T.C.

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

KAFES İDEALLERİ

Özgür TOK

DANIŞMAN

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Izmir, 2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Özgür TOK tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan "Kafes İdealleri" başlıklı bu çalışma Y. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Y. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretimretim Yönergesinin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve .... tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği-oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		İmza
Jüri Başkanı	**:** Prof.Dr. Mehmet TERZİLER	
Raportör Üye	**:** Doç.Dr. Tahsin ÖNER	
Üye	**:** Yrd.Doç.Dr. Şule AYAR ÖZBAL	

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "Kafes İdealleri" adlı çalışmanın tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin referanslarda gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

.../.../.....
Özgür TOK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım boyunca bilgilerinden yararlandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum ve ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı, değerli Hocam Sayın **Prof.Dr. Mehmet TERZİLER**'e teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

KAFES İDEALLERİ

TOK, Özgür

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Haziran 2014, 31 sayfa

Bu tez esas olarak üç bölümden oluşuyor.

Birinci bölümde; kısmi sıralı kümeler, kafes ve türleri ile ilgili temel kavram ve sonuçlar tanıtılıyor.

İkinci bölümde; dağılmalı bir kafesin bir asal idealinin 0-ideali olması için yeter koşullar türetiliyor. Her 0-idealinin bir sıfırlayıcı ideal olması için bazı denk koşullar kanıtlanıyor. Dağılmalı bir kafesin asal 0-idealleri ve minimal asal idealleri arasında bir denklik elde ediliyor.

Üçüncü bölümde; dağılmalı kafeslerin bir genellemesi olan 0-dağılmalı kafeslerin α-idealleri ve sıfırlayıcı idealleri ele alınıyor.

Anahtar Kelimeler: Kafes idealleri, α-ideal, sıfırlayıcı 0-idealleri, 0-dağılmalı kafesler

ABSTRACT

IDEALS OF LATTICE

TOK, Özgür

MSc. in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

June 2014, 31 pages

This thesis consists mainly of three chapters.

In the first chapter, we introduce partially ordered sets(posets), and basic notions and result concerning lattices and types of lattices.

In the second chapter, for a prime ideal of a lattice to be a 0-ideal, we derive sufficient conditions. We prove some equivalent conditions for each 0-ideal to be an annhilator ideal. We obtain an equivalence between prime 0-ideals and minimal prime ideals of distributive lattice.

In the third chapter, we deal with α-ideals and annhilator ideals of 0-distributive lattices, which are a generalization of distributive lattices.

Keywords: Ideals of lattice, α-ideal, annhilator 0-idealleri, 0-distributive lattices

İçindekiler

GİRİŞ

Bir kafes ideali kavramı kafeslerin kuramsal olarak araştırılmasında önemli bir rol oynar. Birkhoff[3] ve Grätzer[7] halkalar kuramında tanımlanan ideal kavramını kafeslere taşıyarak kafes idealleri kuramını geliştirdiler. Dağılmalı, tümleyenli ve sınırlı (yani 0 en küçük ve 1 en büyük elemanlı) bir kafes olan Boole cebirleri klasik lojikle olan bağlantısı dışında, "Stone Gösterilim Teoremi" aracılığıyla topolojik uzaylarla ilişkilendirildi. Aslında 1936'da M.Stone şu teoremi kanıtladı:" Her Boole Cebiri bir kümenin kuvvet kümesinin bir alt kümesine izomorftur." Başka bir deyişle, Boole cebirleri (ya da özel kafesler) bazı topolojik uzaylarla bağlantılandırıldı. Bu uzayların bazları hem açık hem kapalı olan, düal ideal de denilen,(asal) süzgeçler oluşturur. En son yapılan çalışmalarda 0-dağılmalı kafesler, sözde tümlenmiş kafesler, hemen hemen dağılmalı kafesler, Stone kafesleri vb. kafes genellemeleri için Stone Gösterim Teoremi benzeri sonuçlar elde edilmeye başlandı. (Bkz. [2], [20])

Bu tezde; dağılmalı kafeslerin ağırlıklı olarak 0-idealleri ve minimal asal idealleri üzerinde duruldu ve dağılmalı bir kafesin 0-ideallerinin kümesinin dağılmalı bir kafes oluşturduğu kanıtlandı. Bu bağlamda α-idealler ve sıfırlayıcılar tanımlanarak kanıtlara sadelik ve kısalık kazandırıldı. (Bkz. [5],[8],[10],[11],[12])

Özellikle, sıfırlayıcı koruyan örten homomorfizmalar aracılığıyla bir α-idealinin direkt ve ters görüntülerinin yine bir α-ideal olduğu kanıtlandı. (Bkz. [13], [14], [15])

Hemen hemen dağılmalı kafeslerdeki asal, minimal asal ve sıfırlayıcı idealler ve de dağılmalı kafeslerdeki asal 0-idealleri; sözde tümlenmiş dağılmalı kafeslerdeki δ-idealleri hakkında ileriki çalışmalar için kaynaklar verildi.

Bölüm 1

Temel Kavramlar ve Sonuçlar

Bu bölümde tezin okunabilirliğini kolaylaştırmak için gerekli notasyon, kavram ve sonuçlara yer veriliyor.

1.1 Bağıntılar ve Fonksiyonlar

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ kümelerinin kartezyen çarpımı

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

kümesidir.

$A^0 = \{\emptyset\}$ ve $n > 0$ için $A^n, A \times A \times \ldots \times A, \quad n$ elemanlı kartezyen çarpımıdır. Bir A kümesinin tüm alt kümelerinin kümesi, yani A nın kuvvet kümesi, 2^A ya da $\mathcal{P}(A)$ ile gösterilir.

Bir A kümesinden bir B kümesine bir f fonksiyonu ya da dönüşümü $A \times B$ nin $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$ ise $y_1 = y_2$ özelliğini sağlayan bir alt kümesidir. $(x, y) \in f$ ise $y = f(x)$ yazılır. f nin A dan B ye fonksiyon olduğu $f : A \to B$ ile gösterilir. A ya f nin tanım kümesi denir ve $dom(f) = A$ yazılır.

$f : A \to B$ ve $X \subseteq A$ verilsin. X kümesinin f altındaki görüntüsü $f(X) = \{y | \exists x \in X \cap dom(f) : f(x) = y\}$ kümesidir. $Y \subseteq B$ için Y nin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(Y) = \{x \in dom(f) | f(x) \in Y\}$ kümesidir.

$X \subseteq A$ ve $Y \subseteq Z \subseteq B$ için $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ ve $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$ dir.

$f : dom(f) \to A$ ve $g : dom(g) \to A$, $dom(f) \subseteq dom(g)$ ve her $x \in dom(f)$ için $f(x) = g(x)$ ise, f ye g nin bir kısıtlamasıdır denir ve $f = g|_{dom(f)}$ ile ya da $f < g$ ile gösterilir.

$1_A = A \to A, x \to 1_A(x) = x$ ile tanımlı dönüşüme A kümesinin birim dönüşümü denir.

Önerme 1.1.1 *$f : A \to B$ ve $g : B \to A$ fonksiyonları $gof = 1_A, fog = 1_B$ eşitliklerini sağlıyorsa*

1) *f ve g bijektif dönüşümlerdir.*

2) *$g = f^{-1}$ dir.*

Kanıt: 1) $x_1, x_2 \in A$ ve $f(x_1) = f(x_2)$ olsun.

O zaman $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, dolayısıyla $1_A(x_1) = 1_B(x_2)$ yani $x_1 = x_2$ elde edilir. Böylece f bire-bir dir.

$y \in B$ keyfi bir eleman olsun. $x = g(y)$ için $f(x) = f(g(y)) = 1_B(y) = y$ sonuçlanır; o halde f örtendir. Benzer şekilde g nin bijektif olduğu kanıtlanır.

2) $f(x) = y$ ise $g(f(x)) = g(y), 1_A(x) = x = g(y)$ dir.Tersine $x = g(y)$ ise $f(x) = f(g(y)) = 1_B(y) = y$ dir. Böylece , $f(x) = y$ ancak ve ancak $x = g(y)$ elde edilir.Bu $g = f^{-1}$ bağıntısını yerine getirir.

A kümesi üzerinde bir ikili bağıntı bir $R \subseteq A \times A$ alt kümesidir. $(x, y) \in R$ yerine $x\mathcal{R}y$ notasyonu da kullanılır.$\square$

Tanım 1.1.2 *A bir küme ve $\mathcal{R}$, A üzerinde bir ikili bağıntı olsun.*
Aşağıdaki özellikler sağlandığında $\mathcal{R}$ bağıntısına A üzerinde bir kısmi sıralama denir.

Yansıma: *Her $x \in A$ için , $x\mathcal{R}x$*
Ters simetri: *Her $x, y \in A$ için $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}x$ ise $x = y$*
Geçişme: *Her $x, y, z \in A$ için $x\mathcal{R}y$ ve $y\mathcal{R}z$ ise $x\mathcal{R}z$*

Bu özelliklere ek olarak her $x, y \in A$ için $x\mathcal{R}y$ ya da $y\mathcal{R}x$ ise $\mathcal{R}$ bağıntısına bir tam sıralama denir.
$\mathcal{R}$ bir A kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı ise $(A, \mathcal{R})$ ikilisine bir kısmi sıralı küme ya da kısaca poset denir.

Eğer $\mathcal{R}$ bir tam sıralama ise, $(A, \mathcal{R})$ ikilisine tam sıralı küme ya da zincir denir. A bir poset ve $P \subseteq A$ olsun. Her $x \in P$ için $t\mathcal{R}x$ ise bir $t \in A$ elemanına, P nin bir alt sınırı denir. Eğer

(i) t_0 , P nin bir alt sınırı;

(ii) P nin her t alt sınırı için $t\mathcal{R}t_0$ ise t_0 elemanına P nin en büyük alt sınırı ya da infimumu denir ve $t_0 = \inf P$ yazılır. Eğer $t_0 \in P$ ise o zaman t_0 , P nin en küçük ya da ilk elemanıdır. Mevcut olduğunda infimum tektir.

A bir poset ve $P \subseteq A$ olsun. Her $x \in P$ için $x\mathcal{R}u$ ise bir $u \in A$ elemanına P nin bir üst sınırı denir. Eğer

(i) u_0 , P nin bir üst sınırı;

(ii) P nin her u üst sınırı için $u_0\mathcal{R}u$ ise $u_0 \in A$ elemanına P nin en küçük üst sınırı ya da supremumu denir ve $u_0 = supP$ yazılır. Eğer $u_0 \in P$ ise o zaman u_0 , P nin en büyük ya da son elemanıdır. Mevcut olduğunda supremum tektir.

1.2 Düal Poset ve Düallik İlkesi

$(A, \mathcal{R})$ bir poset ise, $\mathcal{R}$ den itibaren A üzerinde R^∂ bağıntısı $x\mathcal{R}^\partial y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$ şeklinde tanımlanarak (A, R^∂) düal poseti elde edilir.

Böylece çoğu zaman, kanıtlarda kısalık sağlayan düal kavramlar elde edilir. Örneğin; t, $(A, \mathcal{R}^\partial)$ posetinde $P \subseteq A$ nın alt sınırı olsun. O zaman her $x \in P$ için, $t\mathcal{R}^\partial x$ ve denk olarak her $x \in P$, $x\mathcal{R}t$ dir. Dolayısıyla $(A, \mathcal{R}^\partial)$ deki bir alt sınır, $(A, \mathcal{R})$ de bir üst sınırdır ve tersi de doğrudur.

Böylece alt sınır ve üst sınır kavramları , keza en küçük ve en büyük elemanlar düal kavramlardır.
Bir S önermesindeki her bir kavram düali ile değiştirilerek, S^∂ düal önermesi elde edilebilir. Bu sayede bazı teoremlerin kanıtları kısaltılabilir.

Önerme 1.2.1 ***(Düallik İlkesi*** ([7]))

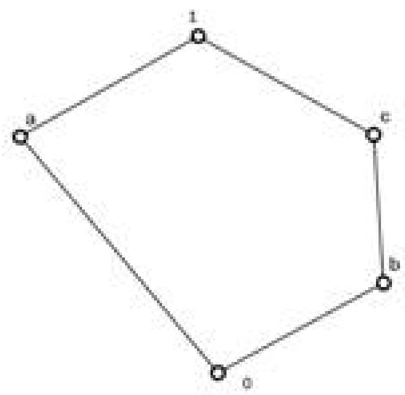
Posetler kuramında T bir teorem ise, T^∂ de bir teoremdir. Örneğin, teorem T olarak bilinen sonuç şöyle ifade edilir:

Bir alt kümenin supremumu mevcut ise tektir. Düal ifade

T^∂ : Bir alt kümenin infimumu mevcut ise tektir. Düallik ilkesine göre T^∂ kanıtını vermeye gerek yoktur.

$(A, \mathcal{R})$ bir poset ve $x, y \in A$ olsun. $x\mathcal{R}y$, $x \neq y$ $x\mathcal{R}z$ ve $z\mathcal{R}y$, $x = z$ ya da $z = y$ gerektiriyorsa, y, x i örter ya da x, y tarafından örtülür denir ve $x \prec y$ yazılır. Başka bir deyişle, x ve y arasında hiçbir eleman yoksa y, x i örter. Bu bağıntı temelinde sonlu posetler, Hasse diyagramı denilen şekilerle temsil edilebilir. Böyle bir diyagramı elde etmek için A nın her elemanı bir daire ile çizilir ve $x \prec y$ ise y nin dairesi x in dairesi üzerinde çizilir ve bir doğru parçası ile birleştirilir.

Örnek 1.2.2 *$A = \{0, a, b, c, 1\}$ olsun. 0 en küçük, 1 en büyük eleman; $b \prec c$ ve a ile b karşılaştırılamayan elemanlar ise aşağıdaki diyagramı elde ederiz.*



Şekil 1

Burada $\inf\{a, c\} = 0$, $\sup\{a, b\} = \sup\{a, c\} = 1$ *olduğunu gözlemleyelim.*

1.3 Kafesler ve Yarı Kafesler

Kafes kavramını tanımlamanın iki denk yolu vardır: Ek koşullar sağlayan poset olarak ve evrensel cebir yardımıyla.

1.3.1 Posetten Kafese

Poseti hareket noktası kabul ederek kafes kavramını tanımlıyoruz.

Tanım 1.3.1.1 $(L, \leq)$ *bir poset olsun. Eğer her $x, y \in L$ için,* $\sup\{x, y\}$ *ve* $\inf\{x, y\}$ *mevcut ise Lye bir kafes denir.*

Bu tanım L üzerinde iki ikili işlem tanımlama olanağı sağlar.

Tanım 1.3.1.2 *$(L, \leq)$ bir kafes ise*

$$\vee : L \times L \to L, x \vee y = \sup\{x, y\} \tag{1}$$

$$\wedge : L \times L \to L, x \wedge y = \inf\{x, y\} \tag{2}$$

ikili işlemlerine sırasıyla birleşim (veya) ve kesişim (ve) denir.

Supremum ve infimum tek türlü belirli olduklarından bu işlemlerin iyi tanımlı olduğunu belirtelim.

Önerme 1.3.1.3 *Bir kafeste aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.*

$$x \vee (y \vee z) = \sup\{x, y, z\} \tag{3}$$

$$x \wedge (y \wedge z) = \inf\{x, y, z\} \tag{4}$$

Kanıt: $\vee$ işleminin tanımından $x \vee (y \vee z) = \sup\{x, y \vee z\}$, dolayısıyla $x \leq x \vee (y \vee z)$ dir.

Benzer şekilde $y \leq y \vee z \leq x \vee (y \vee z)$, $z \leq y \vee z \leq x \vee (y \vee z)$ olması nedeniyle $x \vee (y \vee z)$, $\{x, y, z\}$ nin bir üst sınırıdır.

t_0, $\{x, y, z\}$ kümesinin bir diğer üst sınırı olsun. $y \vee z = \sup\{y, z\}$ ve t_0, $\{y, z\}$ nin bir üst sınırı olmasından $y \vee z \leq t_0$ sonuçlanır. Buradan t_0 ın $\{x, y \vee z\}$ kümesi için bir üst sınır olduğu elde edilir. Böylece $x \vee (y \vee z)$ nin, $\{x, y, z\}$ kümesinin supremumu olduğu kanıtlanmış olur. Benzer şekilde (4) kanıtlanır. $\square$

Önerme 1.3.1.4 *Bir $(L, \leq)$ kafesinde $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri aşağıdakileri sağlar:*

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x \tag{5}$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \tag{6}$$

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x \tag{7}$$

Bunlar sırasıyla değişmelilik , birleşmelilik ve yutma yasalarıdır.

Kanıt: $(5), (1)$ ve (2) den açıktır.

(6): Önerme 1.3.1.3 uyarınca

$x \vee (y \vee z) = \sup\{x, y, z\} = \sup\{z, x, y\} = z \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee z$ yazılabilir. Benzer bir akıl yürütme $\wedge$ için yapılır.

(7): $x \vee (x \wedge y) = \sup\{x, x \wedge y\}$ nedeniyle

$$x \leq x \vee (x \wedge y) \tag{8}$$

dir. Ama $x \wedge y \leq x$ ve $\leq$ yansımalı olduğu için

$$x \vee (x \wedge y) \leq x \tag{9}$$

dir. $\leq$ bağıntısının ters simetrik oluşundan (8) ve (9) dan $x \wedge (x \vee y) = x$ elde edilir. (7) deki diğer bağıntı benzer yaklaşımla gerçeklenir.□

Gözlem: $(5), (6), (7)$ bağıntılarının düal oluşuna dikkat edelim. Bu bağıntılara göre $\wedge$ ve $\vee$ işlemleri düal işlemlerdir. Ayrıca (6) ya dayanarak hiç bir anlam karmaşasına yer vermeden

$$x \vee y \vee z = \sup\{x, y, z\} \tag{10}$$

$$x \wedge y \wedge z = \inf\{x, y, z\} \tag{11}$$

yazılabilir.

Önerme 1.3.1.3 posetlerin sonlu alt kümelerine genişletilebilir.

Önerme 1.3.1.5 *Bir $(L, \leq)$ kafesinin her sonlu boştan farklı alt kümesinin supremumu ve infimumu mevcuttur.*

Kanıt: $n \geq 3$ için $M = \{x_1, \ldots, x_n\},\ L$ kafesinin bir sonlu alt kümesi olsun. n üzerinde tümevarım uygulayalım. $n = 2$ için sonuç Tanım 1.3.1.2 den elde edilir. $n \geq 3$ varsayalım ve n üzerinde tümevarımla

$$x_1 \vee x_2 \vee \ldots x_k = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \tag{12}$$

olduğunu gerçekleyelim.

$k = 3$ için $(12), (10)$ uyarınca doğrudur. (12) nin $k = n$ için doğru olduğunu varsayalım ve $k = n + 1$ için gerçekleyelim.

Önce $\sup\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ mevcut olduğunu ve ayrıca

$$\sup\{\sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, x_{n+1}\} = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$$

eşitliğini kanıtlıyoruz. Tümevarım hipotezinden

$$y = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \tag{13}$$

diyebiliriz. L bir kafes olduğu için $\sup\{y, x_{n+1}\}$ mevcut olması gerekir. $\sup\{y, x_{n+1}\} = z \in L$ diyelim ve $z = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ olduğunu gerçekleyelim. (13) uyarınca

$$x_i \leq y \leq z, \; 1 \leq i \leq n \tag{14}$$

ve $x_{n+1} \leq z$ olmasından z nin $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ kümesinin bir üst sınırı olduğu sonuçlandırılır. $t, \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$in bir diğer üst sınırı olsun:

$$x_i \leq t, \; 1 \leq i \leq n + 1 \tag{15}$$

$(15), (14)$ ve (13) ten $y \leq t$ elde edilir. (15) e göre $x_{n+1} \leq t$ nedeniyle

$$z = \sup\{y, x_{n+1}\} \leq t$$

ye ulaşılır, sonuç olarak aşağıdakiler yazılır:

$$\begin{aligned} x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_{n+1} &= (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \vee x_{n+1} \\ &= \sup\{\sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, x_{n+1}\} \\ &= \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\} \end{aligned}$$

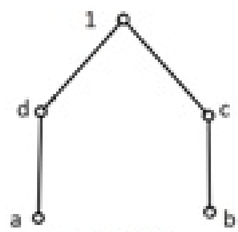
Benzer bir kanıt

$x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k = \inf\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ için verilebilir. □

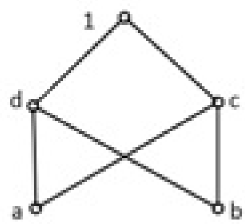
Tanım 1.3.1.6 *Bir $(L, \leq)$ posetinde her $x, y \in L$ için $\sup\{x, y\}(\inf\{x, y\})$ mevcut ise L ye bir birleşim(kesişim) yarı kafesi denir. Hem birleşim, hem kesişim yarı kafes bir kafestir.*

Uyarı: Bir Hasse diyagramı verilen bir posetin bir yarı kafes olup olmadığını göstermek için yardımda bulunabilir.

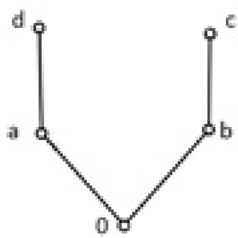
Örneğin Şekil 2(a) bir birleşim yarı kafesi gösterirken, 2(b) yarı kafes olmayan bir poset örneğini verir. Bu yapı $\{a, b\}$ nin bir alt sınırı olmadığı için bir kesişim yarı kafesi değildir. Şekil 3(a) bir kesişim yarı kafesi iken 3(b) değildir. Şekil 2$(a), (b)$ ile Şekil 3$(a), (b)$ nin düal olduğuna dikkat edin.



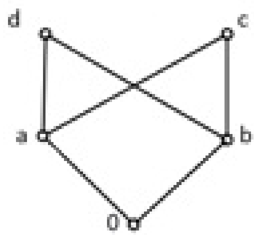
Şekil 2(a)



Şekil 2(b)



Şekil 3(a)



Şekil 3(b)

Önerme 1.3.1.7 *Bir* $(L, \leq)$ *birleşim (kesişim) yarı kafesinde*

$$\vee : L \times L \to L \ (\wedge : L \times L \to L)$$

işlemi $x \vee y = \sup\{x, y\}$ $(x \wedge y = \inf\{x, y\})$ *ile tanımlanırsa bir eşgüçlü, değişmeli ve birleşmeli işlem elde edilir.*

1.3.2 Evrensel Cebir Olarak Kafes

Bu kesimde kafes kavramını evrensel cebir olarak tanımlanıyor ve denk bir tanım elde edildiği kanıtlanıyor.

Tanım 1.3.2.1 *Bir kafes* $(5), (6)$ *ve* (7) *yasalarını sağlayan* $(L, \vee, \wedge)$ *bir evrensel cebirdir.*

Tanım 1.3.1.1 de verilen kafes tanımına Ore anlamında, kısaca Ore kafesi ve Tanım 1.3.2.1 dekine Dedekind anlamında kafes ya da kısaca Dedekind kafesi denir.

Önerme 1.3.2.2 *Bir Dedekind kafesinde işlemler eşgüçlüdür.*

$$x \vee x = x, \ \ x \wedge x = x$$

Kanıt: (7) den

$$x \wedge (x \vee x) = x \text{ ve } x \vee (x \wedge (x \vee x)) = x$$

elde edilir. Böylece $x \vee x = x \vee (x \wedge (x \vee x)) = x$ bulunur. □

Düalite ile ikinci özellik elde edilir. Gelen önerme, bir kısmi sıralamayı tanıtmak için yararlı bir özelliktir.

Önerme 1.3.2.3 *Bir Dedekind kafesinde*

$$x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$$

doğrudur.

Kanıt: $x \vee y = y$ varsayalım. O zaman (7) den $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ elde edilir. Tersi benzer şekilde gösterilir. □

Önerme 1.3.2.4 *Bir Dedekind kafesi üzerinde*

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \tag{16}$$

şeklinde tanımlanan bağıntı bir kısmi sıralamadır.

Kanıt: Önerme 1.3.2.2 uyarınca $x \vee x = x$ vardır, dolayısıyla $x \leq x$, yani bağıntı yansıyandır. $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise (16) $x \vee y = y$ ve $y \vee x = x$ verir. Değişmelilikten $x = y$, yani bağıntının ters simetrik olduğu elde edilir. Şimdi $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise, $x \vee y = y$ ve $y \vee z = z$ dir. O halde $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$ ve (16) dan $x \leq z$ olduğu, yani bağıntının geçişkenliği sonuçlandırılır. □

Teorem 1.3.2.5 *Her* $(L, \vee, \wedge)$ *Dedekind kafesi,* $\leq, (16)$ *da tanımlanan bağıntı olmak üzere, bir* $(L, \leq)$ *Ore kafesidir.*

Kanıt: Her $x, y \in L$ için

$$\sup\{x, y\}$$

nin var olduğunu gösterelim. Ayrıca $\sup\{x, y\} = x \vee y$ olduğunu kanıtlıyoruz. Aşağıdaki türetimler dizisi açıktır:

$x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$ ve

$y \vee (x \vee y) = (x \vee y) \vee y = x \vee (y \vee y) = x \vee y$

Böylece (16) ya göre $x \vee y$, $\{x, y\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. t, $\{x, y\}$ için bir diğer üst sınır olsun. O zaman $x \leq t$, $y \leq t$ ve (16) dan $x \vee t = t$, $y \vee t = t$ yazılır. Böylece $(x \vee y) \vee t = x \vee (y \vee t) = x \vee t = t$, yani $x \vee y \leq t$ dir. □

Bunun sonucu olarak $x \vee y$, $\{x, y\}$ nin en küçük üst sınırıdır. Düalite ilkesinden $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ olduğu gösterilir. O halde her Dedekind kafesi, bir Ore kafesidir.

Uyarı: Önceki kesimde her Ore kafesinin bir Dedekind kafesi olduğu kanıtı ve Teorem 1.3.2.5 göz önünde bulundurulduğunda, Ore kafesi ile Dedekind kafesi kavramlarının denk olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 1.3.2.6 *Bir yarı kafes denkgüçlü, değişmeli ve birleşmeli işlemi olan bir* (L, o) *cebiridir.*
Bu alt kesimi bir sonuçla tamamlıyoruz.

Teorem 1.3.2.7 (L, o) *bir yarı kafes olsun.* L *üzerinde*

$$a \leq b \Leftrightarrow aob = b \tag{17}$$

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow aob = a \tag{18}$$

ikili işlemleri tanımlansın , o zaman aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $\leq$ *ve* $\sqsubseteq$ *düal bağıntılar ;*

2) $\leq$ *ve* $\sqsubseteq$ *kısmi sıralama bağıntılarıdır ;*

3) $(L, \leq)$ *bir birleşim yarı - kafesidir ;*

4) $(L, \sqsubseteq)$ *bir kesişim yarı - kafesidir.*

Kanıt: ([2])

1.3.3 Dağılmalı Kafesler ve Modüler Kafesler

Dağılmalı kafesler küme-kuramsal birleşim ve kesişim işlemlerinin sağladığı dağılma yasalarına benzer özellikleri taşıyan kafeslerdir.

Tanım 1.3.3.1 *Aşağıdaki özdeşlikleri sağlayan bir $(L, \leq)$ kafesine dağılmalı kafes denir:*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \tag{$D1$}$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{$D2$}$$

Önerme 1.3.3.2 *$(D1)$ ve $(D2)$ özdeşlikleri denktir.*

Kanıt: $(D1) \Rightarrow (D2):$ $(D1)$'i uygularsak,

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = [(x \wedge y) \vee x] \wedge [(x \wedge y) \vee z] \tag{19}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla yutma ve değişmelilik yasaları

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge [z \vee (x \wedge y)] \tag{20}$$

verir.

$(D1)$ birleşme işleminin birleşmeliliğinden ve yutma yasasından

$$x \wedge [z \vee (x \wedge y)] = x \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y) = x \wedge (z \vee y) \tag{21}$$

elde edilir. Artık $(19), (20), (21)$ ve birleşme işleminin değişmeliliğinden $(D2)$ ye ulaşılır.

$(D2) \Rightarrow (D1)$: Benzer argümanla kanıtlanır. $\square$

Böylece, $(D1)$ ve $(D2)$ nin düal olmasından, bir kafesin dağılmalı olduğunu göstermek için $(D1)$ ya da $(D2)$ den birinin gerçeklenmesi yeterlidir. Aslında işlem daha da hafifletilebilir.

Önerme 1.3.3.3 *Aşağıdaki eşitsizlik her kafeste geçerlidir.*

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq x \vee (y \wedge (x \vee z)) \tag{22}$$

Kanıt: : $x \leq x \vee y, y \leq x \vee y$ nedeniyle

$$(x \vee y) \vee (x \vee z) \geq x \tag{23}$$

yazılır. Öte yandan

$$(x \vee y) \geq y \wedge (x \vee z) \tag{24}$$

ve

$$(x \vee z) \geq y \wedge (x \vee z) \tag{25}$$

olduğu açıktır. Bunun üzerine (24) ve (25) den

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq y \wedge (x \vee z) \tag{26}$$

(23) ve (26) dan (22) elde edilir. □

Sonuç Teorem 1.3.3.4 *Her kafeste*

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq x \vee (y \vee z)$$

doğrudur.

Kanıt: (22) den, $(x \vee z) \geq z$ ve $y \wedge (x \vee z) \geq (y \wedge z)$ olması nedeniyle , $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq x \vee (y \wedge (x \vee z)) \geq x \vee (y \wedge z)$ elde edilir. □

Kanıtları [7] de görülebilen bir sonuç ifade edelim.

Teorem 1.3.3.5 *Bir $(L, \vee, \wedge)$ kafesi ancak ve ancak $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$ sağlanıyorsa dağılmalıdır.*

Önerme 1.3.3.6 *Her kafeste aşağıdaki özellikler denktir:*

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge [y \vee (x \wedge z)] \tag{M1}$$

$$x \geq z \Rightarrow (x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z) \tag{M2}$$

Tanım 1.3.3.7 *$(M1)$ ya da $(M2)$ yi sağlayan bir kafese modüler kafes denir.*

Önerme 1.3.3.8 *Bir $(L, \vee, \wedge)$ kafesinin modüler olması için*

$$x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z \tag{27}$$

nin sağlanması gerek ve yeterdir.

Kanıt: Gerek koşul açıktır : Kafes modüler ise $(M2)$ den

$z \geq x \Rightarrow (z \wedge y) \vee x = z \wedge (y \vee x)$ yazılır ve dolayısıyla (27) gerçeklenmiş olur.

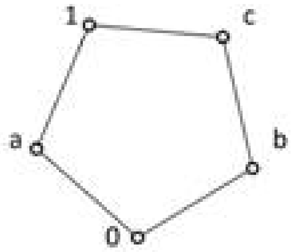
Yeter koşul :$x \leq z$ ise o zaman Sonuç Teorem 1.3.3.4 ve (27) den $(x \vee y) \wedge z \geq x \vee (y \wedge z) \geq (x \wedge y) \wedge z$ ve buradan da

$(x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$ türetilir. Sonuçta (27) sağlanıyorsa $z \geq x \Rightarrow (x \vee y) \wedge z = x \vee (y \wedge z)$ dir. $(M2)$ ve Tanım 1.3.3.7 ye göre kafes modülerdir. □

Önerme 1.3.3.9 *Her dağılmalı kafes modülerdir.*

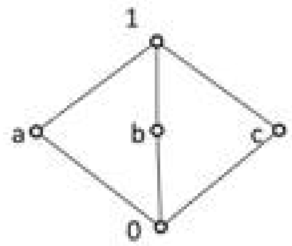
Kanıt: $z \geq x$ varsayalım. Kafes dağılmalı olduğu için $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z) = x \wedge (y \vee z)$ dir ve böylece kafes modülerdir.

Şimdi modüler ve dağılmalı kafesleri belirleyen ve kanıtları [7] veya [4] ya da [6] da görülebilen temel teoremler veriliyor. Bunun için iki önemli kafes, M_3 ve N_5, devreye sokulacaktır. □



N_5

Şekil 4



M_3

Şekil 5

Teorem 1.3.3.10 $(L, \vee, \wedge)$ *kafesinin modüler olması için bir gerek ve yeter koşul L nin N_5 e izomorf bir alt kafesinin olmamasıdır.*

Teorem 1.3.3.11 *Bir kafesin dağılmalı olması için M_3 ile izomorf bir alt kafese sahip olmaması gerek ve yeterdir.*

Bölüm 2

Dağılmalı Kafeslerin Asal 0-İdealleri

Bu bölümde dağılmalı bir kafesin bir asal idealinin, 0-ideal olması için yeter koşullar türetiliyor. Her 0-idealinin bir sıfırlayıcı ideal olması için denk koşullar kanıtlanıyor. Dağılmalı bir kafesin asal 0-idealleri ve minimal asal idealleri arasında bir denklik elde ediliyor.

2.1 Ön Bilgiler

Sıfırlayıcı kavramı [10] tarafından tanıtılmış ve özellikleri, özellikle [17] ve [18]'de yoğun biçimde incelenmiştir. [5]'deki çalışmanın bir uzantısı olarak dağılmalı kafeslerde 0-İdealler kavramı tanıtılmıştır.

Burada bir dağılmalı kafesteki 0-ideallerin kümesinin kendi başına bir dağılmalı kafes olduğu gösteriliyor. Asal idealler ve 0-idealler arasındaki bağlantının yanında her 0-idealin bir asal ideal olması için gerek ve yeter koşul ortaya çıkarılıyor.

Tanım 2.1.1 *L bir dağılmalı kafes ve I, L nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.*

1) *$a, b \in I$ ve $x \in L$ için $a \vee b \in I$ $(a \wedge b \in I)$ ve $a \wedge x \in I$ $(a \vee x \in I)$ ise I'ya L'nin bir ideali (süzgeci) denir.*

2) *P, L'nin bir öz ideali olsun. $x, y \in L$ için $x \wedge y \in P \Rightarrow x \in P$ ya da $y \in P$ ise P'ye bir asal ideal denir.*

3) *P asal idealinin kapsadığı hiç bir asal ideal yok ise, P'ye bir minimal asal ideal denir.*

Bu tanımın bazı sonuçlarını anımsatalım.

Önerme 2.1.2 [3]

P, L kafesinin bir asal ideali olsun. O zaman

$$O(P) = \{x \in L| \ x \wedge y = 0, \ \text{bazı } y \notin P \text{ için } \}$$

L'nin $O(P) \subseteq P$ şeklinde bir idealidir.

Teorem 2.1.3 [3]

I bir ideal, F bir süzgeç ve $I \cap F = \emptyset$ ise $I \subseteq P$ ve $P \cap F = \emptyset$ olacak şekilde bir P asal ideali vardır.

Teorem 2.1.4 [9]

L'nin bir P asal ideali L'nin bir minimal asal idealidir eğer ve yalnız eğer her bir $x \in P$ için $x \wedge y = 0$ olacak şekilde $y \notin P$ vardır.

Önerme 2.1.5 [18]

$A \subseteq L$ için $A^* = \{x \in L|a \wedge x = 0, \ \text{her } a \in A\}$ kümesi L'nin bir idealidir.

$\{a\}^*$ için $(a]^*$ yazılır. O zaman $(0]^* = L$ ve $L^* = (0]$ olduğu açıktır.

Tanım 2.1.6 *$I = I^{**}$ ya da denk olarak L'nin boştan farklı bir S alt kümesi için $I = S^*$ ise, L'nin bir I idealine L nin sıfırlayıcı ideali denir. $(x]^* = (0]$ ise bir $x \in L$ elemanına yoğun denir. $I^* = (0]$ ise L'nin bir I idealine yoğun denir.*

Tanım 2.1.7 *L'nin bir F süzgeci için $I = O(F) = \cup_{x \in F}(x]^*$ ise L'nin bir I idealine* 0*-ideal denir.*

2.2 Asal 0-İdealler

Bu kesimde asal 0-idealler yardımıyla dağılmalı kafesler için bazı karakterizasyon teoremleri kanıtlanacaktır. Bunun için [14] de yapılan sonuçlar esas alınacaktır.

Lemma 2.2.1 *Her dağılmalı L kafesi için aşağıdakiler vardır:*

1) *L'nin her F süzgeci için $F \cap O(F) \neq \emptyset \Rightarrow F = O(F) = L$ dir.*

2) *L nin her P asal ideali için $O(P) = O(L - P)$ dir.*

Kanıt:

1) $F \cap O(F) \neq \emptyset$ varsayalım ve $x \in F \cap O(F)$ seçelim. O zaman $x \in F$ ve $x \in O(F)$ dir. Buradan bir $f \in F$ için $x \in F$ ve $x \wedge f = 0$ dır. Böylece $0 = x \wedge f \in F$, $F = O(F) = L$ yi gerektirir.

2) P, L'nin bir asal ideali olsun. O zaman

$$\begin{aligned} x \in O(P) &\Leftrightarrow \text{bir } y \notin P \text{ için } x \wedge y = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{bir } y \in L - P \text{ için } x \wedge y = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in O(L-P) \\ &\text{olduğundan } O(P) = O(L-P) \text{ dir. } \square \end{aligned}$$

Teorem 2.2.2 *Her dağılmalı kafes L için aşağıdakiler vardır:*

1) *Her minimal asal ideal bir 0-idealdir.*

2) *Her yoğun olmayan asal ideal bir 0-idealdir.*

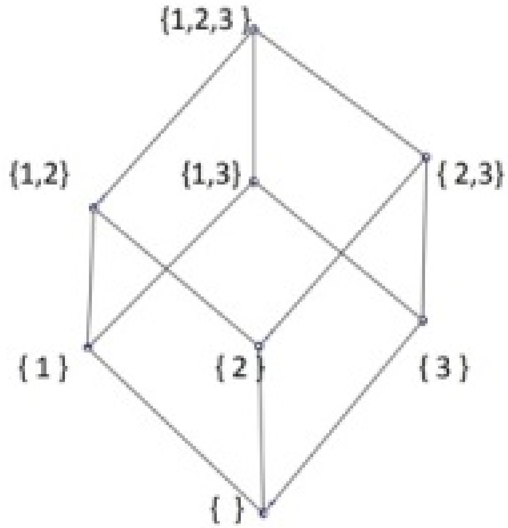
Kanıt:

1) P, L nin bir minimal asal ideali olsun. O zaman $L - P$, L'nin bir maksimal süzgecidir. P minimal olduğu için $P = O(P) = O(L - P)$ elde edilir. Bu yüzden P bir 0-idealdir.

2) P, L'nin yoğun olmayan bir asal ideali olsun. O zaman $x \in P^*$ olacak şekilde $0 \neq x \in L$ vardır. Buradan $P \subseteq P^{**} \subseteq (x]^*$ elde edilir. Öte yandan $a \in (x]^*$ olsun. Bu durumda $a \wedge x = 0 \in P$ ve $x \in P^*$ nedeniyle $x \notin P$ dir. O halde $a \in P$, dolayısıyla $(x]^* \subseteq P$ sonuçlanır. Böylece $P = (x]^* = O([x))$ elde ederiz. Bundan dolayı P, L'nin bir 0-idealidir. $\square$

Teorem 2.2.1 (1) in tersinin genelde doğru olmadığını bir örnekle, hatta bir 0-idealin bir asal ideal bile olmadığını gösterelim.

Örnek 2.2.3 *Şekil 6 da diyagramı verilen L kafesini göz önünde bulunduralım.*



Şekil 6

$I = \{\emptyset, \{1\}\}$ *kümesinin bir ideal ve* $F = \{\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ *kümesinin bir süzgeç olduğu açıktır.*

$0(F) = (\{2,3\}]^* \cup (\{1,2,3\}]^* = \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset, \{1\}\} = I$ *olması nedeniyle* I*, L'nin bir* 0*-idealidir. Fakat* I *asal değildir. Çünkü* $\{2\} \notin I$ *ve* $\{3\} \notin I$ *iken* $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset \in I$ *dır.*

Teorem 2.2.4 *I dağılmalı bir L kafesinin öz* 0*-ideali olsun. O zaman I ancak ve ancak bir asal ideal içeriyorsa asaldır.*

Kanıt: Gerek koşul açıktır. Yeter koşulu kanıtlamak için I'nin P gibi bir asal ideal içerdiğini varsayalım. I'nin bir 0-ideal olması nedeniyle L'nin bir F süzgeci için $I = O(F)$ elde edilir. I'nin asal olduğunu çelişkiyle kanıtlayalım. $a, b \in L$ için $a \notin I$ ve $b \notin I$ seçelim. O zaman $a \notin P$ ve $b \notin P$ dir. Dolayısıyla $a \wedge b \notin P$ dir. Böylece $(a \wedge b]^* \subseteq P \subseteq I = O(F)$ dir.$a \wedge b \in I = O(F)$ varsayılırsa, bir $f \in F$ için $a \wedge b \wedge f = 0$ yazılır.

Bunun üzerine $f \in (a \wedge b]^* \subseteq O(F)$, buradan $f \in F \cap O(F)$ sonuçlanır. O halde $F \cap O(F) \neq \emptyset$ ve $I = O(F) = F = L$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece I asaldır. □

Teorem 2.2.5 *Dağılmalı bir kafesin her asal* 0*-ideali bir minimal asal idealdir.*

Kanıt: P, L'nin bir asal 0-ideali olsun. O zaman L'nin bir F süzgeci için $P = O(F)$ yazabiliriz. $x \in P = O(F)$ olsun. Buradan $y \in F$ için $x \wedge y = 0$ bulunur. $y \in P$

varsayılırsa, $y \in F \cap O(F)$ olup, $F \cap O(F) \neq \emptyset$ elde edilir. Lemma 2.2.1 (1) uyarınca bu $P = O(F) = F = L$ demektir ki, çelişki ile sonuçlanır. O halde $y \notin P$ dir ve dolayısıyla P bir minimal asal idealdir. $\square$

Teorem 2.2.6 *L'nin tüm 0-ideallerinin kümesi bir dağılmalı kafes oluşturur.*

Kanıt: L'nin herhangi iki süzgeci F ve G için

$$O(F) \cap O(G) = O(F \cap G) \text{ ve } O(F) \cup O(G) = O(F \vee G)$$

tanımlayalım. $O(F \cap G)$, $O(F)$ ve $O(G)$ 0-ideallerinin infimumu ve $O(F \vee G)$ supremumudur. L'nin bir H süzgeci için $O(F) \subseteq O(H)$ ve $O(G) \subseteq O(H)$ varsayalım. $x \in O(F \vee G)$ olsun. O zaman $f \in F$ ve $g \in G$ için $x \wedge f \wedge g = 0$ dır. Bu yüzden $x \wedge f \in O(G) \subseteq O(H)$ dır. O halde bir $h_1 \in H$ için $x \wedge f \wedge h_1 = 0$ dır. Buradan $x \wedge h_1 \in O(G) \subseteq O(H)$ olur ve bir $h_2 \in H$ için $x \wedge h_1 \wedge h_2 = 0$ yazılır. $h_1 \wedge h_2 \in H$ nedeniyle $x \in O(H)$ elde edilir. Böylece $O(F \vee G)$, $O(F)$ ve $O(G)$nin supremumudur. Artık bundan sonra 0-ideallerinin kümesinin $\cap$ ve $\cup$ işlemlerine göre dağılmalı bir kafes olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Tanım 2.2.7 *Her bir $x \in L$ ve bir $x' \in L$ için $(x]^{**} = (x']^{*}$ ise L kafesine bir $*$-kafes denir.*

Teorem 2.2.8 ([18])

Bir L kafesinin $*$-kafes olması için gerek ve yeter koşul her bir $x \in L$ için $x \wedge y = 0$ ve $x \vee y$ yoğun olacak şekilde $y \in L$nin var olmasıdır.

Ayrıntılı kanıtı [14] de verilen aşağıdaki sonuç bölümün son teoremidir.

Teorem 2.2.9 ([14])

L bir $*$-kafes olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

1) *Her 0-ideal bir sıfırlayıcı idealdir.*
2) *Her minimal asal ideal bir sıfırlayıcı idealdir.*
3) *Her 0-ideal bir $x \in L$ için $(x]^{**}$ biçimlidir.*
4) *Her minimal asal ideal yoğun değildir.*

Bölüm 3

0-Dağılmalı Kafeslerde α-İdealleri ve Sıfırlayıcı İdealler

Bu bölümde dağılmalı kafeslerin bir genellemesi olan 0-dağılmalı kafeslerin α-idealleri ve sıfırlayıcı idealleri ele alınıyor. İlk kez [20] de tanımlanan bu kafesler daha sonra [1], [2], [8] ve [11] de yoğun çalışılmıştır. Öte yandan ilk kez [12] de yer alan α-ideal kavramının özellikleri daha sonra [8] ve [11] de genelleştirilmiştir.

3.1 Bazı Tanım ve Sonuçlar

Bu kesimde, Bölüm 2'nin devamı olan, bazı kavram ve sonuçlara yer veriliyor.

Tanım 3.1.1 *L sınırlı yani 0 ve 1 elemanlı bir kafes olsun Her $a, b, c \in L$ için $a \wedge b = 0$ ve $a \wedge c = 0$, $a \wedge (b \vee c) = 0$'ı gerektiriyorsa, L kafesine 0-dağılmalı kafes denir.*

Tanım 3.1.2 *L sınırlı bir kafes olsun. Bir $h : L \to L$ dönüşümüne aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $0 - 1$ homomorfizması denir:*

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$$

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$$

$$h(0) = 0 \ , \ h(1) = 1$$

Tanım 3.1.3 *L sınırlı bir kafes ve I, L'nin bir ideali olsun. Her $x \in I$ için*

$$(x]^{**} \subseteq I$$

ise Iye bir α-ideal denir. Burada $(x]$, $x \in L$ tarafından üretilen esas idealdir.

Sonuç 3.1.4 *L'deki her sıfırlayıcı ideal bir α-idealdir.*

Sonuç 3.1.5 *L'deki her I ideali için*

$$I^e = \{x \in L | (a]^* \subseteq (x]^*, a \in I\}$$

kümesi I'yi kapsayan en küçük α-idealdir ve L'deki bir ideal ancak ve ancak $I = I^e$ ise bir α-idealdir.

Sonuç 3.1.6 *L, 0-dağılmalıdır eğer ve yalnız eğer her $a, b \in L$ için*

$$(a \vee b]^* = (a]^* \cap (b]^*$$

dir.

Sonuç 3.1.7 *Bir 0-dağılmalı L kafesindeki bir I ideali için aşağıdakiler denktir:*

1) *I bir α-idealdir;*

2) *$I = \cup_{x \in L}(x]^{**}$;*

3) *L'deki her x, y için $(x]^* = (y]^*$ ve $x \in I$ ise $y \in I$ dir.*

Sonuç 3.1.8 *Dağılmalı bir L kafesinde $a < b$ ise a yı içeren fakat b yi içermeyen bir P asal ideali vardır.*

Sonuç 3.1.9 *$f : L_1 \to L_2$ ye bir $0 - 1$ kafes homomorfizması ise o zaman*

1) *L_1 in bir I ideali için $f(I)$, L_2nin bir idealidir.*

2) *L_2 nin bir J ideali için $f^{-1}(J)$, L_1 in bir idealidir.*

3) *$0'$, L_2 nin en küçük elemanı olmak üzere, $Kerf = \{x \in L_1 | f(x) = 0'\}$, L_1 in bir idealidir.*

3.2 α-İdealler ve Sıfırlayıcı İdealler

Bu kesim boyunca L sınırlı 0-dağılmalı bir kafesi ve D, Lnin tüm yoğun elemanlarının kümesini gösteriyor. Burada yer alan sonuç ve kanıtlar büyük ölçüde [17] den alınmıştır.

Teorem 3.2.1 *S, L'nin $\wedge$ işlemine kapalı boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman*

$$I = \{x \in L | x \wedge y = 0, \ bir \ y \in S\}$$

kümesi L'nin bir α-idealidir.

Kanıt: $0 \in I$ nedeniyle $I \neq \emptyset$ dır. L'de $x_1 \leq x_2$ ve $x_2 \in I$ ise $x_1 \in I$ dir. Şimdi $x_1, x_2 \in I$ için $x_1 \vee x_2 \in I$ göstererek önce I nin bir ideal olduğunu gerçekleyelim. $x_1, x_2 \in I$ ise o zaman bazı $s_1, s_2 \in S$ için $x_1 \wedge s_1 = 0$ ve $x_2 \wedge s_2 = 0$ dır. Buradan $x_1 \wedge (s_1 \wedge s_2) = 0$ ve $x_2 \wedge (s_1 \wedge s_2) = 0$. L, 0-dağılmalı olduğundan $(x_1 \vee x_2) \wedge (s_1 \wedge s_2) = 0$ olmasını gerektirir. S, $\wedge$ ye kapalı olduğu için $s_1 \wedge s_2 \in S$ dolayısıyla $x_1 \vee x_2 \in I$ dır. O halde I bir idealdir.

I'nın bir α-ideal olduğunu göstermek için $x \in I \Rightarrow (x]^{**} \subseteq I$ kanıtlanmalıdır. $x \in I$ ve $y \in (x]^{**}$ olsun.

O zaman bir $s \in S$ için $x \wedge s = 0$ dır. Bunun üzerine $s \in (x]^{*}$ ve dolayısıyla $y \wedge s = 0$ olur. Bu ise $y \in I$ olduğunu gösterir. Bunun sonucu olarak $(x]^{**} \subset I$ elde edilir. $\square$

Sonuç Teorem 3.2.2 *L'deki bir F süzgeci için*

$$O(F) = \{x \in L | x \wedge y = 0, \ \ bir \ y \in F \ \ için \ \}$$

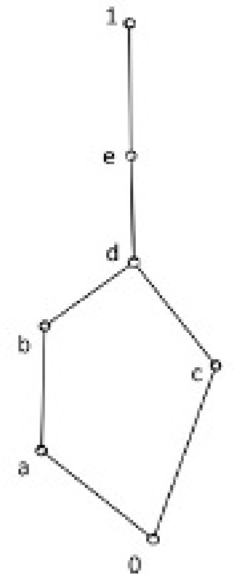
bir α-idealdir.

Bir F süzgeci için $I = O(F)$ ise Lnin bir I idealine 0-ideali denir. Bundan dolaysız olarak şu sonuç elde edilir.

Sonuç Teorem 3.2.3 *L'nin her 0-ideali L'nin bir α idealidir.*

Uyarı: L'deki her minimal asal ideal bir α-idealdir. Fakat L'deki her asal ideal bir α-ideal olmayabilir.

Örnek 3.2.4 *L şekil 7 deki kafes olsun.*



Şekil 7

$(e]$ bir asal idealdir, ancak bir α-ideal değildir. Çünkü $d \in (e]$, $(d]^{**} = L \nsubseteq (e]$ dir.

Aşağıdaki teorem L'deki bir asal idealin α-ideal olması için bir yeter koşul veriyor.

Teorem 3.2.5 *L'nin bir P asal ideali yoğun değilse, P bir α-idealdir.*

Kanıt: Varsayıma göre P yoğun değilse, $P^* \neq (0]$ dır. Dolayısıyla $x \neq 0$ şeklinde P^* de bir x elemanı vardır. Ama o zaman $P \subseteq P^{**}$ nedeniyle $(x]^* \supseteq P^{**}$,$(x]^* \supseteq P$ verir. Bundan başka $t \in (x]^*$ ise $t \wedge x = 0 \in P$ dir. P asal olduğu için ($P \cap P^* = (0] \Rightarrow x \notin P$ sonucundan) $t \in P$ elde edilir. Ama bu, $(x]^* \subseteq P$ olduğunu gösterir. Böylece her iki kapsamadan $P = (x]^*$, yani P bir sıfırlayıcı idealdir. Sonuç 3.1.4 uyarınca P'nin bir α-ideal olduğu sonuçlandırılır. □

3.3 Homomorfizmaları Koruyan Sıfırlayıcı ve α-İdealler

Bu kesimde L_1 ve L_2 sınırlı, 0 ve $0'$ en küçük elemanlı 0-dağılmalı kafesler ve $f : L_1 \to L_2$ bir $0-1$ homomorfizmayı gösteriyor.

Tanım 3.3.1 $(0] \subset A \subset L$ *için* $f(A^*) = \{f(A)\}^*$ *ise* f *ye bir sıfırlayıcı koruyan dönüşüm ve* $(0'] \subset B \subset L_2$ *için* $f^{-1}(B^*) = \{f^{-1}(B)\}^*$ *ise* f^{-1} *e sıfırlayıcıları korur denir.*

Teorem 3.3.2 $f : L_1 \to L_2$ *bir homomorfizma olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:*

1) f *bir sıfırlayıcı koruyan örten homomorfizma ise o zaman her sıfırlayıcı ideal* A *için,* $f(A)$*,* L_2 *nin bir sıfırlayıcı idealidir.*

2) f^{-1} *sıfırlayıcıları korursa* L_2*'nin her* B *sıfırlayıcı ideali için* $f^{-1}(B)$*,* L*'nin bir sıfırlayıcı idealidir.*

Kanıt:

1) A, L_1'in bir sıfırlayıcı ideali, yani $A^{**} = A$ olsun. Sonuç 3.1.9 a göre $f(A)$, L_2 nin bir idealidir. f sıfırlayıcı koruyan olduğundan

$$\{f(A)\}^{**} = f(A^{**}) = f(A) \text{ dır.}$$

ve bu $f(A)$ nın L_2 de bir sıfırlayıcı ideal olduğunu gösterir.

2) B, L_2'nin bir sıfırlayıcı ideali ise $B^{**} = B$ dir.

Sonuç 3.1.9 uyarınca $f^{-1}(B)$, L_1 in bir idealidir. f^{-1} sıfırlayıcıları koruduğu için

$$\{f^{-1}(B)\}^{**} = f^{-1}(B^{**}) = f^{-1}(B)$$

elde ederiz. Bu $f^{-1}(B)$'nin L_1 de bir sıfırlayıcı ideal olduğunu kanıtlar. □

Sonuç Teorem 3.3.3 $f : L_1 \to L_2$, f^{-1} *sıfırlayıcıları koruyacak şekilde bir homomorfizma ise* $Kerf$ *bir sıfırlayıcı idealdir ve dolayısıyla* L_1 *de bir* α*-idealdir.*

Kanıt: $Kerf = \{x \in L_1 | f(x) = 0'\}$ kümesi $Kerf = f^{-1}((0'])$ yazılabilir. $(0']$, L_2 de sıfırlayıcı ideal olduğu için Teorem 3.3.2 gereği $Kerf$, L_1 de bir sıfırlayıcı ideal, dolayısıyla sonuç 3.1.4 den bir α-idealdir. □

Teorem 3.3.4 $f : L_1 \to L_2$ *bir örten homomorfizma olsun. Eğer* $Kerf = \{0\}$ *ise o zaman* f *sıfırlayıcı koruyandır ve* f^{-1} *sıfırlayıcıları korur.*

Kanıt:

1) $(0] \subset A \subset L$ olsun. O zaman $f(A^*) \subseteq (f(A))^*$ dır. $x \in (f(A))^* \subseteq L_2$ olsun. f örten olduğu için $f(y) = x \in (f(A))^*$ olacak şekilde $y \in L_1$ vardır. Şimdi aşağıdakiler açıktır:

$$\begin{aligned} f(y) \in (f(A))^* &\Rightarrow \text{her } a \in A \text{ için } f(y) \wedge f(a) = 0 \\ &\Rightarrow f(y) \wedge a = 0' \\ &\Rightarrow y \wedge a \in Kerf = \{0\} \\ &\Rightarrow \text{her } a \in A \text{ için } y \wedge a = 0 \\ &\Rightarrow y \in A^* \\ &\Rightarrow f(y) \in f(A^*), \text{ yani } x \in f(A^*) \end{aligned}$$

Böylece $(f(A))^* \subseteq f(A^*)$ dir ve her iki kapsama göz önüne alındığında $f(A^*) = (f(A))^*$ elde edilir. Bu f nin sıfırlayıcı koruyan olduğunu kanıtlar.

2) $(0] \subset A \subset L_2$ ve $x \in \{f^{-1}(A)\}^*$ olsun. O zaman her $a \in f^{-1}(A)$ için $x \wedge a = 0$ dır. Şimdi aşağıdakiler açıktır:

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(A) &\Rightarrow x \wedge a = 0 \text{ her } a \in f^{-1}(A) \text{ için} \\ &\Rightarrow x \wedge a = 0 \text{ her } f(a) \in A \text{ için} \\ &\Rightarrow f(x) \wedge f(a) = 0' \text{ her } f(a) \in A \text{ için} \\ &\Rightarrow f(x) \in A^* \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(A^*) \end{aligned}$$

Böylece $\{f^{-1}(A)\}^* \subseteq f(A^*)$ dır. Diğer kapsamayı göstermek için $x \in f^{-1}(A^*)$ ve $a \in f^{-1}(A)$ olsun. O zaman $f(x) \in A^*$ ve $f(a) \in A$ dır. Buradan $f(x) \wedge f(a) = 0'$, $f(x \wedge a) = 0'$ verir. Böylece $x \wedge a \in Kerf = \{0\}$ ve dolayısıyla her $a \in f^{-1}(A)$ için $x \wedge a = 0$ dır. O halde $x \in \{f^{-1}(A)\}^*$ bulunur. Bu ise $\{f^{-1}(A)\}^* \subseteq f^{-1}(A^*)$ demektir. Sonuç olarak $f^{-1}(A^*) = \{f^{-1}(A)\}^*$ elde edilir. □

Teorem 3.3.5 *$f : L_1 \to L_2$ ye sıfırlayıcı koruyan bir örten homomorfizma olsun. $Kerf = \{0\}$ ise o zaman L'nin boştan farklı A, B alt kümeleri için*

$$A^* = B^* \Leftrightarrow \{f(A)\}^* = \{f(B)\}^* \textit{ dir.}$$

Kanıt: $A^* = B^*$ ise $f(A^*) = f(B^*)$ olduğu açıktır. f sıfırlayıcı koruyan olduğu için de $\{f(A)\}^* = \{f(B)\}^*$ elde edilir. Şimdi $\{f(A)\}^* = \{f(B)\}^*$ varsayalım. $x \in A^*$ olsun. O zaman her $a \in A$ için $x \wedge a = 0$ dır.

$$\begin{aligned} x \wedge a = 0, \text{ her } a \in A \text{ için} &\Rightarrow f(x \wedge a) = 0', \text{ her } a \in A \text{ için} \\ &\Rightarrow f(x) \wedge f(a) = 0', \text{ her } a \in A \text{ için} \\ &\Rightarrow f(x) \in \{f(A)\}^* \\ &\Rightarrow f(x) \in \{f(B)\}^* \text{ varsayımından} \\ &\Rightarrow f(x) \wedge f(b) = 0', \text{ her } b \in B \text{ için} \\ &\Rightarrow f(x \wedge b) = 0', \text{ her } b \in B \text{ için} \\ &\Rightarrow x \wedge b \in Kerf = \{0\}, \text{ her } b \in B \\ &\Rightarrow x \wedge b = 0, \text{ her } b \in B \text{ için} \\ &\Rightarrow x \in B^* \end{aligned}$$

Böylece $A^* \subseteq B^*$ dir. Benzer şekilde $B^* \subseteq A^*$ gösterilir. O halde $A^* = B^*$ dir. $\square$

Kanıtı ayrıntılı olarak [12] de yer alan aşağıdaki teorem bir α-idealin ters görüntüsünün bir α-ideal olması için gerek ve yeter koşul veriyor.

Teorem 3.3.6 *$f : L_1 \to L_2$ bir örten homomorfizma olsun. L_2'nin her J α-ideali için $f^{-1}(J)$, L_1 de bir α-idealdir eğer ve yalnız eğer her bir $x' \in L_2$ için $f^{-1}((x']^*)$, L_2 de bir α-idealdir.*

Bu bölümün son teoreminde 0-dağılmalı kafeslerin sıfırlayıcı koruyan homomorfizmalar altında α-ideallerin ters görüntülerinin yine α-idealler olduğu kanıtlanıyor. Bu kanıt bir kez daha [12] den görülebilir.

Teorem 3.3.7 *$f : L_1 \to L_2$ sıfırlayıcı koruyan bir örten homomorfizma olsun.*

1) *I, L_1 in bir α-ideali ise, o zaman $f(I)$, L_2 nin bir α-idealidir.*

2) *J, L_2 nin bir α-ideali ise, o zaman $f^{-1}(J)$, L_1 in bir α-idealidir.*

SONUÇ:

Bu tezde dağılmalı kafeslerin asal 0-idealleri, sıfırlayıcı idealleri ve minimal asal idealleri arasındaki bağıntılar 2. Bölümde araştırılıyor. Bir dağılmalı kafesteki 0-ideallerin kümesinin dağılmalı bir kafes oluşturduğu kanıtlanıyor.
3. Bölümde; dağılmalı bir kafesin genellemesi olan 0- dağılmalı kafeslerin α-idealleri ve sıfırlayıcı idealleri ele alınıyor. Sıfırlayıcı koruyan örten homomorfizmalarla bir α-idealinin direk görüntüsünün ve ters görüntüsünün yine α-ideal olduğu kanıtlanıyor.

Kafeslerde başka türden idealler incelenebilir. Kafes türüne göre idealler oluşturulabilir. Bunlardan bazılarını verelim:

•Sözde tümlenmiş dağılmalı kafeslerde δ-idealler. Bu idealler aracılığıyla ilginç kafesler, örneğin Stone kafesleri, karakterize edilmektedir. Bunun için [15]'e başvurulabilir.

•Hemen hemen dağılmalı kafeslerde minimal asal idealler. Bu tür kafesler Boole cebirlerinin halka kuramsal genelleşmelerini kapsar. İlgi duyanlar için [16] önemli bir kaynaktır.

Aynı kafes türünde asal, minimal asal ve sıfırlayıcı ideallerin özellikleri [13] de çalışılıyor.

Kaynakça

[1] Balasubramani, P., Venkatanarsimhan, Characterization of the O-distributive lattice, Indian J. Pure and App. Math. 32, 3(2001), 314-315.

[2] Balasubramani, P., Stone topology of the set of prime filters of a O-distributive lattice, Indian J. Pure and App. Math. 35, 2(2004), 149-158.

[3] Birkhoff, G., Lattice Theory, Amer. Math. Soc. Colloq. U.S.A. XXV, Providence, 1967.

[4] Burris, S., Sankappanavar, H.P., A course in universal algebra, Springer-Verlag, 2000.

[5] Cornish, W.H., Annulets and alpha-ideals in distributive lattices, Jour. Aust. Math. Soc., 15(1973), 70-77.

[6] Davey, B.A., Priestley, H.A., Introduction to lattices and order, Cambridge University Press, 2002.

[7] Grätzer, G., Lattice theory, First concepts and distributive lattices, W.H. Freeman and Co., San Fransisco, 1971.

[8] Jayaram, C., Prime alpha-ideals in a distributive lattice, Indian J. Pure and App. Math. 17, 3(1986), 331-337.

[9] Kist, J., Minimal prime ideals in commutative semi groups, Proc. London Math. Soc. Sec. B 13 (1963), 31-50.

[10] Mandelker, M., Relative annihilators in lattices, Duke Math. Jour., 37(1970), 377-386.

[11] Pawar, Y.S., Mane, D.N., alpha-ideals in 0-distributive semi lattices and 0-distributive lattices, Indian J. Pure and App. Math. 24, 7-8(1993), 434-443.

[12] Pawar, Y.S., Khopade, S.S., alpha-ideals and annihilator ideals in 0-distributive lattices, Acta Univ. Palacki, Olamuc, Fac. rer. nat., Mathematica, 49, 1(2010)63-74.

[13] Pawar, Y.S.,Shaikh, A., On prime, minimal prime and annihilator ideals in almost distributive lattices, European Journal of Pure and Applied Mathematics, vol.6, No.1, 2013, 107-118.

[14] Rao, M.S., Prime 0-ideals of distributive lattices, International Journal of Mathematics and Soft computing, Vol.2, No.1(2012), 01-08.

[15] Rao, M.S., Delta-ideals in pseudo-complemented distributive lattices, Archivum Mathematicum (Brno) Tomus 8 (2012), 97-105.

[16] Rao, G.C., S. Ravi Kumar, Minimal prime ideals in almost distributive lattices, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol.4, 2009, no.10, 475-484.

[17] Speed, T.P., A note on commutative semigroups, J.Austral. Math. Soc. 8(1968), 731-736.

[18] Speed, T.P., Some remarks on a class of distributive lattices, J.Austral. Math. Soc. 9(1969), 289-296.

[19] Tandareanu, N. Peano Algebras and lattices, Research report 301, University of Craiova, Romania, 2006.

[20] Varlet, J., A generalization of the notion of pseudo-complementedness, Bull. Soc. Roy., Liege, 37(1968), 149-158.