e\}, \{a, c, d, e\}, X\}$ olmak üzere $A = \{a, e\} \subset X$ için $A = \Psi(\mathrm{int}(A))$ olduğundan $\mathcal{G}$-yarı-açık kümedir fakat $A \nsubseteq \mathrm{int}\big(\Psi(A)\big) = \{a\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-ön-açık küme değildir.

d)

i) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{a, c\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ olmak üzere $A = \{a, b\} \subset X$ için $A \subset \mathrm{int}(\Psi(A)) = X$ olduğundan $\mathcal{G}$-ön-açık kümedir fakat $A \nsubseteq \mathrm{int}\big(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))\big) = \emptyset$ olduğundan α-açık küme değildir.

ii) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{c\}, \{b, c\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b\}, \{b, c\}, X\}$ olmak üzere $A = \{a, c\} \subset X$ için $A \subset \mathrm{int}\big(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))\big) = X$ olduğundan α-açık kümedir fakat $A \nsubseteq \mathrm{int}\big(\Psi(A)\big) = \{c\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-ön-açık küme değildir.

e)

i) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{c\}, \{a, c\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ olmak üzere $A = \{b, c\} \subset X$ için $A \subset \mathrm{int}\big(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))\big) = X$ olduğundan α-açık kümedir fakat $A \nsubseteq \Psi(\mathrm{int}(A)) = \{c\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-yarı-açık küme değildir.

ii) $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \emptyset, X\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ olmak üzere $A = \{a, b\} \subset X$ için $A \subset \Psi(\mathrm{int}(A)) = \{a, b\}$ olduğundan $\mathcal{G}$-yarı-açık kümedir fakat $A \not\subset \mathrm{int}\big(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))\big) = \{a\}$olduğundan α-açık küme değildir.

f)

i) Örnek 4.6 (e) (i) örneğine göre $A = \{b, c\} \subset X$ kümesi α-açık olduğundan ön açık kümedir fakat $\mathcal{G}$-yarı açık küme değildir.

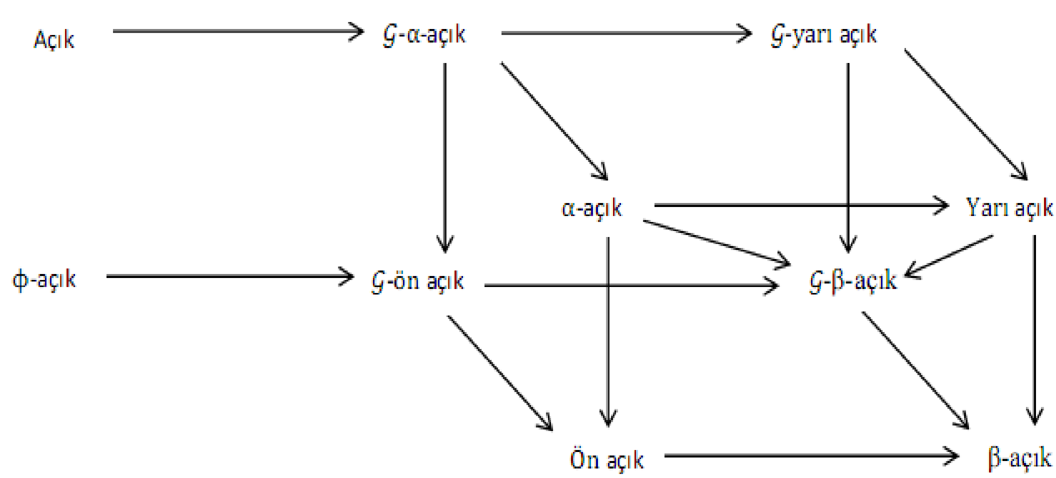
ii) Örnek 4.6 (e) (ii) örneğine göre ise $A = \{a, b\} \subset \mathrm{X}$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı açıktır fakat $\mathrm{A} \nsubseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{A})) = \{\mathrm{a}\}$ olduğundan ön açık küme değildir.

g)

i) X$=\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \big\{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \emptyset, \mathrm{X}\big\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}, \mathrm{X}\}$ olmak üzere $\mathrm{A} = \{\mathrm{b}\} \subset \mathrm{X}$ için $\mathrm{A} \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{A})) = \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$ olduğundan ön-açık kümedir fakat $\mathrm{A} \nsubseteq \mathrm{cl}\big(\mathrm{int}(\Psi(\mathrm{A}))\big) = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{G}$-β-açık küme değildir.

ii) X$=\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \emptyset, \mathrm{X}\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}, \mathrm{X}\}$ olmak üzere $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{d}\} \subset \mathrm{X}$ için $\mathrm{A} = \mathrm{cl}\big(\mathrm{int}(\Psi(\mathrm{A}))\big)$ olduğundan $\mathcal{G}$-β-açık kümedir fakat $\mathrm{A} \nsubseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{A})) = \{\mathrm{a}\}$ olduğundan ön-açık küme değildir.

Önerme 2.1, Önerme 4.1, Önerme 4.2, Önerme 4.3, Önerme 4.4, Önerme 4.5 ve Not 4.1 yardımıyla aşağıdaki diagram elde edilir.



Teorem 4.1: $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ olsun. A kümesinin $\mathcal{G}$-α-açık olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{G}$-yarı-açık ve $\mathcal{G}$-ön-açık olmasıdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: ($\Rightarrow$) Önerme 4.1 den açıktır.

($\Leftarrow$) A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık ve $\mathcal{G}$-ön-açık olsun. Bu durumda $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{int}(\Psi(\mathrm{A})) \subseteq \mathrm{int}(\Psi(\Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A})))) = \mathrm{int}\big(\Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A}))\big)$ dır. O halde A kümesi $\mathcal{G}$-α-açıktır.

Teorem 4.2: $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

a) A kümesinin $\mathcal{G}$-yarı-açık olması için gerek ve yeter koşul $\Psi(\mathrm{A}) = \Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A}))$ olmasıdır.

b) A kümesinin $\mathcal{G}$-yarı-açık olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{A} \subseteq \Psi(\mathrm{U})$ olacak şekilde öyle bir U açığının olmasıdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011,Mandal ve Mukherjee,2012)

İspat:

a) ($\Rightarrow$)A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık olsun. O halde $\Psi(\mathrm{A}) \subseteq \Psi\Big(\Psi\big(\mathrm{int}(\mathrm{A})\big)\Big) = \Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A}))$ dır. Aynı zamanda $\Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A})) \subseteq \Psi(\mathrm{A})$ olduğu için $\Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A})) = \Psi(\mathrm{A})$ bulunur.

($\Leftarrow$) İspat açıktır.

b) ($\Rightarrow$)A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık olsun. $\mathrm{U} = \mathrm{int}(\mathrm{A})$ alındığında ispat tamamlanır.

($\Leftarrow$)U kümesi $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{A} \subseteq \Psi(\mathrm{U})$ koşulunu sağlayan bir açık küme olsun. Bu durumda $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{A})$ ve $\Psi(\mathrm{U}) \subseteq \Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A}))$ olduğu için $\mathrm{A} \subseteq \Psi(\mathrm{int}(\mathrm{A}))$ dır. O halde A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır.

Önerme 4.6: $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{X}$ olsun. A kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık küme ise $\mathrm{cl}\Big(\mathrm{int}\big(\Psi(\mathrm{A})\big)\Big) = \mathrm{cl}(\mathrm{A})$ dır.

(Hatır ve Jafari, 2010)

İspat:

A kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık bir küme ise $A \subseteq \text{int}\big(\Psi(A)\big)$ dır. O halde $\text{cl}(A) \subseteq \text{cl}\Big(\text{int}\big(\Psi(A)\big)\Big)$ dır. $\Psi(A) \subseteq \text{cl}(A)$ olduğundan $\text{int}\big(\Psi(A)\big) \subseteq \Psi(A) \subseteq \text{cl}(A)$ olur. Buradan $\text{cl}(\text{int}\big(\Psi(A)\big)) \subseteq \text{cl}(\Psi(A)) \subseteq \text{cl}(A)$ dır.

Aşağıda verilen örnek Önerme 4.6'nın tersinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.7: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{a, d, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, d, c\}, \{b, c, d\}, X\}$ olsun. $A = \{a, b\}$ kümesi için $\text{int}\big(\Psi(A)\big) = \{a\}$ olduğundan $\text{cl}\Big(\text{int}\big(\Psi(A)\big)\Big) = \{a, b, c\} = \text{cl}(A)$ dır fakat $A \nsubseteq \text{int}\big(\Psi(A)\big) = \{a\}$ olduğundan A kümesi $\mathcal{G}$-ön açık küme değildir.

Teorem 4.3: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A, B \subseteq X$ olsun. A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık küme ve $A \subseteq B \subseteq \Psi(A)$ ise B kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık kümedir.

(Al Omari ve Noiri, 2011;Mandal ve Mukherjee, 2012)

İspat: A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık ve $A \subseteq B \subseteq \Psi(A)$ olsun. Teorem 4.2 (b) den $U \subseteq A \subseteq \Psi(U)$ olacak şekilde bir U açığı vardır. Buradan $\Psi(A) \subseteq \Psi\big(\Psi(U)\big) = \Psi(U)$ bulunur. O halde $U \subseteq A \subseteq B \subseteq \Psi(A) \subseteq \Psi(U)$ dur. Yine Teorem4.2 (b) yi kullanırsak B bir $\mathcal{G}$-yarı-açık küme olarak bulunur.

Önerme 4.7: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $V, A \subseteq X$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

(1) $V \in \mathcal{G}SO(X)$ ve $A \in \mathcal{G}\alpha O(X)$ ise $V \cap A \in \mathcal{G}SO(X)$dir.

(2) $V \in \mathcal{G}PO(X)$ ve $A \in \mathcal{G}\alpha O(X)$ ise $V \cap A \in \mathcal{G}PO(X)$ dir.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat:

(1) $V \in \mathcal{G}SO(X)$ ve $A \in \mathcal{G}\alpha O(X)$ olsun. Bu durumda $V \subseteq \Psi(\mathrm{int}(V))$ ve $A \subseteq \mathrm{int}(\Psi(\mathrm{int}(A)))$ dır. $\mathrm{int}(\Psi(\mathrm{int}(A)))$ ve $\mathrm{int}(V)$ açık oldukları için Yardımcı Teorem3.1 den

$$\begin{aligned} V \cap A &\subseteq \Psi\big(\mathrm{int}(V)\big) \cap \mathrm{int}\Big(\Psi\big(\mathrm{int}(A)\big)\Big) \\ &\subseteq \Psi[\mathrm{int}(V) \cap \mathrm{int}\Big(\Psi\big(\mathrm{int}(A)\big)\Big)] \\ &\subseteq \Psi[\mathrm{int}(V) \cap \Psi\big(\mathrm{int}(A)\big)] \\ &\subseteq \Psi[\Psi[\mathrm{int}(V) \cap \mathrm{int}(A)]] \\ &\subseteq \Psi[\mathrm{int}(V \cap A)] \end{aligned}$$

olur. O halde $V \cap A$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır.

(2) İspat (1) in ispatına benzer şekilde Yardımcı Teorem 3.1 kullanılarak yapılır.

Sonuç 4.1: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $V, A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(1) $V \in \mathcal{G}SO(X)$ ve $A \in \mathcal{T}$ ise $V \cap A \in \mathcal{G}SO(X)$ dir.

(Al Omari ve Noiri, 2011;Mandal ve Mukherjee,2012)

(2) $V \in \mathcal{G}PO(X)$ ve $A \in \mathcal{T}$ ise $V \cap A \in \mathcal{G}PO(X)$ dir.

(Hatır ve Jafari,2010; Al Omari ve Noiri, 2011)

Önerme 4.8: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A, B \subseteq X$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) $A, B \in \mathcal{G}\alpha O(X)$ ise $A \cap B \in \mathcal{G}\alpha O(X)$ dir.

(2) Her $i \in I$ için $A_i \in \mathcal{G}\alpha O(X)$ ise $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{G}\alpha O(X)$ dir.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat:

(1) A,B∈$\mathcal{G}$αO(X) olsun. Teorem4.1 den A ve B kümeleri $\mathcal{G}$-yarı-açık ve $\mathcal{G}$-ön-açıktır. Önerme 4.7 den A∩B kümesi hem $\mathcal{G}$-yarı-açık hem de $\mathcal{G}$-ön-açıktır. O halde Teorem4.1 den A∩B kümesi $\mathcal{G}$-α-açıktır.

(2) Her i∈I için A_i kümesi $\mathcal{G}$-α-açık olsun. Bu durumda her i∈I için $A_i \subseteq \mathrm{int}(\Psi(\mathrm{int}(A_i))) \subseteq \mathrm{int}(\Psi\left(\mathrm{int}(\bigcup_{i\in I} A_i)\right))$ dır. O halde $\bigcup_{i\in I} A_i$ kümesi $\mathcal{G}$-α-açıktır.

Sonuç 4.2: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill olsun. $\mathcal{G}$αO(X) ailesi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}\alpha O(X) \subseteq \mathcal{T}^{\alpha}$ koşulunu sağlayan X üzerinde bir topolojidir.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: Önerme 4.1 den $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{G}\alpha O(X) \subseteq \mathcal{T}^{\alpha}$ olduğu açıktır. Ayrıca Önerme 4.1 (a) ve Önerme 4.8, $\mathcal{G}$αO(X) ailesinin X üzerinde bir topoloji olduğunu kanıtlar.

Sonuç 4.3: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$ ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) A kümesinin $\mathcal{G}$-α-açık olması için gerek ve yeter koşul α-açık olmasıdır.

(2) A kümesinin $\mathcal{G}$-ön-açık olması için gerek ve yeter koşul ön-açık olmasıdır.

(3) A kümesinin $\mathcal{G}$-yarı-açık olması için gerek ve yeter koşul yarı-açık olmasıdır.

(4) A kümesinin $\mathcal{G}$-β-açık olması için gerek ve yeter koşul β-açık olmasıdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: $\mathcal{G}$=P(X)-{$\emptyset$}iken $\Phi(A) = \Psi(A) = \mathcal{T}_{\mathcal{G}} - \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A)$ olduğu için ispatlar açıktır.

Sonuç 4.4: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. $\mathcal{G}$={X} ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) A kümesinin $\mathcal{G}$-α-açık olması için gerek ve yeter koşul açık olmasıdır.

(2) A kümesinin $\mathcal{G}$-ön-açık olması için gerek ve yeter koşul açık olmasıdır.

(3) A kümesinin $\mathcal{G}$-yarı-açık olması için gerek ve yeter koşul açık olmasıdır.

(4) A kümesinin $\mathcal{G}$-β-açık olması için gerek ve yeter koşul yarı-açık olmasıdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: $\mathcal{G}=\{X\}$ iken her $A \subseteq X$ için $\Phi(A) = \emptyset$ olduğundan $\Psi(A) = A$ olur. Buradan $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ topolojisi X üzerinde ayrık topolojiye karşılık geldiği için ispatlar açıktır.

Önerme 4.9: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler ifadeler sağlanır.

(a) Her i∈I için $A_i \in \mathcal{G}PO(X)$ ise $\cup_{i\in I}A_i \in \mathcal{G}PO(X)$ tir.

(Hatır ve Jafari,2010)

(b) Her i∈I için $A_i \in \mathcal{G}SO(X)$ ise $\cup_{i\in I}A_i \in \mathcal{G}SO(X)$ dir.

(Al Omari ve Noiri, 2011;Mandal ve Mukherjee, 2012)

(c)Her i∈I için $A_i \in \mathcal{G}\beta O(X)$ ise $\cup_{i\in I}A_i \in \mathcal{G}\beta O(X)$ dir.

İspat:

(a) Her i∈I için A_i $\mathcal{G}$-ön-açık küme olsun. Buradan her i∈I için $A_i \subseteq \operatorname{int}(\Psi(A_i))$ olduğundan;

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} \operatorname{int}(\Psi(A_i)) \subseteq \operatorname{int}(\bigcup_{i\in I} \Psi(A_i)) = \operatorname{int}(\bigcup_{i\in I} (A_i \cup \Phi(A_i)))$$

$$= \operatorname{int}((\bigcup_{i\in I} A_i) \cup (\bigcup_{i\in I} \Phi(A_i))) = \operatorname{int}[(\bigcup_{i\in I} A_i) \cup \Phi(\bigcup_{i\in I} A_i)]$$

$$= \operatorname{int}(\Psi(\bigcup_{i\in I} A_i)$$

olduğu görülür.

(b) Her i∈I için A_i $\mathcal{G}$-yarı-açık küme olsun. Buradan her i∈I için $A_i \subseteq \Psi(\operatorname{int}(A_i))$ olduğundan $A_i \subseteq \Psi(\operatorname{int}(A_i)) \subseteq \Psi(\operatorname{int}(\cup_{i\in I} A_i))$ elde edilir. Böylece $\cup_{i\in I} A_i \subseteq \Psi(\operatorname{int}(\cup_{i\in I} A_i))$ bulunur.

(c) Her $i \in I$ için A_i $\mathcal{G}$-β-açık küme olsun. Buradan her $i \in I$ için $A_i \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A_i)))$ olduğundan, $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}(\Psi(A_i))\right) \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup_{i \in I} \mathrm{int}(\Psi(A_i)))$ olur. (a)'dan $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \mathrm{cl}(\bigcup_{i \in I} \mathrm{int}(\Psi(A_i))) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(\bigcup_{i \in I} A_i))$ olduğu görülür.

Sonuç 4.5: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. $\Phi(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)))$ ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(1) A kümesinin $\mathcal{G}$-α-açık olması için gerek ve yeter koşul A nın α-açık olmasıdır.

(2) A kümesinin $\mathcal{G}$-β-açık olması için gerek ve yeter koşul A nın β-açık olmasıdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat:

(1) Önerme 4.1 gereği A bir $\mathcal{G}$-α-açık küme ise A bir α-açık kümedir. Tersine A bir α-açık küme ise $A \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)))$ tır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}(A) &\subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \\
\mathrm{int}(A) &\subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))) \\
\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) &\subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)))) \\
\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))) &\subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)))) \\
\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))) &\subseteq \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)))\right) \\
\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A))) &\subseteq \mathrm{int}\left(\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{cl}\left(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)))\right)\right) \\
&= \mathrm{int}(\mathrm{int}(A) \cup \Phi(\mathrm{int}(A))) \\
&= \mathrm{int}(\Psi(\mathrm{int}(A)))
\end{aligned}$$

olduğundan $A \subseteq \mathrm{int}(\Psi(\mathrm{int}(A)))$ dır. O halde A bir $\mathcal{G}$-α-açık kümedir.

(2) Önerme 4.4 gereği A bir $\mathcal{G}$-β-açık küme ise A bir β-açık kümedir. Tersine A kümesi β-açık olduğundan $A \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)))$ dır. Ayrıca $A \subseteq A \cup \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) = \Psi(A)$ olur. Önerme 3.1 (d) gereği;

$$\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(\Psi(A)) = \Psi(A)$$

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{int}(\Psi(A))$$

olduğundan $A \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(\Psi(A)))$ elde edilir. O halde A bir $\mathcal{G}$-β-açık kümedir.

Tanım 4.2: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $F \subseteq X$ olsun. F kümesinin tümleyeni $\mathcal{G}$-yarı-açık ($\mathcal{G}$-ön-açık) ise F ye $\mathcal{G}$-yarı-kapalı ($\mathcal{G}$-ön-kapalı) küme denir.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

Teorem 4.4: $(X,\mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $A \subseteq X$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-kapalı ise $\mathrm{int}(\Psi(A)) \subseteq A$ dır.

(Al Omari ve Noiri, 2011;Mandal ve Mukherjee, 2012)

b) A kümesi $\mathcal{G}$-ön-kapalı ise $\Psi(\mathrm{int}(A)) \subseteq A$ dır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat:

a) A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-kapalı olsun. Bu durumda; $X - A \subseteq \Psi(\mathrm{int}(X - A)) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{int}(X - A)) = X - \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \subseteq X - \mathrm{int}(\Psi(A))$ elde edilir. Buradan $\mathrm{int}(\Psi(A)) \subseteq A$ olduğu görülür.

b) A kümesi $\mathcal{G}$-ön-kapalı olsun. Buradan $X - A \subseteq \mathrm{int}(\Psi(X - A)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(X - A)) = \mathrm{int}(X - \mathrm{int}(A)) = X - \mathrm{cl}(\mathrm{int}(A)) \subseteq X - \Psi(\mathrm{int}(A))$ bulunur. O halde $\Psi(\mathrm{int}(A)) \subseteq A$ dır.

Aşağıda verilen örnek Teorem 4.4 deki koşulların ters gerektirmelerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.8: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}, X\}$ olsun. $A = \{b, d\} \subset X$ için $\mathrm{int}(\Psi(A)) = \emptyset \subset A$ olmasına rağmen $X - A \nsubseteq \Psi(\mathrm{int}(X -$

$A)) = \{a, d\}$ olduğundan A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-kapalı küme değildir. Ayrıca $\Psi(\mathrm{int}(A)) = \emptyset \subset A$ olmasına rağmen $X - A \not\subseteq \mathrm{int}(\Psi(X - A)) = \{a, d\}$ olduğundan A kümesi $\mathcal{G}$-ön-kapalı küme değildir.

Teorem4.5: $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır

a) A kümesi X in $X - \Psi(\mathrm{int}(A)) = \Psi(\mathrm{int}(X - A))$ koşulunu sağlayan bir alt kümesi olsun. A kümesinin $\mathcal{G}$-yarı-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{int}(\Psi(A)) \subseteq A$ olmasıdır.

(Mandal ve Mukherjee, 2012)

b) A kümesi X in $X - \Psi(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(\Psi(X - A))$ koşulunu sağlayan bir alt kümesi olsun. A kümesinin $\mathcal{G}$-ön-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\Psi(\mathrm{int}(A)) \subseteq A$ olmasıdır.

İspat:

a) Teorem 4.4 (a) dan $\mathcal{G}$-yarı-kapalı ise $\mathrm{int}(\Psi(A)) \subseteq A$ dır. $\mathrm{int}(\Psi(A)) \subseteq A$ olsun. Buradan $X - A \subseteq X - \mathrm{int}(\Psi(A)) = \Psi(\mathrm{int}(X - A))$ olduğundan $X - A$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır. O halde A kümesi $\mathcal{G}$-yarı-kapalıdır.

b) Teorem 4.4 (b) den $\mathcal{G}$-ön-kapalı ise $\Psi(\mathrm{int}(A)) \subseteq A$ dir. $\Psi(\mathrm{int}(A)) \subseteq A$ olsun. Buradan $X - A \subseteq X - \Psi(\mathrm{int}(A)) = \mathrm{int}(\Psi(X - A))$ olduğundan $X - A$ kümesi $\mathcal{G}$-ön-açıktır. O halde A kümesi $\mathcal{G}$-ön-kapalıdır.

Not 4.2: $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ topolojik uzayında bir kümenin yarı-açık (ön-açık, α-açık,β-açık) olmasıyla $\mathcal{G}$ grilli ile birlikte verilen $(X, \mathcal{T})$ topolojik uzayında bir kümenin $\mathcal{G}$-yarı-açık ($\mathcal{G}$-ön-açık,$\mathcal{G}$-α-açık,$\mathcal{G}$-β-açık) olması farklı kavramlardır.

(Mandal ve Mukherjee, 2012)

Örnek 4.9: $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{c, b, d\}, X\}$ olsun. Buradan $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{c, b, d\}, X, \emptyset\}$ dir. $A = \{b\}$ kümesi $(X,\mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ ye göre $A \subset \mathrm{cl}\big(\mathrm{int}(A)\big) = \{b, c, d\}$ olduğundan yarı-açık kümedir fakat $(X,\mathcal{T})$ uzayında $\mathcal{G}$ grilline göre $A \nsubseteq \Psi(\mathrm{int}(A)) = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{G}$-yarı-açık küme değildir.

5 GRİLL ARACILIĞIYLA SÜREKLİLİK ÇEŞİTLERİ

Tanım 5.1: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve f : (X, $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}$) → (Y, σ) bir fonksiyon olsun.

(a) Her V∈σ için $f^{-1}(V)$ kümesi Φ-açık ise f fonksiyonuna Φ-süreklidir denir. (Hatır ve Jafari, 2010)

(b) Her V∈σ için $f^{-1}(V)$ kümesi $\mathcal{G}$-α-açık ise f fonksiyonuna $\mathcal{G}$-α-süreklidir denir. (Al Omari ve Noiri, 2011)

(c) Her V∈σ için $f^{-1}(V)$kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık ise f fonksiyonuna $\mathcal{G}$-yarı-süreklidir denir. (Al Omari ve Noiri, 2011;Mandal ve Mukherjee,2012)

(d) Her V∈σ için $f^{-1}(V)$kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık ise f fonksiyonuna $\mathcal{G}$-ön-süreklidir denir. (Hatır ve Jafari, 2010)

(e) Her V∈σ için $f^{-1}(V)$kümesi $\mathcal{G}$-β-açık ise f fonksiyonuna $\mathcal{G}$-β-süreklidir denir. (Al Omari ve Noiri,2013)

Önerme 5.1: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve f : (X, $\mathcal{T}$, $\mathcal{G}$) → (Y, σ) bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

a) f fonksiyonu sürekli ise $\mathcal{G}$-α-süreklidir. (Al Omari ve Noiri, 2011)

b) f fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-sürekli ise $\mathcal{G}$-ön-sürekli ve $\mathcal{G}$-yarı-süreklidir. (Al Omari ve Noiri, 2011)

c) f fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-sürekli ise α-süreklidir.

İspat: İspatlar Önerme 4.1’den açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 5.1 in ters gerektirmelerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 5.1:

(a) $X=\{1,2,3,4\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\{\{3\},\{2,3\},\{2,3,4\},X,\emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G}=\{\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\{1,3\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,4,3\},\{2,3,4\},X\}$, Y={a,b} kümesi üzerindeki topoloji σ={{a},Y,∅} olsun. f(1)=f(2)=b ve f(3)=f(4)=a olarak tanımlanan $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-süreklidir fakat {a}∈σ için $f^{-1}(\{a\})=\{3,4\}$ kümesi açık olmadığından sürekli değildir.

(b)

i) $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\{\{a\},\{b,c\},\emptyset,X\}$ ve grill $\mathcal{G}=\{\{a\},\{b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b\},X\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},Y,∅} olsun. f(a)=f(b)=1 ve f(c)=2 olarak tanımlanan $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu $\mathcal{G}$-ön-süreklidir fakat {1}∈σ için f^{-1}({1})={a,b} kümesi $\mathcal{G}$-α-açık olmadığından $\mathcal{G}$-α-sürekli değildir.

ii) $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\{\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\},X,\emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G}=$ {{a},{b},{a,c},{a,d},{a,e},{a,b,c},{a,b,d}, {a,b,e},{a,c,d},{a,c,e},{a,d,e},{a,b,c,d},{a,b,c,e}{a,b,d,e},{a,c,d,e},{a,b},{b,c},{b,d}, {b,e},{b,c,d},{b,c,e},{b,d,e},{b,c,d,e},X}, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},{2},Y,∅} olsun. f(a)=f(e)=1 ve f(b)=f(c)=f(d)=2 olarak tanımlanan $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-süreklidir fakat {1}∈σ için $f^{-1}(\{1\})=\{a,e\}$ kümesi $\mathcal{G}$-α-açık olmadığından $\mathcal{G}$-α-sürekli değildir.

(c) $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\big\{\{a\},\{b\},\{a,b\},X,\emptyset\big\}$ ve grill $\mathcal{G}=\big\{\{c\},\{a,c\},\{b,c\},\{d,c\},\{e,c\},\{a,b,c\},\{a,d,c\},\{a,e,c\},\{b,d,c\},\{b,e,c\},\{d,e,c\},\{a,b,c,d\},\{a,b,c,e\},\{a,c,d,e\},\{b,c,d,e\},X\big\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},Y,∅} olsun. f(a)=f(b)=f(d)=1 ve f(c)=f(e)=2 olarak tanımlanan $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu α-süreklidir fakat {1}∈σ için $f^{-1}(\{1\})=\{a,b,d\}$ kümesi $\mathcal{G}$-α-açık olmadığından $\mathcal{G}$-α-sürekli değildir.

Teorem 5.1: $(X,\mathcal{T})$ ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\mathcal{G}$-α-sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{G}$-yarı-sürekli ve $\mathcal{G}$-ön-sürekli olmasıdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: Teorem 4.1 den ispatı açıktır.

Teorem 5.2: $(X,\mathcal{T})$ ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $\mathcal{G}$-α-sürekli olması için gerek ve yeter koşul $f:(X,\mathcal{G}\alpha O(X))\rightarrow(Y,\sigma)$ nın sürekli olmasıdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat: Sonuç 4.2 den $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{G}\alpha O(X)$ olduğu için ispat açıktır.

Önerme 5.2: $(X,\mathcal{T})$ ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ bir fonksiyon olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

a) f fonksiyonu Φ-sürekli ise $\mathcal{G}$-ön-süreklidir.
b) f fonksiyonu $\mathcal{G}$-ön-sürekli ise ön-sürekli ve $\mathcal{G}$-β-süreklidir.

İspat: İspatlar Önerme 4.2 den açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 5.2 deki gerektirmelerin terslerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 5.2:

a) $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\{\{a\},\{b,c\},X,\emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G}=\{\{b\},\{b,c\},\{a,b\},X\}$, $Y=\{1,2\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\sigma=\{\{1\},\{2\},Y,\emptyset\}$ olsun. f(a)=1 ve f(b)=f(c)=2 şeklinde tanımlanan $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu $\mathcal{G}$-ön-süreklidir fakat $\{1\}\in\sigma$ için $f^{-1}(\{1\})=\{a\}$ kümesi Φ-açık olmadığından Φ-sürekli değildir.

b)

i) $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T}=\{\{c\},\{a,b\},\emptyset,X\}$ ve grill $\mathcal{G}=\{\{c\},\{b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b\},X\}$, $Y=\{1,2\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\sigma=\{\{1\},Y,\emptyset\}$ olsun. f(b)=2 ve f(a)=f(c)=1 şeklinde tanımlanan $f:(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\rightarrow$

(Y, σ) fonksiyonu ön-süreklidir fakat $\{1\} \in \sigma$ için $f^{-1}(\{1\}) = \{a, c\}$ kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık olmadığından $\mathcal{G}$-ön sürekli değildir.

ii) $\mathrm{X} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \mathrm{X}, \emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G} = \mathcal{P}(\mathrm{X}) - \{\emptyset\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},Y,∅} olsun. f(b)=f(e)=2 ve f(a)=f(c)=f(d)=1 şeklinde tanımlanan $\mathrm{f} : (\mathrm{X}, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu $\mathcal{G}$-β-süreklidir fakat $\{1\} \in \sigma$ için $f^{-1}(\{1\}) = \{a, c, d\}$ kümesi $\mathcal{G}$-ön-açık olmadığından $\mathcal{G}$-ön sürekli değildir.

Önerme 5.3: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $\mathrm{f} : (\mathrm{X}, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ bir fonksiyon olsun.O zaman aşağıdakiler sağlanır.

a) f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-sürekli ise yarı -süreklidir. (Mandal ve Mukherjee,2012)
b) f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-sürekli ise $\mathcal{G}$-β-süreklidir.

İspat: İspatlar Önerme 4.3 ten açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 5.3 teki gerektirmelerin terslerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 5.3:

a) $\mathrm{X} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \mathrm{X}, \emptyset\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{\mathrm{b}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{d}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}, \mathrm{X}\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji $\sigma = \{\{1\}, \mathrm{Y}, \emptyset\}$ olsun. h(a)=h(c)=h(d)=1 ve h(b)=2 şeklinde tanımlı $\mathrm{h} : (\mathrm{X}, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ fonksiyonu yarı-sürekli fakat $\{1\} \in \sigma$ için $h^{-1}(\{1\}) = \{a, c, d\}$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık olmadığından $\mathcal{G}$-yarı-sürekli değildir.

b) Örnek 5.1 (c) de verilen f fonksiyonu $\mathcal{G}$-β-süreklidir fakat $\{1\} \in \sigma$ için $f^{-1}(\{1\}) = \{a, b, d\}$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açık olmadığından $\mathcal{G}$-yarı-sürekli değildir.

Önerme 5.4: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $\mathrm{f} : (\mathrm{X}, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \to (\mathrm{Y}, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu $\mathcal{G}$-β-sürekli ise β-süreklidir.

İspat: Önerme 4.4 den ispat açıktır.

Önerme 5.4 ün tersinin her zaman doğru olmadığını gösteren örnek aşağıdadır.

Örnek 5.4: Örnek 5.2(b) (i) de verilen f fonksiyonu β-sürekli fakat {1}∈σ için $f^{-1}(\{1\}) = \{a, c\}$ kümesi $\mathcal{G}$-β-açık olmadığından $\mathcal{G}$-β-sürekli değildir.

Önerme 5.5: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve f : $(X, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \rightarrow (Y, \sigma)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

a) f fonksiyonu α-sürekli ise $\mathcal{G}$-β-süreklidir.
b) f fonksiyonu yarı-sürekli ise $\mathcal{G}$-β-süreklidir.

İspat: İspatlar Önerme 4.5 den açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 5.5 deki gerektirmelerin terslerinin her zaman doğru olmadığını gösterir.

Örnek 5.5:

a) X= $\{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},Y,∅} olsun. f(a)=f(b)=1 ve f(c)=2 şeklinde tanımlanan f : $(X, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $\mathcal{G}$-β-süreklidir fakat {1}∈σ için $f^{-1}(\{1\}) = \{a, b\}$ kümesi α-açık olmadığından α-sürekli değildir.

b) X= $\{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\mathcal{T} = \{\{b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, b, c\}, \emptyset, X\}$ topoloji ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, X\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},Y,∅} olsun. f(a)=2 ve f(b)=f(c)=f(d)=1 şeklinde tanımlanan f : $(X, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $\mathcal{G}$-β-süreklidir fakat {1}∈σ için $f^{-1}(\{1\}) = \{b, c, d\}$ kümesi yarı-açık olmadığından yarı-sürekli değildir.

Not 5.1: Süreklilik ve Φ-süreklilik birbirlerinden bağımsız kavramlardır.

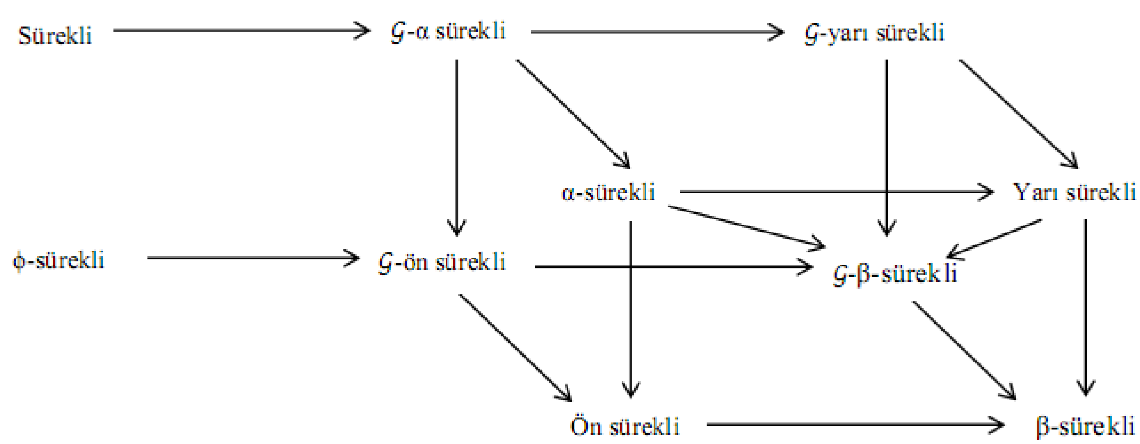
Aşağıdaki örnek Not 5.1'i doğrulamaktadır.

Örnek 5.6:

a) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, d, c\}, \{b, c, d\}, X\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},Y,∅} olsun. f(a)=f(b)=f(c)=1 ve f(d)=2 şeklinde tanımlanan f:(X,$\mathcal{T}$,$\mathcal{G}$)→(Y,σ) fonksiyonu süreklidir fakat {1}∈σ için $f^{-1}(\{1\}) = \{a, b, c\}$ kümesi Φ-açık olmadığından Φ-sürekli değildir.

b) $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\mathcal{T} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset, X\}$ ve grill $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$, Y={1,2} kümesi üzerindeki topoloji σ={{1},Y,∅} olsun. f(a)=f(b)=f(d)=2 ve f(c)=1 şeklinde tanımlanan f: (X,$\mathcal{T}$,$\mathcal{G}$)→(Y,σ) fonksiyonu Φ-süreklidir fakat {1}∈σ için $f^{-1}(\{1\}) = \{c\}$ kümesi açık olmadığından sürekli değildir.

Önerme 5.1, Önerme 5.2, Önerme 5.3, Önerme 5.4, Önerme 5.5 ve Not 5.1 yardımıyla aşağıdaki diagram elde edilir.



Teorem 5.3: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill olmak üzere $f : (X, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

a) f fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-süreklidir,

b) Y deki her kapalı kümenin ters görüntüsü $\mathcal{G}$-α-kapalıdır,

c) Her x∈X ve $f(x)$ noktasını içeren her V∈σ için f(U)⊆V olacak şekilde x noktasını içeren bir $\mathcal{G}$-α-açık U kümesi vardır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

İspat(a)⇒(b) F kümesi Y nin kapalı bir alt kümesi olsun. f fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-sürekli olduğu için $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$ kümesi $\mathcal{G}$-α-açıktır. O halde $f^{-1}(F)$ kümesi $\mathcal{G}$-α-kapalıdır.

(b)⇒(a) V∈σ olsun. Hipotezden $f^{-1}(Y-V)=X-f^{-1}(V)$ kümesi $\mathcal{G}$-α-kapalıdır. Buradan $f^{-1}(V)$ kümesi $\mathcal{G}$-α-açıktır. O halde f fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-süreklidir.

(a)⇒(c) x∈X olmak üzere V kümesi f(x) noktasını içeren açık bir küme olsun. f fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-sürekli olduğu için $f^{-1}(V)$, x noktasını içeren $\mathcal{G}$-α-açık bir kümedir. O halde $f^{-1}(V)=U$ olarak alındığında x noktasını içeren f(U)⊆V koşulunu sağlayan bir $\mathcal{G}$-α-açık küme elde edilmiş olur.

(c)⇒(a) V∈σ ve $x\in f^{-1}(V)$ olsun. Buradan $f(x)\in V\in\sigma$ ve hipotezden x noktasını içeren f(U)⊆V olacak şekilde öyle bir U $\mathcal{G}$-α-açık kümesi vardır. O halde $x\in U\subseteq int(\Psi(int(U)))\subseteq int(\Psi(int(f^{-1}(V))))$ olduğundan $f^{-1}(V)\subseteq int(\Psi(int(f^{-1}(V))))$ dir. Bu $f^{-1}(V)$ kümesinin $\mathcal{G}$-α-açık olduğunu gösterir. Böylece, f fonksiyonu $\mathcal{G}$-α-süreklidir.

Teorem 5.4: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill olmak üzere f : $(X,\mathcal{T},\mathcal{G})\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(a) f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-süreklidir,

(b) Y içindeki her kapalı kümenin ters görüntüsü $\mathcal{G}$-yarı-kapalıdır,

(c) Her x∈X ve f(x) noktasını içeren her V∈σ için f(U)⊆V olacak şekilde x noktasını içeren bir $\mathcal{G}$-yarı-açık U kümesi vardır.

(Al Omari ve Noiri, 2011;Mandal ve Mukherjee,2012)

İspat: (a)⇒(b) F kümesi Y nin kapalı bir alt kümesi olsun. f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-sürekli olduğu için $f^{-1}(Y-F)=X-f^{-1}(F)$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır. O halde $f^{-1}(F)$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-kapalıdır.

(b)⇒(a) V∈σ olsun. Hipotezden $f^{-1}(Y-V)=X-f^{-1}(V)$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-kapalıdır. Buradan $f^{-1}(V)$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır. O halde f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-süreklidir.

(a)⇒(c) x∈X olmak üzere V kümesi f(x) noktasını içeren açık bir küme olsun. f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-sürekli olduğu için $f^{-1}(V)$, x noktasını içeren $\mathcal{G}$-yarı-açık bir kümedir. O halde $f^{-1}(V) = U$ olarak alındığında x noktasını içeren f(U)⊆V koşulunu sağlayan bir $\mathcal{G}$-yarı-açık küme elde edilmiş olur.

(c)⇒(a) V∈σ ve $x \in f^{-1}(V)$ olsun. Buradan f(x)∈V∈σ ve hipotezden x noktasını içeren f(U)⊆V olacak şekilde öyle bir U $\mathcal{G}$-yarı-açık kümesi vardır. O halde $x \in U \subseteq \Psi(int(U)) \subseteq \Psi(int(f^{-1}(V)))$ olduğundan $f^{-1}(V) \subseteq \Psi(int(f^{-1}(V)))$ dir. Bu $f^{-1}(V)$ kümesinin $\mathcal{G}$-yarı-açık olduğunu gösterir. Böylece, f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-süreklidir.

Tanım 5.2: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $\mathcal{H}$ ailesi Y üzerinde bir grill olmak üzere f : $(X, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \to (Y, \sigma, \mathcal{H})$ bir fonksiyon olsun. $(Y, \sigma, \mathcal{H})$ ın her $\mathcal{G}$-yarı-açık V kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesi (X,$\mathcal{T}$,$\mathcal{G}$) nin $\mathcal{G}$-yarı-açık bir kümesi ise f fonksiyonuna grill-kararsızdır denir.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

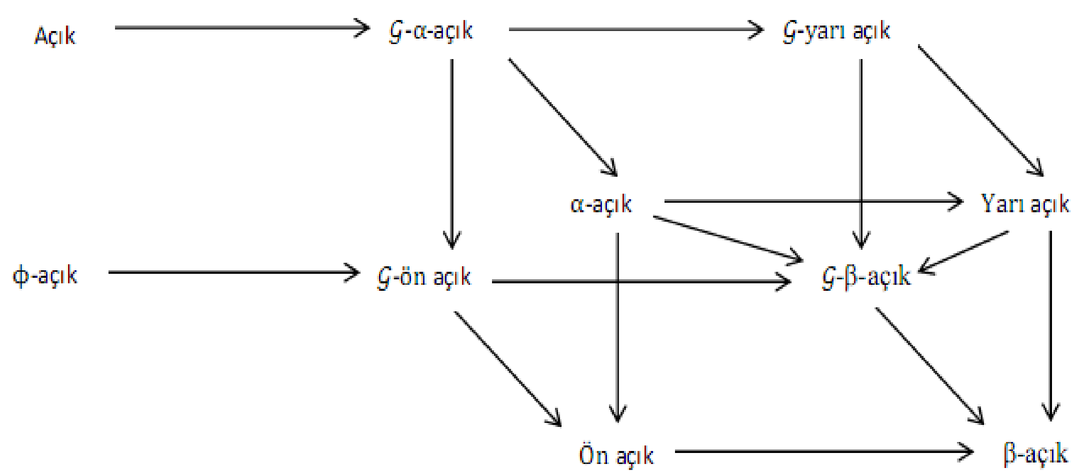
Teorem 5.5: (X,$\mathcal{T}$) ve (Y,σ) iki topolojik uzay, $\mathcal{G}$ ailesi X üzerinde bir grill ve $\mathcal{H}$ ailesi Y üzerinde bir grill olmak üzere f : $(X, \mathcal{T}, \mathcal{G}) \to (Y, \sigma, \mathcal{H})$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-sürekli ve her V∈σ için $f^{-1}(\Psi(V)) \subseteq \Psi(f^{-1}(V))$ ise f fonksiyonu grill-kararsızdır.

(Al Omari ve Noiri, 2011)

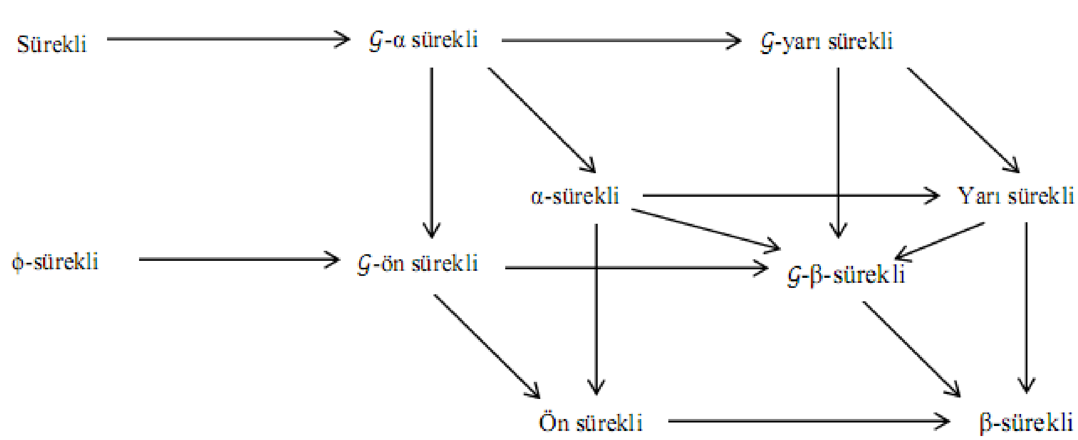
İspat: A kümesi (Y,σ,$\mathcal{H}$) ın $\mathcal{G}$-yarı-açık bir kümesi olsun. Teorem4.2(b) den V⊆A⊆Ψ(V) olacak şekilde öyle bir V∈σ vardır. Buradan $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(\Psi(V)) \subseteq \Psi(f^{-1}(V))$ dir. f fonksiyonu $\mathcal{G}$-yarı-sürekli ve V∈σ olduğundan $f^{-1}(V)$ kümesi $\mathcal{G}$-yarı-açıktır. Böylece Teorem4.3 ten $f^{-1}(A)$ kümesi (X,$\mathcal{T}$,$\mathcal{G}$) de $\mathcal{G}$-yarı-açıktır. O halde f fonksiyonu grill kararsızdır.

6 SONUÇ

Bu tezde ilk olarak grill yapısı tanımlanmış ve çeşitli örneklerle pekiştirilmiştir. Daha sonra grill yardımıyla üretilen topoloji tanımı verilerek özellikleri incelenmiştir. Grill aracılığıyla tanımlanan $\mathcal{G}$-α-açık küme, $\mathcal{G}$-yarı-açık küme, $\mathcal{G}$-ön-açık küme, $\mathcal{G}$-β-açık küme ve Φ-açık küme tanımları verilerek, bunlara ait temel özellikler ve aralarındaki ilişkiler çalışılmıştır. Bu doğrultuda aşağıdaki diagram verilmiştir.



Ayrıca, diagramdaki ters gerektirmelerin her zaman doğru olmadığına dair özgün örneklerle çalışma desteklenmiştir. Bunun yanı sıra, $\mathcal{G}$-α süreklilik, $\mathcal{G}$-yarı süreklilik, $\mathcal{G}$-ön süreklilik , $\mathcal{G}$-β süreklilik ve Φ-süreklilik tanımlarına yer verilmiştir. Aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve aşağıdaki diagram ortaya çıkmıştır.



Benzer şekilde diagramdaki ters gerektirmelerin her zaman doğru olamayacağına dair örnekler verilmiştir.

Bundan sonraki çalışmalarda, griller aracılığıyla farklı küme çeşitleri ve süreklilik çeşitleri tanımlanabilir. Hatta yeni tanımlanan küme ve süreklilik türleriyle tezde bahsedilen küme ve süreklilik türleri arasında ilişkiler kurulabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abd El-Monsef, M. E. , El-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A. , 1983, β-open sets and β-continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ. , 12, 77-90 p.

Al-Omari, A. and Noiri, **T. ,** 2013, Weak forms of G-α-open sets and decompositions of continuity via grills, Bol. Soc. Paran. Mat. ,31(2), 19–29 p.

Al-Omari, A. and Noiri, **T.** ,2011, Decompositions of continuity via grills, Jordan J. Math. Stat. , 4 (1), 33-46 p.

Choquet, G., 1947, Sur les notions de filtre et grille, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 224, 171-173 p.

Crossley, S.G. and Hildebrand, S.K. , 1971, Semi-closure, Texas J.Sci,22,99-112p.

El-Deeb, S.N. , Hasanein, I.A. , Mashhour, A.S. and Noiri, T. , 1983, On p-regular spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie, 27(75), 311-315 p.

Hatır, E. and Jafari, S. ,2010, On some new classes of sets and a new decomposition of continuity via grills, J. Adv. Math. Stud. , 3 (1), 33-40 p.

Levine, N. , 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer Math. Monthly, 70(1), 36-41p.

Mashhour, A. S. , Abd El-Monsef, M. E. and El-Deep, S. N. , 1982**,** On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47-53 p.

Mashhour, A. S. , Hasanein, I. A. and El-Deeb, S. N. , 1983**,** α-continuous and α-open mappings, Acta Math. Hungar, 41, 213-218 p**.**

Mandal, D. and Mukherjee, M.N. , 2012, On a class of sets via grill: A decomposition of continuity, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 20(1), 307–316 p.

Njastad, O. , 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math. , 15(3), 961-970 p.

Noiri, T. , 1984, On α-continuous functions, Casopis Pro Pestovani Matematiky, 109(2), 118-126 p.

Roy, B. and Mukherjee, M. N. ,2007, On a typical topology induced by a grill, Soochow J. Math. , 33 (4), 771-786 p.

ÖZGEÇMİŞ

Gökmen TAŞDAN, 1983 yılında Çıldır'da doğdu. İlkokul ve ortaokulu Kocaeli'de lise öğrenimini Düzce'de tamamladıktan sonra Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliğini 2006 yılında bitirdi. Özel bir dershane de çalıştıkdan sonra 2007-2009 yıllarında Adalar Nüfus Müdürlüğünde görev yaptı ve daha sonra 2010 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'nda öğretmen olarak göreve başladı. Halen Buca Anadolu İmam Hatip Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.