GRAF BOYAMA ÜZERİNE

Sezen DUMAN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

Matematik Anabilim Dalı

Bornova-İzmir

2014

T.C.

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRAF BOYAMA ÜZERİNE

Sezen DUMAN

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL

İzmir, 2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Sezen DUMAN tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Graf Boyama” başlıklı bu çalışma Y.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi‟nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve .... tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri: **İmza**

Jüri Başkanı :

Raportör Üye :

Üye :

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi Olarak sunduğum "Graf Boyama Üzerine" adlı çalışmanın tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

03/09/2014
Sezen DUMAN

ÖZET

GRAF BOYAMA ÜZERİNE

DUMAN, Sezen

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAY

Eylül 2014, 54 sayfa

Bu tezde öncelikle graf teorisinin ve graf boyamanın tarihi gelişimi üzerine bilgiler verilmiştir. Daha sonra ise graflarda boyama ölçümleri üzerine günümüze kadar yapılan çalışmalarda elde edilen bilgilere yer verilmiştir. Ardından da graf işlemleri boyaması çalışılmıştır.

İlk bölümde, graf boyamanın tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

Tezimizin İkinci bölümünde, bu tezi anlamada kolaylık sağlayacak temel graf tanımlarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde graflarda boyama ölçümlerinden bir tanesi olan tepe boyama incelenmiş ve tanımlara yer verilmiştir. Ayrıca bazı özel graflarda tepe boyama incelenerek, bu özel grafların kromatik sayıları hesaplanmıştır. Son olarakta tepe boyama algoritmaları ve tepe boyamanın uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

Tezimizin dördüncü bölümünde kenar boyama incelenmiş ve kenar boyama ile ilgili tanımlardan bahsedilmiştir. Graf boyama ölçümlerinden biri olan kenar boyama için gerekli olan en az renk sayısı bazı özel graflarda gösterilmiştir.

Son bölümde ise graf işlemlerine yer verilmiş ve graf işlemleri sonucunda elde edilen bazı grafların boyama örnekleri çalışılmıştır.

Anahtar Kelime: Graf boyama tarihi, tepe boyama, kenar boyama, graf işlemleri boyaması

ABSTRACT

ON GRAPH COLORİNG

DUMAN, Sezen

MSc in Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAY

September 2014, 54 pages

In this thesis firstly the historical development of graph theory and graph coloring are studied. Then knowledge obtained from studies made on graph coloring measurements until today are analyzed. Consequently graph operations coloring are studied.

The first part of the thesis includes the historical development of graph coloring.

The second part consists of the basic graph definitions which will help readers to understand this thesis.

In the third part one of the graph coloring measurements which is the vertex coloring is studied and definitions are included. Also vertex coloring for some special graph is analyzed and chromatic numbers of these special graphs are calculated. Finally in this part vertex coloring algorithms and application areas of vertex coloring are studied.

The forth part of the thesis includes edge coloring and concerned definitions. The minimum number of colors required for edge coloring, which is one of the measurement of graph coloring, is shown on some special graphs.

In the last part, graph operations are mentioned and the examples of coloring of some graphs that are obtainedd after graph operations are studied.

Keywords: History of graph coloring, vertex coloring, edge coloring, graph operations coloring

TEŞEKKÜR

Tezimi hazırlamam için bana yardımcı olan, vaktini, emeğini ve sabrını esirgemeyen danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Şule AYAR ÖZBAL'a, yüksek lisans eğitimim sırasında kendilerinden ders aldığım tüm değerli hocalarıma, tez çalışmalarım sırasında benden maddi-manevi desteğini esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil Sayfa

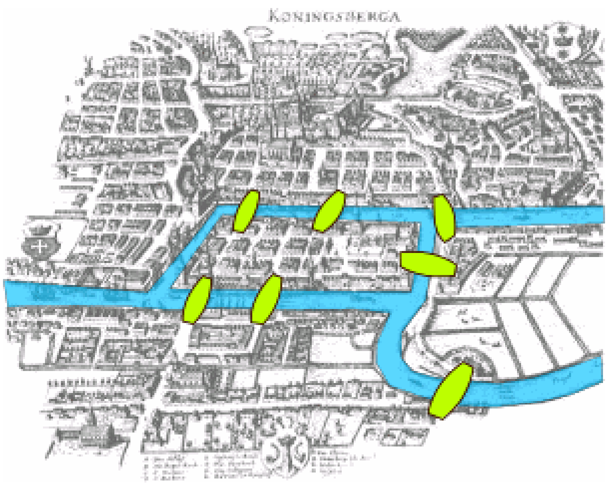
ŞEKİLLER DİZİNİ (devam)

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
C_n	Çevre graf
G	Graf
$\overline{G}$	Grafın tümleyeni
K_n	Tam graf
$S_{1,n}$	Star graf
P_n	Yol graf
$W_{1,n}$	Tekerlek graf
$\chi(G)$	Kromatik sayı
$\Delta(G)$	Maksimum tepe derecesi
$\chi'(G)$	Kenar kromatik sayı

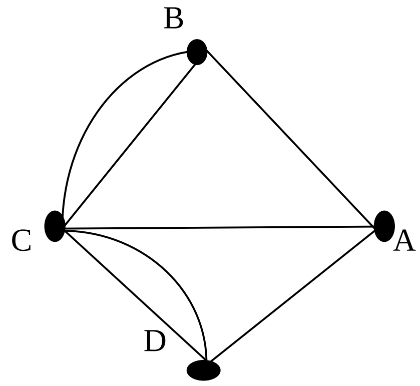
1. GRAF TEORİSİNİN TARİHÇESİ

Graf teori, 1736 yılında Euler'in Königsberg Köprü probleminin çözülmesi ile ortaya çıkmıştır (Neetu, 2013). Königsberg, Pregel nehrinin ortasında bulunan iki ada ve nehrin kenarlarına kurulan bir şehirdir. Nehrin ortasında bulunan adalardan büyük olanı anakaraya ikişer, küçük olanı ise birer köprü ile bağlanmaktadır. Ayrıca iki adayı birbirine bağlayan da bir köprü bulunmaktadır. Şehirde yaşayan insanlar kendi aralarında herhangi bir noktadan başlayarak, yedi köprünün hepsinden yalnız bir kez geçmek şartı ile şehrin bütün bölümlerini dolaştıktan sonra başlangıç noktasına gelinip gelinemeyeceği sorusunu birbirlerine sorarlar (Cunningham, 2004). Bu soru Matematik dünyasında ilgi ile karşılandı ve dönemin ünlü matematikçilerinden olan Leonhard Euler'e kadar ulaştı (Vedatvathi, 2013).



Şekil 1.1 Konigsberg Köprüsü

Euler, yukarıdaki şekli problem için daha uygun bir hale getirerek bu problemin çözümüne başladı. Ancak Euler yaptığı çalışmalar sonucunda herhangi bir noktadan başlayarak, yedi köprünün hepsinden yalnız bir kez geçmek şartı ile şehrin bütün bölümlerini dolaştıktan sonra başlangıç noktasına gelinip gelinemeyeceği sorusunun çözümünün olmadığını ispat etti (Arkut, 1993). Bu ispat, Graf Teorisinin başlangıcı olarak kabul edilmektedir (Bacak ve Beşeri, 2002).



Şekil 1.2 Königsberg Köprü Probleminin Matematiksel Gösterimi

1840 yılına geldiğimizde Möbius, tamamlanmış graf ve ikili grafların düzlemsel olduğunu kanıtladı (Doğanaksoy, 1993). 1847 yılında ise G. R. Kirchhoff'un Ağaç Teorisinin Elektrik Devrelerine Uygulanması başlıklı çalışması ile graf teorisi gelişmeye başladı. Kirchhoff'un bu çalışmasından on yıl sonra ise A. Cayley, Doymuş Hidrokarbon İzomerlerinin Sınıflandırılması çalışması sırasında ağaç kavramını keşfetti (Gutman, 2008). Graf teorisini gelişmesine yardımcı olan bir diğer durum ise, Sir W. R. Hamilton tarafından geliştirilen bir bulmacadır. Her köşesine dünyanın 20 önemli şehrinin yerleştirildiği bir tahtadan ve düzgün bir 12 yüzlüden oluşan bu bulmacada hedef, bir şehirden başlayarak, 12 yüzlünün kenarlarının kullanıldığı ve her bir şehirden sadece bir defa geçmek şartıyla 20 şehrin tamamına uğranılarak bir tur yapabilmekti (Saran, 2008).

Graf teorisinin gelişmesine yardımcı olan en önemli olay ise, Francis Guthrie tarafından ortaya atılan ve İngiltere haritasındaki şehirleri, birbirlerine komşu olan şehirleri farklı renklere boyamak için 4 rengin yeterli olduğunu gösteren Dört Renk Problemidir. 1900'lü yıllarda ise J. Sylvestrer ve D. König graf teorisi üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. Yukarıda belirttiğimiz önemli problemlerin yanı sıra daha birçok problemin çözümünde veya çözümlenmeye çalışılması sırasında graf teorisi kullanılmıştır.

Graf Teorisi ve uygulamalarına olan ilgi son yıllarda daha da artmıştır. Bunun nedeni, günlük hayatta karşılaştığımız birçok problemi graf teorisi yardımı ile çözebilmemizdir. Örneğin, bir havayolu şirketinin uçtuğu şehirleri ve bu şehirlerin hangilerine direk uçtuğunu graf teorisi yardımı ile kolaylıkla gösterebiliriz. Aynı zamanda bir sosyolog da, bir grup insanın birbirlerine karşı davranış ve etkileşimlerini graf teorisini kullanarak rahatlıkla ifade edebilir (Bacak ve Beşeri, 2002). Bunun gibi durumların yanı sıra, graf teorisi, genetik, ekoloji, müzik, arkeoloji, elektronik, bilişim sistemleri gibi birçok alanda kullanılmaya devam etmektedir.

2. GRAF BOYAMANIN TARİHÇESİ

Graf boyama, bir haritanın renklendirilmesinde, birbirine komşu iki bölgenin farklı renklerde olması koşuluyla en az kaç renk kullanılması gerektiği ve yine yeterli renk sayısı için, en karmaşık bir haritada dahi her zaman emin olabileceğimiz bir alt sınırın olup olmadığı sorusunun cevabının aranması sırasında ortaya çıkmıştır. 1852 yılında Francis Guthrie, İngiltere haritasını renklendirirken, birbirine komşu şehirlerin değişik renkte olacak biçimde dört renge boyanabileceğini keşfetti (Berkman ve Doğanaksoy ve Keyman, 1991). Daha sonra Londra Üniversitesi'nde okuyan kardeşi Frederick'e yazdığı bir mektupta " bir haritanın ülkeleri, sınırdaş ülkeler ayrı renklerde olacak şekilde her zaman dört değişik renge boyanabilir mi?" sorusunu sordu (Arkut, 2004). Ancak kardeşi bu soruya cevap bulamadı ve aynı soruyu De Morgan'a sordu. Ancak De Morgan da bu sorunun ispatının yapılıp yapılamayacağını bulamadı ve " Renklendirilmesi için en az dört renk gerektiren haritalar vardır ve Renklendirilmesi için beşinci renk gerektiren harita çizilemez" önermelerinin ispatlanmasını isteyen problem ortaya çıkmış oldu (Berkman ve Doğanaksoy ve Keyman, 1991).

De Morgan, bu problem üzerine çalışırken problemi kendi arkadaş çevresiyle paylaştı ancak problem bir süre unutuldu. 1879 yılında Arthur Cayley, bu sorunun ispatının yapılıp yapılmadığını Londra Matematik Derneği'ne sordu. Böylece bu problem geniş bir çevreye sunulmuş oldu. 1879 yılında Kempe verilen herhangi bir haritanın biri dışında tüm ülkelerinin boyandığını varsayarak henüz boyanmamış ülkelerin renkleri değiştirilerek düzeltilebileceğini ileri sürdü. Kempe bunun için her haritada en fazla beş komşusu olan bir ülke vardır ve haritada ikigen veya üçgen ülke olmadığını varsayabiliriz önermesine dayandı. Böylece Kempe, normal bir haritada beş komşulu bir ülke olması halinde renklendirmenin dört renkle yapılabileceğini gösteren bir ispat bulduğunu ileri sürerek problemi çözdüğünü ileri sürdü. Bu durum 11 yıl boyunca matematik dünyasında kabul gördü. Ancak 1890 yılında Heawood, Kempe'nin kanıtının yanlış olduğunu gösteren ters bir örnek göstererek beş rengin tüm haritalar için yeterli olduğunu kanıtladı. Böylece Heawood, Kempe'nin çözmünün yeterli olmadığını gösterdi ve yanlış kanıtın tamirini geciktirdi. 1913 yılında Birkhoff bir haritada beşgen şeklinde bulunan ülkeler varsa, bunun o dört ülkeyi yok sayarak dört renge boyanabilen bir harita, o dört ülke eklendiğinde de dört renge boyanabileceğini göstererek bunlara sorunsuz şekil adını verdi (Arkut, 2004).

Birkhoff'un bu kanıtından sonra binlerce sorunsuz şekil keşfedildi. Bilgisayarların ortaya çıkışı ile problem üzerinde çalışan insanlar, ellerindeki sorunsuz şekillerin incelenmesini hızlı bir şekilde yapmaya başladılar. Yine de bu şekillerin incelenmesi için çok uzun zaman gerekiyordu. Zamanla bilgisayarların daha büyük hıza ulaşmasıyla yeni teknikler geliştirdiler. Sonunda 1976 yılında Kenneth Appel ve Wolfgang Haken bilgisayar yardımıyla yaptıkları çalışmalar sonunda 1936 tane sorunsuz şekilden oluşan kaçınılmaz küme buldular ve problem çözülmüş oldu (Paksoy ve Tosun, 2010). İlerleyen zamanlarda benzer yöntemler kullanılarak 1936 şekil önce 1482'ye daha sonra da 633'e indirildi (Arkut, 2010).

2004 yılında ise Gonthier verilen kanıtın doğru ve hatasız olduğunu başka bir programla teyit eder (Arkut, 2010). Problemin daha basit bir ispatı 20 yıl sonra Robin Thomas, Daniel Sanders, Paul Seymour ve Neil Robetson tarafından verilmiştir. Söz konusu ispat bilgisayar destekli olup, matematiksel basit kanıt için hala uğraşılmaktadır. Bilgisayar yardımıyla bulunan çözüm sayesinde her haritanın dört renkle boyanabileceği artık bilinmesine karşın bunun nasıl yapılabileceği ise hala bilinememektedir (Berkman ve Doğanaksoy ve Keyman, 1991).

Francis Guthrie tarafından ilk adımları atılan Graf boyama fikri sınav zaman çizelgelerinin çakışmayacak şekilde hazırlanmasında, kimya laboratuarlarına kimyasalların tepkime vermeyecek şekilde yerleştirilmesinde olduğu gibi birçok planlama probleminin çözümünde kullanılmaktadır (Yorgancıoğlu, 2010).

3. TEMEL GRAF TANIMLARI

Çalışmamızın bu bölümünde, graf teorisinde kullanılan temel graf tanımlarına ve grafların genel özelliklerine yer verilmiştir.

Tanım 3.1: Graf (G); bağıntının şekilsel gösterimidir. Yani elimizde var olan bir problemin çözümü için bize görsel olarak kolaylık sağlayan bir yapıyı ifade etmektedir.

V, boştan farklı, n elemanlı bir tepeler kümesi, V→V'ye, bir R bağıntısı da grafın ayrıtlar kümesi olan E'yi göstermek üzere; G= (V,E)'ye bir graf denir.

G=(V,E) grafı, tepeler denilen boş olmayan V(G) sonlu objeler kümesi ile birlikte, ayrıtlar denilen G'nin farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir E (boş olabilir) ayrıtlar kümesidir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.2: Bir G grafı ayrıtının başlangıç ve bitiş tepesi aynı tepe ise bu ayrıta "bukle (loop)" denir (Chartrand- Zhang, 2009).

Tanım 3.3: Bir grafta aynı tepe çifti arasında iki veya daha çok ayrıt varsa bu ayrıtlara çok katlı ayrıt, bu tür graflara ise katlı ayrıtlı graf (multiple graph) denir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.4: Simetrik olmayan bağıntıların graflarına "yönlendirilmiş graf (directed graph)" denir. Yönlendirilmiş grafların her ayrıtı yönlüdür. (Wilson, 1985).

Tanım 3.5: Simetrik bağıntıların graflarına "yönlendirilmemiş graf (undirectedgraph)" denir. (Hartsfield and Ringel, 1990).

Tanım 3.6: Çok katlı ayrıt içermeyen, yönlendirilmemiş ve bukle içermeyen graflara basit (simple) graf denir (Wilson, 1985).

Tanım 3.7: Bir G grafında herhangi bir ayrıt herhangi iki tepeyi birleştiriyorsa bu iki tepeye bitişik tepeler (adjacent vertex) denir (Wilson, 1985).

Tanım 3.8: Bir G grafının, bir tane tepesi olmasına rağmen ayrıtı bulunmuyorsa bu grafa trivial graf denir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.9: Bir G grafının tepe derecesi 0 ise, bu tepeye izole tepe (isolated vertex) denir (Diestel, 2000).

Tanım 3.10: Sadece izole tepelerden oluşan grafa null graf denir (Wilson, 1985).

Tanım 3.11: Bir G grafının her tepe çifti arasında en az bir tane yol varsa bu grafa birleştirilmiş (connected) graf denir (Wilson, 1985).

Tanım 3.12: Bir G grafının tepeleri kendisi dışındaki diğer tüm tepelerle bitişikse bu grafa tam (complete) graf denir ve K_n ile gösterilir. Tepe sayısı n ise ayrıt sayısı da $\frac{n(n-1)}{2}$ dir (Wilson, 1985).

Tanım 3.13: Bir G grafında, u tepesinden başlayarak v tepesine erişen, ayrıt ve tepelerden istenildiği kadar geçilen iletişime bir "yürüyüş (walk)" denir. Bir yürüyüşteki ayrıtların sayısı o yürüyüşün uzunluğunu verir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.14: Bir G grafında, u tepesinden başlayarak v tepesine erişen bir yürüyüşte her ayrıt sadece bir kez kullanılmış ise, bu yürüyüşe zincir (trial) denir (Wilson, 1985).

Tanım 3.15: Başlangıç ve bitiş tepeleri tek dereceli olup diğer tepeleri 2 dereceli olan graflara yol (path) graf denir ve P_n ile gösterilir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.16: Her tepesi 2 dereceli olan grafa çevre (cycle) graf denir ve çevre graf n tepeli ise C_n şeklinde gösterilir (Wilson, 1985).

Tanım 3.17: Bir G grafının her tepesi aynı derecede ise bu grafa düzenli (regular) graf denir. Grafın tüm tepelerine ait dereceler r'ye eşit ise bu grafa da "r-düzenli graf (r-regular graph)" denir. (Wilson, 1985).

Tanım 3.18: Bir G grafı 10 tepeli ve 3-düzenli graf ise bu grafa Petersen grafı denir (West, 2001).

Tanım 3.19: Bir G düzenli grafının tepeleri 3 dereceli ise, bu grafa küp biçiminde (cubic or trivalent) graf denir (Diestel, 2000).

Tanım 3.20: Bir G grafının tepeler kümesi birleşimleri V'yi veren, arakesitleri boş olan ($V_1 \cup V_2 = V$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) ve her ayrıtının bir tepesi V_1 de diğer tepesi V_2 de olacak şekilde iki kümeye ayrılabiliyorsa bu grafa "iki parçalı graf (bipartite graph)" denir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.21: İki kümeli bir grafta V_1 kümesinin her bir tepesi V_2 kümesinin her bir tepesine bir ayrıt ile birleştirilmiş ise bu grafa iki parçalı tam (complete bipartite) graf denir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.22: n+1 tepeli bir G grafında n tane tepe bir dereceli, bir tane tepe n dereceli ise, bu grafa yıldız (star) graf denir ve $K_{1,n}$ ile gösterilir (Wilson, 1985).

Tanım 3.23: n tepeli birleştirilmiş bir $G=(V,E)$ grafında, bir tepenin derecesi n-1, geri kalan n-1 tane tepenin her birinin derecesi 3 ise bu grafa tekerlek (wheel) graf denir ve $W_{1,n}$ ile gösterilir (West, 2001).

Tanım 3.24: Çevre içermeyen graflara ağaç (tree) graf denir. n tane tepesi olan bir ağaç grafın n-1 tane ayrıtı vardır. (Wilson, 1985).

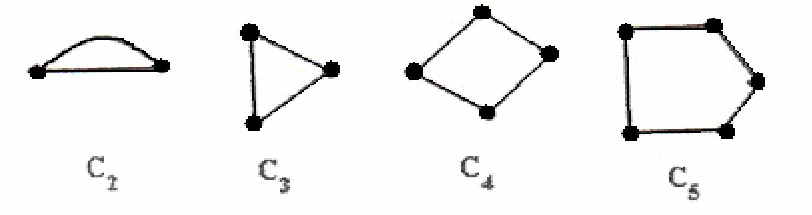
Tanım 3.25: Bir G grafının bazı ayrıtve tepelerinden $V_1 \subset V_2$ ve $E_1 \subset E_2$ olacak şekilde tanımlanan $H=(V_1, E_1)$ bir grafa G'nin alt grafı (subgraph) denir (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 3.26: $G = (V,E)$ grafı verilsin. $V_1 = V$ ve $E_1 \subset E$ olacak şekilde tanımlanan $G_1 = (V, E_1)$ grafına G grafının bir "dallanmış alt grafı (spanning subgraph)" denir. (Chartrand-Zhang, 2009).

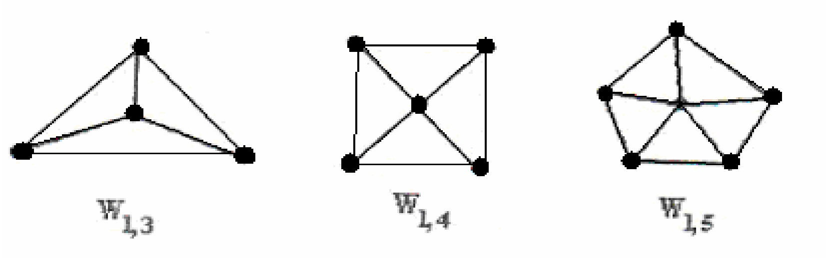
Tanım 3.27: Bir G grafının bir H dallanmış alt grafı bir çevre içermiyorsa H grafı, G grafının bir dallanmış ağacıdır. (spannig tree) (Wilson, 1985).

Tanım 3.28: Bir G grafının maksimum tepe derecesi Δ(G) şeklinde ifade edilir (Hartsfield-Ringel, 1990).

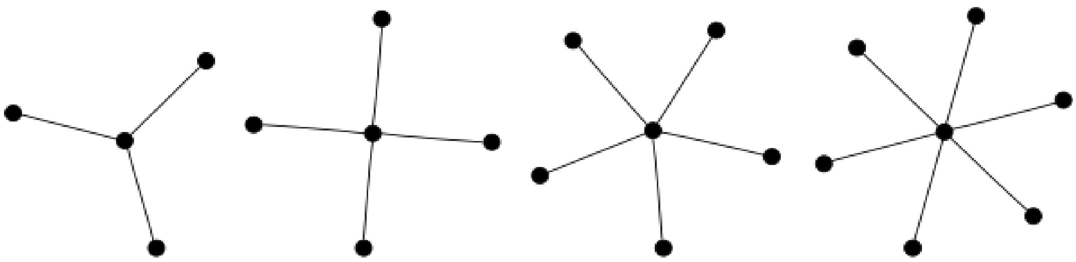
Aşağıda bazı temel graf sınıflarına yer verilmiştir.



Şekil 3.1 Çevre Graf



Şekil 3.2 Tekerlek Graf

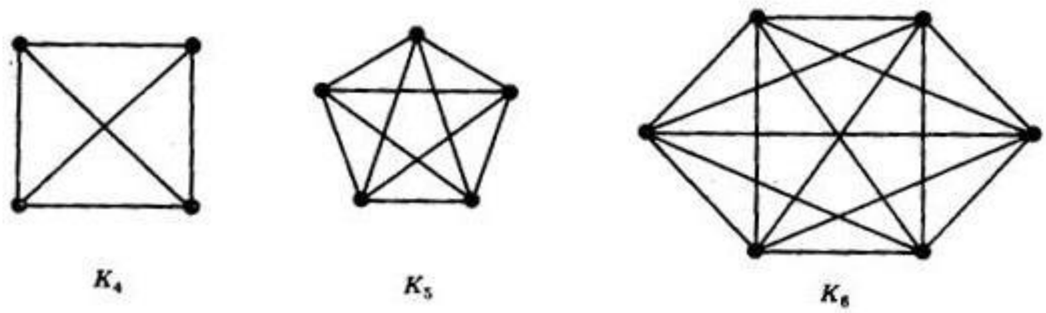


$S_{1,3}$ $S_{1,4}$ $S_{1,5}$ $S_{1,6}$

Şekil 3.3 Yıldız Graf

$K_{3,5}$ $K_{2,6}$

Şekil 3.4 İki Parçalı Tam Graf



Şekil 3.5 Tam Graf

4. TEPE BOYAMA

Tepe boyama, graf boyamanın en yaygın türüdür. Bu problem basit bir depolama sorununa çözüm aranması sırasında ortaya çıkmıştır. Bir üniversitenin Kimya bölümü, elindeki kimyasal maddeleri depolamak istiyordu. Ancak bu kimyasal maddelerden bazıları yan yana geldiklerinde şiddetli kimyasal reaksiyonlara neden olabiliyorlardı. Bundan dolayıda bu kimyasalların aynı odada olmaması gerekiyordu. Bu durum ise çok fazla oda kullanılmasına neden olacaktı. Bu nedenle birbirleriyle uyumlu kimyasallar aynı odada olmak koşuluyla en az kaç oda gereklidir şeklinde bir soru sorulabilirdi (Bacak, 2004).

Biz bu depolama problemini graf problemine dönüştürdüğümüzde G=G(V,E) şeklinde ifade edilir. Burada tepeler kümesi kimyasal maddeleri ifade ederken, ayrıtlar kümesi de birbiriyle etkileşimde olan kimyasal maddeler arasındaki bağları gösterir. G grafının tepe boyanması için gerekli en az renk sayısı, en az oda sayısına eşittir. Bu sayı da G grafının kromatik sayısını verir (Bacak, 2004).

Tanım 4.1: Bir G grafında, bitişik olan iki tepe farklı renkte olacak şekilde boyanmasına uygun tepe boyama (proper vertex coloring) denir (Chartrand-Zhang, 2009).

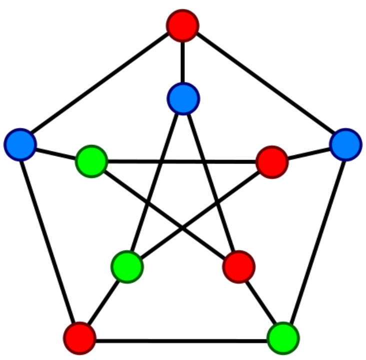
Bir G grafının uygun tepe boyaması, G grafının tepelerine renk tayin etmemiz anlamına gelir. G grafının her tepesine bir renk verilerek komşu tepelerin farklı renkte olması sağlanır. Buna da G grafının boyanması denir. Graf boyamada az sayıda rengin kullanılabileceği durumlarda mavi, kırmızı, sarı gibi gerçek renkler tercih edilebilir. Buna karşılık çok fazla rengin kullanılması gereken bir tepe boyama probleminde (1,2,3,….k) gibi pozitif tamsayılar renklerin yerine sıkça kullanılabilir (Diestel, 2000).

Pozitif tam sayıların renkler yerine kullanılmasının en önemli nedeni çoğu zaman kullanılan sayıların, renkleriyle ilgilenmememiz ve pozitif tam sayıların matematiksel bir fonksiyon olarak kullanılabilmesidir. Bir tepe boyamada k tane renk kullanılmışsa, o zaman renklendirmeye k-boyama denir ve k-boyama da kullanılan renkler 1,2,3….k pozitif tam saylarıdır.

Tanım 4.2: Bir G grafının k-boyaması, k tane renk kullanılan G grafının tepe boyamasıdır (Gross, 2010).

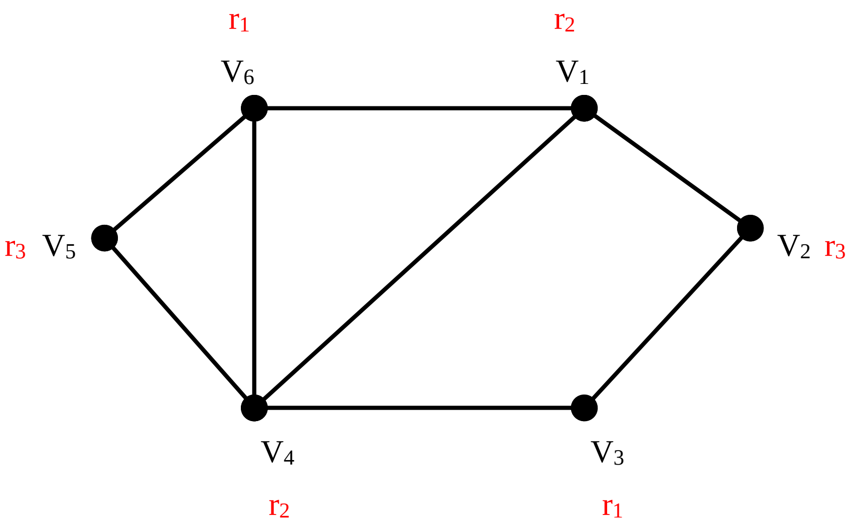
Tanım 4.3: Eğer bir G grafı k tane renk kullanılarak uygun bir şekilde tepe boyaması yapılırsa, bu G grafı k tane renge boyanır. (Chartrand-Zhang, 2009).

Tanım 4.4: Bir G grafının tepe boyaması için gerekli en az renk sayısına grafın "kromatik sayısı (chromatic number)" denir ve $\chi(G)$ ile gösterilir (Wilson, 1985).



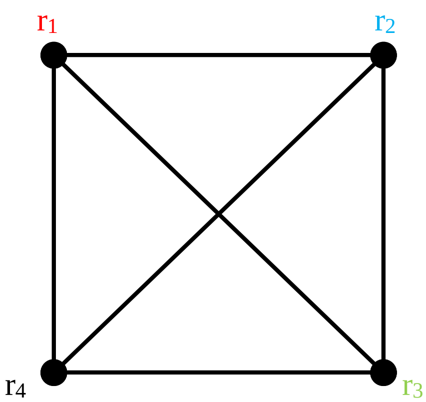
Şekil 4.1 3-kromatik Graf

p tepeli birleştirilmiş bir G grafı için, $\chi(G) \leq$ p dir. Yani, bir G grafının kromatik sayısı en fazla tepe sayısı kadardır. Aşağıdaki grafı boyamak için en az renk sayısı, $\chi(G)= 3$ olup, graf 2 renkte boyanmaz (Gross, 1999).



Şekil 4.2 Birleştirilmiş G grafı

Bir p tepeli Tam Graf'ın, kromatik sayısı $\chi(K_p) =$ p'dir. Yani grafta kaç tane tepe varsa graf o kadar renge boyanır (Gross, 1999).

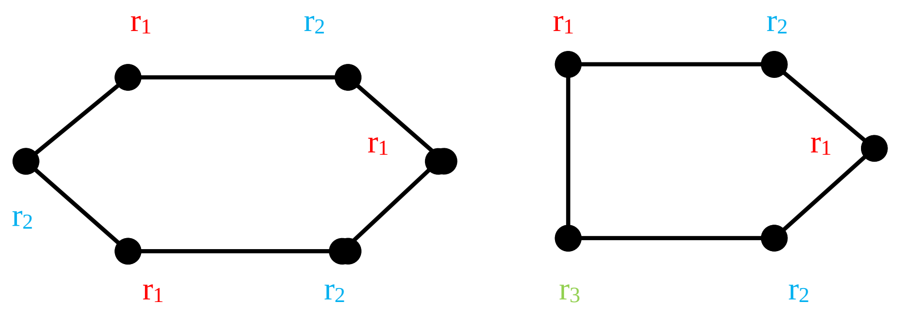


Şekil 4.3 Tam Graf Tepe Boyama

Bir p tepeli Çevre Grafın kromatik sayısı,

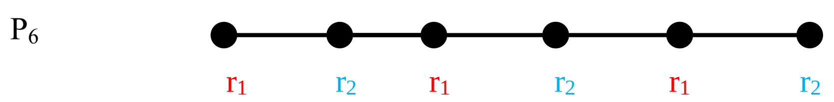
$$\chi(C_p) = \begin{cases} 2, & p - çift \\ 3, & p - tek \end{cases}$$ dir.

Yani Çevre Grafın tepe sayısı tek sayı ise graf en az 3 renge boyanabilirken, tepe sayısı çift sayı ise graf en az 2 renge boyanabilir (Gross, 1999).



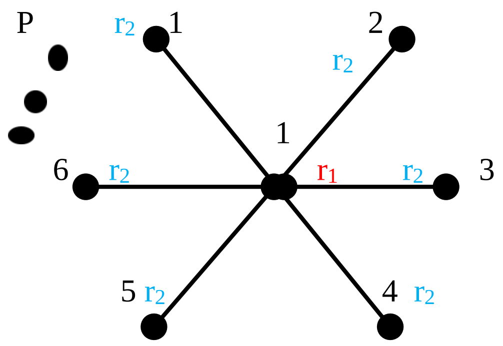
Şekil 4.4 Çevre Graf Tepe Boyama

Bir n tepeli bir Yol Graf'ın kromatik sayısı $\chi(P_n)$= 2'dir. Yani yol grafların tepeleri en az 2 renge boyanabilir (Gross, 1999).



Şekil 4.5 Yol Graf Tepe Boyama

Bir p tepeli yıldız grafın kromatik sayısı $\chi(S_{1,n})$=2'dir. Yani yıldız grafın tepeleri en az 2 renge boyanabilir (Gross, 1999).

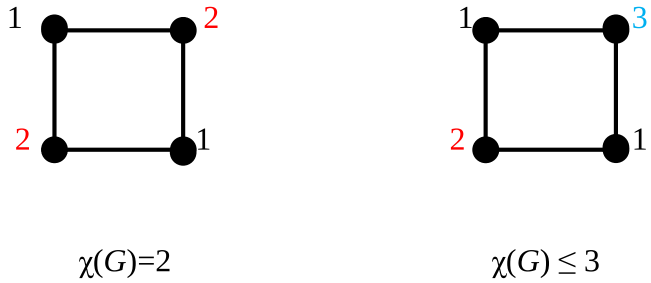


Şekil 4.6 Yıldız Graf Tepe Boyama

Bir G grafının kromatik sayısı, G tepe noktasını boyamak için gerekli olan en az renk sayısını ifade eder ve eğer $\chi(G)$=k ise, k-kromatik olarak ifade edilir. Buna karşılık, $\chi(G)$= min k ise burada k-kromatik mevcut değildir. Ancak $\chi(G) \leq$ k ise, G grafı en az k tane renge boyanır. (Diestel, 2000).

Bir grafın kromatik sayısını belirlemek için genel bir formül yoktur. Bunun için bazı özel grafların kromatik sayısını veya bir grafın boyanması için gerekli olan renk sayısının alt ve/veya üst sınırlarını belirlememiz gerekmektedir.

Bir G grafının kromatik sayısının üst sınırını belirlerken, G grafının $\chi(G) \leq$ k olduğunu göstermemiz gerekmektedir. G grafının kromatik sayısının alt sınırını belirlerken de $\chi(G) \geq$ k olduğunu göstermemiz gerekmektedir. (Bacak,2004). Yani 4 tepeden oluşan bir çevre grafı göz önüne alalım. Bu grafın kromatik sayısı 2'dir. Fakat en büyük renge karşılık gelen sayıyı bir yükselttiğimiz takdirde yeni bir üst sınır olan 3'ü elde ederiz. Benzer şekilde 2 renkten 1 rengi kabul edersek, tek rengin de bu çevre graf için alt sınır olduğunu görürüz.



Şekil 4.7 G grafının kromatik sayısının üst sınırının gösterimi

Teorem 4.1. G ve H bir graf olsun. Eğer H grafı, G grafının bir alt grafı ise

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

dir (Chartrand and Zhang, 2009)

Teorem 4.2. Brooks Teoremi

G birleştirilmiş basit bir graf olsun. G grafı, tepe sayısı tek olan çevre graftan ve tam graftan farklı olmak üzere

$$\chi(\mathrm{G}) \leq \Delta(G)$$

dir. (Chartrand and Zhang, 2009).

4.1. Tepe Boyama Algoritmaları

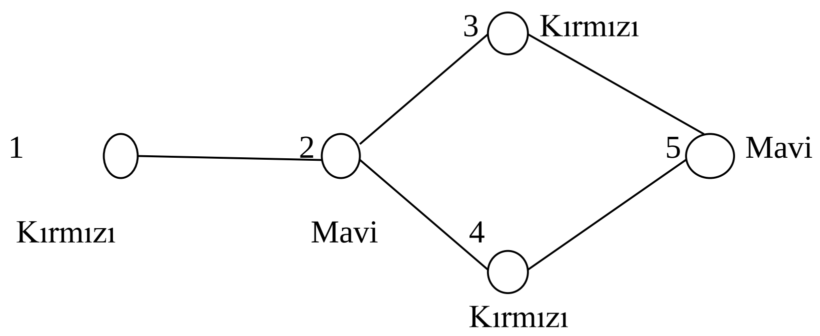
Tepe boyama için değişik algoritmalar geliştirilmiştir. Bunlardan bazılarına aşağıda yer verilmiştir.

4.1.1. Tepe boyama algoritması

1. adım: Bir tepeyi seç ve bir renk ver.

2. adım: Komşu olan tepelere farklı renkleri, komşu olmayan tepelere mümkün olduğunca aynı renkleri ver.

3. adım: İşlemleri bütün tepeler için tekrarla.



Şekil 4.8 Tepe boyama algoritması

Şekil 4.2.1’de graf için bir boyama örneği verilmiştir. Öncelikle 1 numaralı tepeden başlayarak kırmızı renk, ona komşu olmayan 3 ve 4 numaralı tepelere yine kırmızı renk, birbirine komşu olmayan 2 ve 5 numaralı tepelere ise mavi renk verilmiştir. Böylece 2 renk kullanılarak tepeler boyanmıştır.

4.1.2. Greddy algoritması

Bu algoritmaların temel prensibi, algoritmanın üzerinde çalışacağı elemanları bir kritere göre sıralamak ve sıra ile deneyerek en sonunda en optimum çözümü elde etmektir.

1. Adım: Bir G grafı ve renklerin bir listesini hazırla.

2. Adım: Tepelere a, b, c,… harflerini ver.

3.Adım: İlk tepeyi belirle. Belirlediğimiz bu ilk tepe, alfabetik sıralamada ilk önce gelen harfle işaretlenmiş olsun ve bu tepeyi, bitişik tepelerle aynı renkte olmayacak şekilde renk listesindeki ilk renkle boya.

4. Adım: Tüm tepeler boyanana kadar 3. Adımı tekrarla

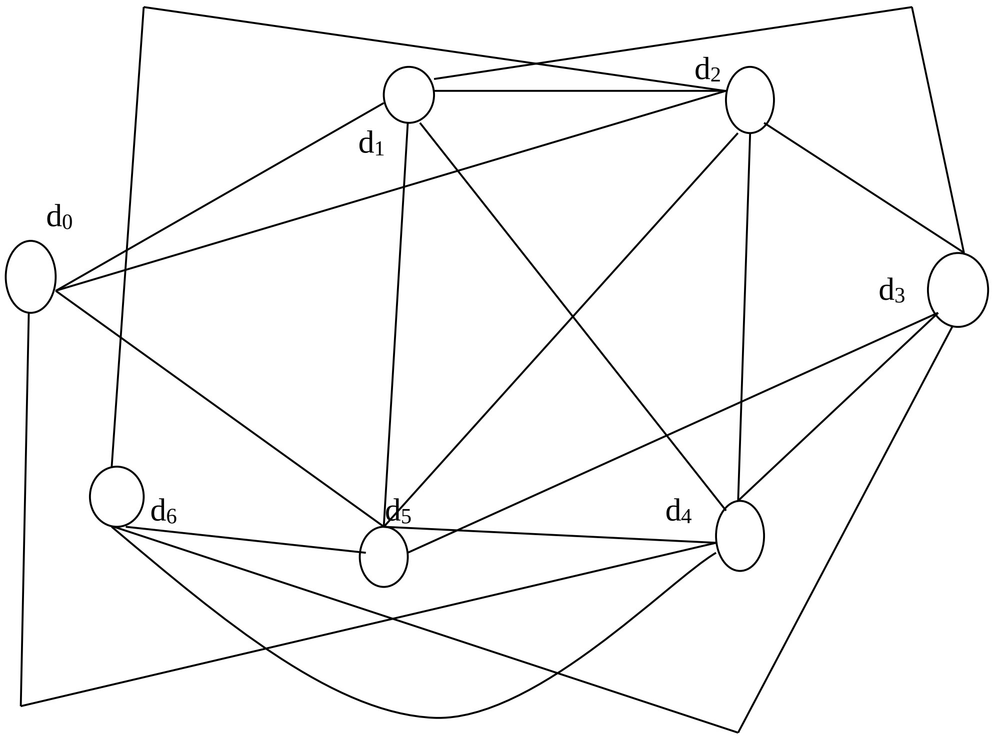
5. Adım: Son (Yorgancıoğlu, 2004).

4.1.3. Welch ve Powel algoritması

1. Adım: Tepeler derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır.

2. Adım: Renklere 1, 2, 3, … şeklinde numara verilir ve bir numaralı renk, birinci sıradaki tepeye atanır. Daha sonra aynı renk numarası komşuluk matrisinde komşu olmayan diğer tepeye verilir.

3. Adım: Renk numarası bir artırılır ve bu numara daha önce renk ataması yapılmamış tepelerden derecesi en büyük olana verilir ve 2. Adım diğer tüm tepeler için tekrarlanır (Çölkesen, 2004).



Şekil 4.9 Graf boyama

	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	Derece
d_0	0	1	1	0	1	1	0	4
d_1	1	0	1	1	1	1	0	5
d_2	1	1	0	1	1	1	1	6
d_3	0	1	1	0	1	1	1	5
d_4	1	1	1	1	0	1	1	6
d_5	1	1	1	1	1	0	1	6
d_6	0	0	1	1	1	1	0	4

Şekil 4.10 Komşuluk matrisi

Yukarıdaki algoritmayı bu örneğe uygularsak;

1. Adım: Tepeler derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır.

Tepe	Derece
d_2	6
d_4	6
d_5	6
d_1	5
d_3	5
d_0	4
d_6	4

2. Adım: Sırası ile renk numarası ataması yapalım. d_2'ye 1 numaralı rengi atayalım. Komşuluk matrisinde d_2 ile komşu olmayan yoktur, bu nedenle sıradaki diğer tepeye geçiyoruz. d_4 tepesine sıradaki numara olan 2 numaralı rengi atıyoruz. Komşu olmayan tepe yok bu nedenle diğer tepeye geçiyoruz. d_5'e 3 numaralı rengi atıyoruz. d_5 ile de komşu olmayan tepe yoktur. Sıradaki tepe olan d_1'e 4 numaralı rengi atıyoruz ve matrise baktığımızda d_1'in d_6 ile komşu olmadığı görülmektedir. Bu nedenle d_6 ya da 4 numarayı atıyoruz. Hem d_1 ve hem de d_6 ile komşu olmayan var mı diye matrise bakıyoruz. İkisine de aynı anda komşu olmayan tepe yok bu nedenle sıradaki tepe olan d_3'e 5 numaralı rengi atıyoruz. d_3'e komşu olmayan ve renk atanmamış bir tepe var mı diye bakıyoruz. Burada d_0'ın d_3'e komşu olmadığını ve aynı zamanda da d_0'a renk atanmadığını görüyoruz. Bu nedenle d_0'a da 5 numaralı rengi atıyoruz. d_0 tepesine de renk atanması yapıldığında, renk atanmayan tepe kalmıyor ve renk atama işini bitiriyoruz. Böylece algoritmamız tamamlanmış oluyor (Çölkesen, 2004)

4.2. Tepe Boyamanın Uygulama Alanları

Günümüzde tepe boyama problemi ile birçok sorun çözülebilmektedir. Örneğin bir şirket, bünyesinde bulunan komitelerin toplantı saatlerinin ayarlanmasında tepe boyama yönteminden yararlanır. Şöyle ki, bir şirkette belli bir sayıda komite olsun ve bu komitelerin toplantı saatlerinin ayarlanması gerekmektedir. Ancak bu şirkette çalışan bazı kişiler birden fazla komitede üye iseler, o zaman komitelerin toplantılarını farklı zaman dilimlerine yerleştirilmesi gerekmektedir. Bu durumda tepe boyamadan yararlanılır (Casselgren, 2011).

Aynı zamanda radyo frekanslarının atanmasında da tepe boyama yöntemi kullanılır. Bir dizi radyo vericisi düşündüğümüzde, bunların her birine çalışma frekansı verilmesi gerekmektedir. Sonradan birbirine müdahale etme potansiyeline sahip iki radyo vericisi yakın frekansa atanmış olabilir. Böyle olunca da radyo vericileri için mümkün olduğunca az frekans kullanılmak istenilir. Biz bu durumu bir tepe boyama problemi olarak modellenebilir.

Tepe boyama uçakların havaalanlarına inebilmeleri problemine de çözüm olmaktadır. Şöyle ki uçaklar inecekleri havaalanlarına yaklaştıklarında hava trafik kontrol sistemi, iniş saatini beklemeleri için uçaklara birer yükseklik tayin etmektedir. Eğer iki uçağın varış aralıkları çakışırsa, bu iki uçak aynı yüksekliği kullanamazlar. Uçakların uçabilecekleri yüksekliklerde sınırlıdır bu nedenle bu yüksekliklerin en etkili şekilde kullanılarak uçaklara paylaştırılması gerekmektedir. Böylece çözülmesi gereken bir problem ortaya çıkmaktadır. Bu problem de tepe boyama yöntemi ile kolaylıkla çözülebilmektedir (Malaguti, 2006).

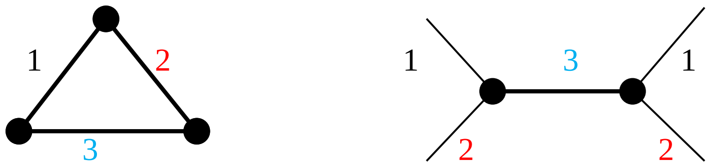
Yukarıdaki örneklerde olduğu gibi bir yere yanıcı kimyasalların yerleştirilmesi, üniversitelerin sınav programlarının hazırlanması, bir okulun ders programlarının hazırlanması, trafik ışıklarının düzenlenmesi, metal endüstrisinde kullanılan metallerin ısıtma sürelerini en aza indirgeyebilmek için hangi metallerin birlikte ısıtılabileceği gibi durumlarda tepe boyama problemi kullanılarak bu problemler kolaylıkla çözülebilmektedir (Gross, 2010).

5. AYRIT BOYAMA

Bir G grafının birbirine bitişik olan (ortak bir tepeye sahip olan) iki ayrıtının farklı renkte olacak şekilde boyanmasına ayrıt boyama (edge coloring) denir (Hartsfield – Ringel, 1990) .

Bir G grafında k tane renge sahip olan bir kümenin tüm renkleri, ayrıt boyamada kullanılır ise, G grafının ayrıtlarıı k tane renge boyanır. Bir G grafının k tane renge boyanabilen ayrıt boyaması fonksiyon şeklinde tanımlanır. Şöyleki, G grafının birbirine bitişik ayrıtları olan e ve f ayrıtları ki bunlar $c(e) \neq c(f)$ ise, $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$ dir. Yani G grafının bitişik ayrıtları aynı renk olmamak koşulu ile k tane renge boyanabiliyorsa bu garf k tane renge boyanır (Chartrand-Zhang, 2009).

Teorem 5.1: G bir graf olsun, G grafının uygun ayrıt boyaması için gerekli olan renklerin sayısı ya G grafının maksimum tepe derecesine eşit ya da tepe derecesinden büyüktür (Hartsfield-Ringel, 1990).



Şekil 5.1 Ayrıt boyama

Bir G grafının maksimum tepe derecesi $\Delta(G)$ şeklinde ifade edilir ve $\Delta(G) \leq \chi'(G)$ dir. Ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısı maksimum tepe derecesine eşit veya maksimum tepe derecesinden büyüktür. Anlattığımız bu durum gösteriyor ki bir grafta her tepenin ayrıtlarına farklı renkler atanmalıdır (Nakano-

Zhou- Nishizeki, 1995). Bir grafın ayrıt boyaması için gerekli en az renk sayısında graftaki maksimum tepe derecesi alt sınır olur.

Eğer bir G grafının ayrıtları, iki bitişik ayrıtı aynı renkte olmayacak şekilde k tane renk kullanılarak boyanmış ise, G grafı k-ayrıt boyanır (Wilson, 1985).

Tanım 5.1: Ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısına da kromatik index veya ayrıt kromatik sayısı (edge chromatic number) denir ve $\chi'(G)$ şeklinde gösterilir (Chartrand-Zhang, 2009).

Çok ayrıtlı graflarda, $\chi'(G)= k$ ise grafın ayrıtları en az k tane renge boyanır. Yani ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısı k'ya eşit ise bu durumda G grafının ayrıtları k tane renge boyanır.

Bir yol grafta,

$$n \geq 3 \text{ için} \quad \chi'(P_n) = 2 \quad \text{dir.}$$

Bir çevre grafta,

$$\chi'(C_n) = \begin{matrix} 3, & n \text{ tek} \\ 2, & n \text{ çift} \end{matrix}$$

Bir ağaç grafta,

Herhangi bir T ağaç grafı için, $\chi'(T) = \Delta(G)$ dir.

Bir tekerlek grafta,

$$n \geq 4 \quad \text{için} \quad \chi'(W_{1,n}) = n-1 \text{ dir.}$$

Bir tam grafta,

$$n \text{ çift sayı ise} \quad \chi'(K_n) = n-1$$

$$n \text{ tek sayı ise} \quad \chi'(K_n) = n \text{ dir}$$ (Beşeri, 2004).

Teorem 5.2: König Teoremi

G iki parçalı bir graf olsun. Bu durumda

$$\Delta(G) = \chi'(G)$$

dir (Chartrand-Zhang, 2009).

Yani ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısı, maksimum tepe derecesine eşittir.

Teorem 5.3: Vizing Teoremi

G basit bir graf olsun. Bu durumda

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

dir (Diestel, 1985).

Yani maksimum tepe derecesi ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısından küçük ya da ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısına eşittir. Ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısı da maksimum tepe derecesinin bir fazlasına eşit ya da maksimum tepe derecesinin bir fazlasından küçüktür.

Teorem 5.4: Shannon Teoremi

G basit bir graf olsun. Bu durumda

$$\Delta(G) \text{ çift ise} \quad \chi'(G) \leq \frac{3\,\Delta(G)}{2}$$

$$\Delta(G) \text{ tek ise} \quad \chi'(G) \leq \frac{3\,\Delta(G)-1}{2}$$

dir (Chartrand-Zhang, 2009).

Teorem 5.5: G bir graf olsun

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq 2\,\Delta(G) - 1$$

dir (Hartsfield-Nora, 1990).

Teorem 5.6: Her küp şeklindeki haritaların boyanması için varolan bir G grafında, dört renk teoremi kullanılarak ülkelerin boyanması için de gerekli en az renk sayısı 3'e eşittir. Yani $\chi'(G)= 3$'dür. (Wilson, 1985).

5.1. Ayrıt Boyama Algoritmaları

5.1.1. Greddy algoritması

Bu algoritmaların temel prensibi, algoritmanın üzerinde çalışacağı elemanları bir kritere göre sıralamak ve sıra ile deneyerek en sonunda en optimum çözümü elde etmektir.

1. Adım: Bir G grafı ve renklerin bir listesini hazırla.

2. Adım: Ayrıtlara a, b, c,… harflerini ver.

3.Adım: İlk ayrıtı belirle. Belirlediğimiz bu ilk ayrıt, alfabetik sıralamada ilk önce gelen harfle işaretlenmiş olsun ve bu ayrıtı, bitişik ayrıtlarla aynı renkte olmayacak şekilde renk listesinde ki ilk renkle boya.

4. Adım:Tüm ayrıtlar boyanana kadar 3. Adımı tekrarla

5. Adım: Son (Yorgancıoğlu, 2004).

5.1.2. Welch ve Powel algoritması

1. Adım: Ayrıtları derecelerine göre büyükten küçüğe doğru sıralanır.

2. Adım: Renklere 1, 2, 3, … şeklinde numara verilir ve bir numaralı renk, birinci sıradaki ayrıta atanır. Daha sonra aynı renk numarası komşuluk matrisinde komşu olmayan diğer ayrıta verilir.

3. Adım: Renk numarası bir artırılır ve bu numara daha önce renk ataması yapılmamış ayrıtlardan derecesi en büyük olana verilir ve 2. Adım diğer tüm ayrıtlar için tekrarlanır (Çölkesen, 2004).

5.1.3. Sıralı ayrıt boyama algoritması

Burada da sıralı tepe boyama algoritmasına benzer bir sıralı ayrıt boyama algoritması vardır.

Tanım: e ayrıtı ile başka bir ayrıtın herhangi bir köşesi kesişiyorsa, bu ayrıt e ayrıtının komşusudur.

Giriş: G grafının ayrıtları e_1, e_2 ,..., e_p. şeklinde listelenir.

Çıkış: Pozitif tamsayılar, uygun ayrıt boyama için i= 1,...,p şeklinde yazılır.

$f(e_i)$= Listelenmiş olan ayrıtlardan en küçük numaralı ayrıta, kullanılmamış en küçük renk sayısı verilir.

f ayrıt boyamaya geri dönülür (Gross, 2010).

5.2. Ayrıt Boyamanın Uygulama Alanları

Ayrıt boyama günümüzde birçok problemin çözümünde başvurulan bir yöntemdir. Ayrıt boyama yöntemi çalışma listelerini hazırlamak için yararlı bir graf boyama yöntemidir. Ayrıca bir okuldaki veli toplantısını düzenlemek için de ayrıt boyama yönteminden yararlanılır. Şöyleki veli toplantısında her velinin öğretmenlerle eşit sürelerde görüşme yapması istenmektedir. Ayrıca, okul yönetimi de kolaylık sağlaması bakımından, toplantı da her velinin sadece bir öğretmenle görüşme yapmasını istiyor. Bu görüşmede de başka bir velinin olması istenmemektedir. Grafta bu karışıklığı önlemek için kişiler tepe ve gerekli toplantılar da ayrıt olarak ifade edilebilir. Sonrada hem tepelere hem de ayrıtlara 1, 2, 3,…, renkleri atanır. Böylece bu problem graf teorisi kullanılarak çözüme ulaşır

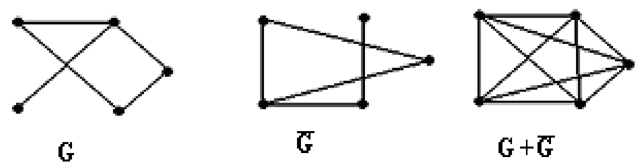
Ayrıt boyama yöntemi kullanılarak alışveriş merkezlerinde çalışma saatlerinin düzenlenmesi problemlerine de çözüm bulunabilmektedir. Bir alışveriş merkezinde p_1 den $\ldots p_m$' ye kadar yani m kadar çalışan ve j_1 den $\ldots j_n$' e kadar n kadar iş vardır. Alışveriş merkezindeki bu çalışma çizelgesi oluşturma probleminin çözümünde de ayrıt boyama yöntemi kullanılır. (Casselgren, 2011)

Yukarıdaki problemlerin çözülmesinde olduğu gibi yine birçok problemin çözülmesinde de ayrıt boyama yönteminden yararlanılmaktadır.

6. GRAF İŞLEMLERİ ÜZERİNDE TEPE VE AYRIT BOYAMASI

6.1. Graf İşlemleri

Tanım 6.1.1. Bir Grafın Tümleyeni: G grafının tümleyeni, G ile aynı tepe kümesine sahip ancak ayrıt kümesi G' de olmayan ayrıtları içeren graftır. $\overline{G}$ ile gösterilir. n tepeli bir G grafında $G+\overline{G}$ toplamı bir tam graftır (Dizman, 2007).



Şekil 6.1 Grafın tümleyeni

Tanım 6.1.2: Graflarda Birleşim İşlemi: G_1 ve G_2 graflarının birleşimi, V_1 ve V_2 ayrık tepe kümeleri, E_1ve E_2 tepe kümeleri olmak üzere $V = V_1 \cup V_2$ ve $E = E_1 \cup E_2$ birleşimlerinden oluşan $G = G_1 \cup G_2$ grafıdır. G_1 ve G_2 ' nin tepe sayıları m ve n ise elde edilen grafın tepe sayısı m+n dir. G_1 ve G_2 nin ayrıt sayıları $q_1$ve q_2 ise oluşan grafın ayrıt sayısı $q_1 + q_2$tanedir (Deo, 1974).

Tanım 6.1.3: Graflarda Toplama İşlemi: G_1 ve G_2 , m ve n tepeli iki graf olsun. G_1'in her bir tepesinin G_2'nin her bir tepesine bir ayrıtla birleştirilmesiyle elde edilen grafa G_1 ve G_2 graflarının toplamı denir. G_1+G_2 ile gösterilir. Elde edilen graf m+n tepelidir. G_1' in ayrıtlarının sayısı q_1, G_2' nin ayrıtlarının sayısı q_2 ise G_1+G_2' nin ayrıtlarının sayısı $q_1 + q_2 + m \times n$ olur. (Dizman, 2007).

G_1 G_2 G_1+G_2

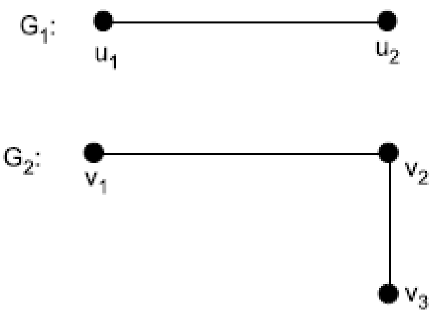
Şekil 6.2 Graflarda toplama işlemi

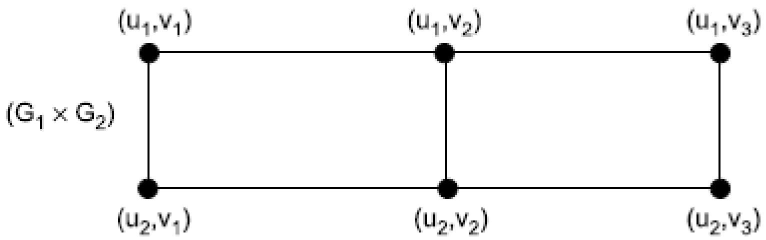
Tanım 6.1.4: Grafların Çarpım İşlemi: Grafların çarpımı: G_1= (V_1, E_1) ve G_2= (V_2, E_2) iki graf olsun. G_1ve G_2 graflarının çarpımı G_1 x G_2 şeklinde yazılır ve ($G_1 \times G_2$)= (V, E), V= $V_1 \times V_2$ ve E ayrıtlarının kümesi aşağıdaki bağıntılardan hesaplanır: (a,b) ve (c,d) tepeleri $G_1 \times G_2$ grafının herhangi iki tepesi ise bu iki tepe arasında aşağıdaki bağıntılardan birisi varsa ikisi arasında bir ayrıt vardır:

i. a=c ve b ile d komşu ise

ii. a ile c komşu ve b=d

G_1’ in tepe sayısı m ve G_2’ nin tepe sayısı n ise $G_1 \times G_2$ grafının tepe sayısı $m \times n$ dir. G_1 grafının ayrıtlarının sayısı q_1 ve G_2 grafının ayrıtlarının sayısı q_2 ise $G_1 \times G_2$ grafının ayrıtlarının sayısı $mq_2 + nq_1$ dir (Dizman, 2007)

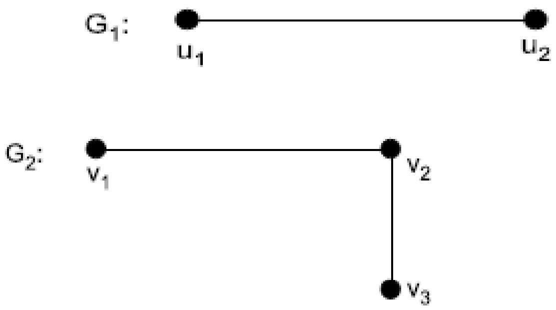


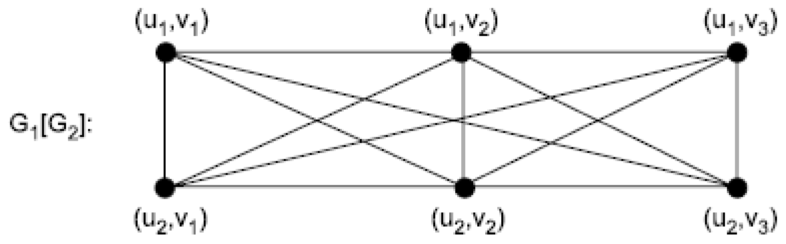


Şekil 6.3 Grafların Çarpım İşlemi

Tanım 6.1.5: Graflarda Bileşke İşlemi: G_1 ve G_2 graflarından bileşke işlemi ile elde edilen graf $G_1[G_2]$ ile gösterilir. G_1' in tepeler kümesi V_1, G_2' nin tepeler kümesi V_2 ise $G_1[G_2]$' nin tepeler kümesi V_1 ve V_2' nin kartezyen çarpımı olur. Bu işlemde ayrıtlar şu şekilde belirlenir. $G_1[G_2]$' nin herhangi iki tepesi u = (u_1 , u_2) ve v = (v_1 , v_2) olsun. Eğer u_1 ve v_1 komşu ise veya $u_1 = v_1$ ve u_2 , v_2 ile komşu ise u ve v tepeleri bir ayrıtla bitiştirilir.

G_1 grafının tepe sayısı m, G_2 grafının tepe sayısı n ise $G_1[G_2]$ grafının tepe sayısı m.n dir. G_1 grafının ayrıtlarının sayısı q_1 ve G_2 grafının ayrıtlarının sayısı q_2 ise $G_1[G_2]$ grafının ayrıtlarının sayısı $mq_2 + n^2q_1$ dir (Dizman, 2007).



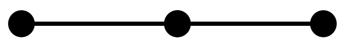


Şekil 6.4 Graflarda bileşke işlemi

6.2. Bazı Temel Graflarda Graf İşlemleri ve Elde Edilen Grafların Boyanmasının Örneklerle İncelenmesi

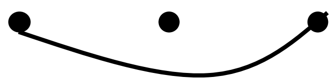
Örnek 6.2.1. (Yol grafın tümleyeninin tepe boyaması)

3 tepeli bir yol graf alındığında,

P_3 : 

Şekil 6.5 3 tepeli yol graf

şeklinde gösterilir ve $\chi(P_3)= 2$ dir. Yani 3 tepeli bir yol graf en az iki renk ile boyanabilir.

$(\overline{P_3})$ = 

Şekil 6.6 3 tepeli yol grafın tümleyeni

$\chi(\overline{P_3})= 2$. Yani ortaya çıkan grafta yine en az 2 renge boyanabilir.

4 tepeli bir yol graf aldığımızda,

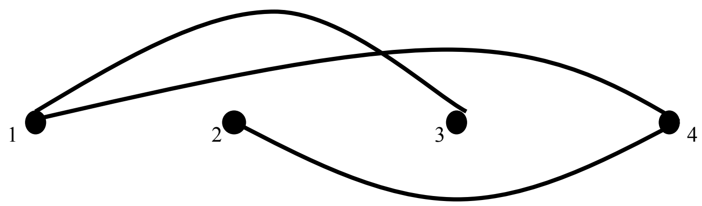
P_4 : 

dir.

Şekil 6.7 4 tepeli yol graf

$\chi(P_4)= 2$’dir.

Bu grafın tümleyeni $\chi(\overline{P_4})$: 2 dir.



Şekil 6.8 4 tepeli yol grafın tümleyeni

Bir grafta bitişik olan iki tepe farklı renkte olacak şekilde boyanmasına tepe boyama denir. Ayrıca kromatik sayıda bir tepe boyama için gerekli en az renk sayısını ifade ettiğini önceki bölümlerde belirtmiştik. Ortaya çıkan bu grafın tümleyeninin kromatik sayısı da $\chi(\overline{P_4})$= 2'dir.

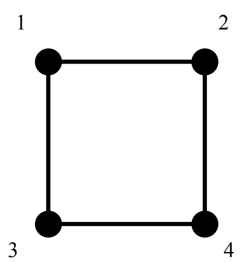
Bir yol grafta $\chi(P_4)= \chi(\overline{P_4})$= 2'dir.

Örnek 6.2.2. (Çevre grafın tümleyeninin tepe boyaması)

Çevre grafta

$$\chi(C_p) = \begin{cases} 2, & p - çift \\ 3, & p - tek \end{cases}$$

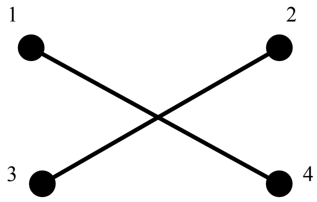
Çevre grafı 4 tepeli olarak kabul edersek, ortaya çıkacak graf aşağıdaki gibi olur.



Şekil 6.9 4 tepeli çevre graf

Bu grafımızın kromatik sayısı ise 2’dir.

Bu grafın tümleyeni ise, aşağıdaki şekilde olur.



Şekil 6.10 (C_4) grafının tümleyeni

Yeni oluşan grafın tümleyeninin kromatik sayısı ise yine 2’dir. Bu durumda $\chi(C_4) = \chi(\overline{C_4}) = 2$’dir.

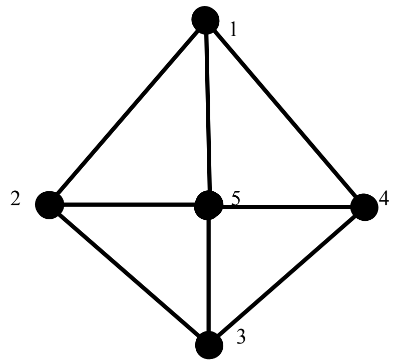
Örnek 6.2.3. (Tekerlek grafın tümleyeninin tepe boyaması)

$W_{1,n}$ bir tekerlek graf olsun. O zaman

$$\chi(W_{1,n}) = \begin{cases} 3, & n, \text{ tek} \\ 4, & n, \text{ çift} \end{cases}$$

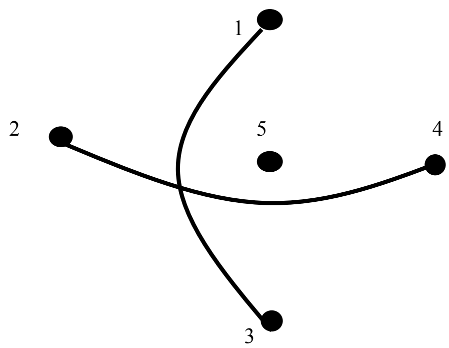
Yani bir tekerlek grafın tepe sayısı tek sayı ise bu graf en az 3 renge boyanabilirken, tepe sayısı çift olan tekerlek graf en az dört renge boyanabilir.

Grafımız 5 tepeli bir tekerlek graftır. Bu grafın kromatik sayısı da $\chi(W_{1,4})=$ 3’tür. Yani grafımız en az 3 renk ile boyanabilir.



Şekil 6.11 $(W_{1,4})$= 5 tepeli bir tekerlek graf

Bu $(W_{1,4})$= 5 tepeli tekerlek grafımıza tümleyen işlemi uygulandığında ortaya çıkan yeni graf $(\overline{W_{1,4}})$:



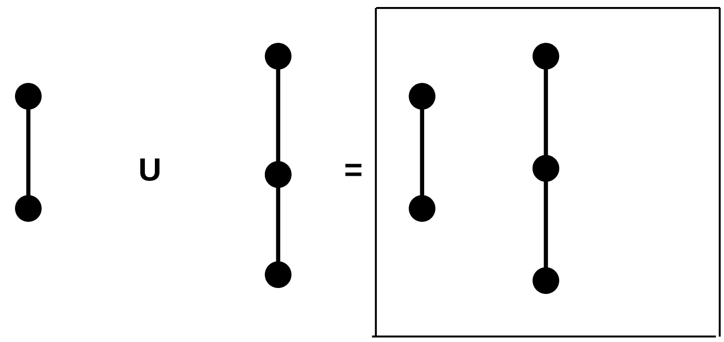
Şekil 6.12 $(W_{1,4})$ grafının tümleyeni

Ortaya çıkan bu grafın tümleyeninin, kromatik sayısı ise $\chi(\overline{W_{1,4}})$= 2’dir. Yani en az iki renge boyanabilir.

Bu durumda $\chi(W_{1,4}) \neq \chi(\overline{W_{1,4}})$’dir.

Örnek 6.2.4. (Yol graflarda birleşme işleminin tepe boyaması)

P_2 2 tepeli bir yol graf, P_3 ise 3 tepeli bir yol graftır. Bu iki grafın birleşimi aşağıdaki gibi olur.



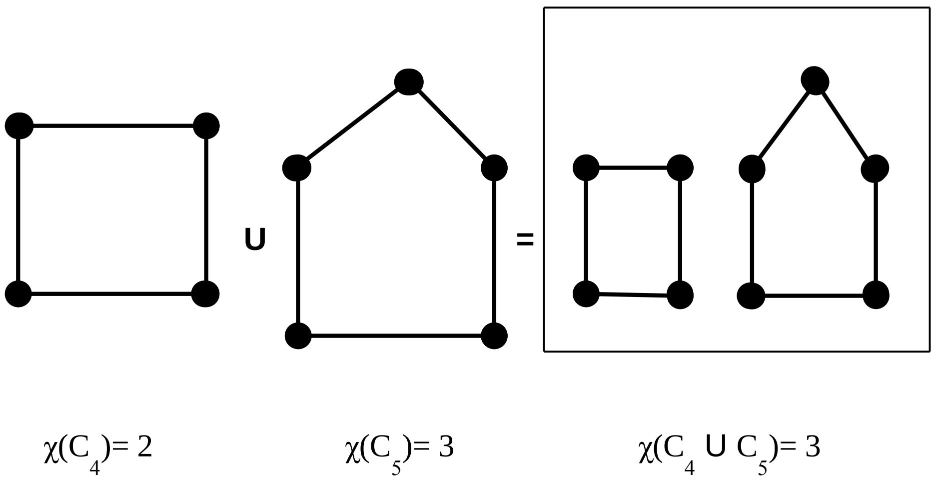
P_2 P_3 $P_2 \cup P_3$

$\chi(P_2)= 2$ $\chi(P_3)=2$ dir. $\chi(P_2 \cup P_3)= 2$ olacaktır.

Şekil 6.13 İki yol grafın birleşimi

Örnek 6.2.5. (Çevre graflarda birleşme işleminin tepe boyaması)

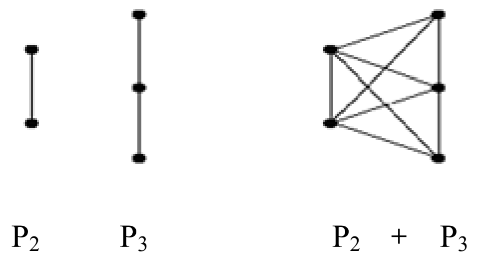
C_4 4 tepeli bir çevre graf, C_5 ise 5 tepeli bir çevre graftır. Bu iki grafın birleşimi aşağıdaki gibi olur.



Şekil 6.14 İki çevre grafın birleşimi

Örnek 6.2.6. (Yol graflarda toplama işleminin tepe boyaması)

P_2 ve P_3 birer yol graf olsun. P_2 2 ve P_3 de 3 tepeli bir yol graftır. Bu iki grafın toplanması şu şekilde olacaktır. Öncelikle iki yol grafın toplanması halinde oluşacak yeni graf $P_2+ P_3$ şeklinde gösterilir. Tanım 6.1.4 'den hareket edersek, yeni oluşan bu graf 2+3=5 tepeli bir graf olacaktır. Aynı şekilde P_2 grafının ayrıt sayısı 1, P_3 grafının ayrıt sayısı da 2 olacaktır. Bu iki grafın toplanması halinde oluşacak yeni grafın ayrıt sayısı da (1+2)+ (2×3)=9 olacaktır.



Şekil 6.15 İki yol grafın toplanması sonucu oluşan yeni grafın kromatik sayısı

Bir n tepeli Yol Grafın kromatik sayısı $\chi(P_a)$= 2'dir. Buradan hareketle P_2 grafı en az 2 renge boyanabilirken, P_3 grafı da en az 2 renge boyanabilir. P_2 ve P_3

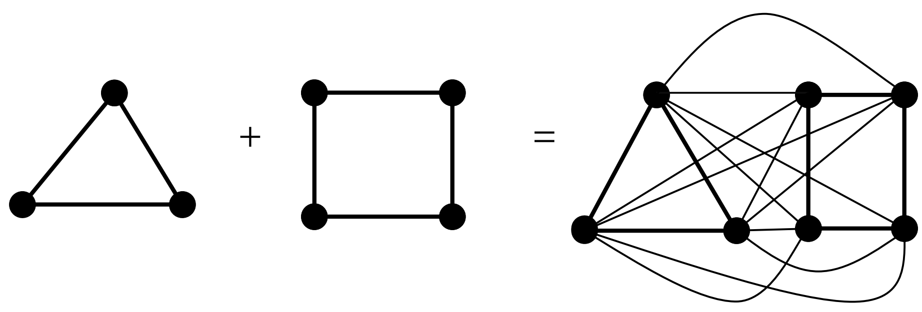
graflarının toplanması sonucu oluşan yeni grafın kromatik sayısı ise, 4’dür. Çünkü bir grafta bitişik olan iki tepe farklı renkte olacak şekilde boyanmasına tepe boyama denir. Ayrıca kromatik sayıda bir tepe boyama için gerekli en az renk sayısını ifade ettiğini yukarıda belirtmiştik. Buradan hareketle de P_2+ P_3 grafının kromatik sayısı da $\chi(P_2+ P_3)= 4$ olacaktır.

Tanım 6.2.1: Bir G grafı ve H grafının toplanması halinde yeni grafın kromatik sayısı

$\chi(G + H) = \chi(G) + \chi(H)$ dir. (Gross-Yellen, 1999)

Örnek 6.2.7. (Çevre graflarda toplama işleminin tepe boyaması)

C_3ve C_4 birer çevre graf olsun. C_3’ü 3 ve C_4’i de 4 tepeli bir çevre graftır. Bu iki grafın toplanması şu şekilde olacaktır. Öncelikle iki çevre grafın toplanması halinde oluşacak yeni graf C_3+ C_4 şeklinde gösterilir. Tanım 6.1.4 ‘den hareket edersek, yeni oluşan bu graf 3+4=7 tepeli bir graf olacaktır. Aynı şekilde C_3 grafının ayrıt sayısı 3, C_4 grafının ayrıt sayısı da 4 olacaktır. Bu iki grafın toplanması halinde oluşacak yeni grafın ayrıt sayısı da (3+4)+ (3×4)= 19 olacaktır.



C_3 C_4 C_3+ C_4

Şekil 6.5 Çevre grafların toplanması

Çevre grafların kromatik sayısı hesaplanırken, grafın tepe sayısı tek sayı ise kromatik sayı 3, tepe sayısı çift sayı ise kromatik sayısı 2'dir. C_3 grafı 3 tepeli bir çevre graf olduğu için kromatik sayısı $\chi(C_3)$= 3'dür. Buradan hareketle C_3 grafı en az 3 renge boyanabilir. C_4 grafı da 4 tepeli bir çevre graf olduğu için kromatik sayısı $\chi(C_4)$= 2'dir. C_3 ve C_4 graflarının toplanması sonucu oluşan yeni grafın kromatik sayısı ise $\chi(C_3+C_4)$= 5'dir.

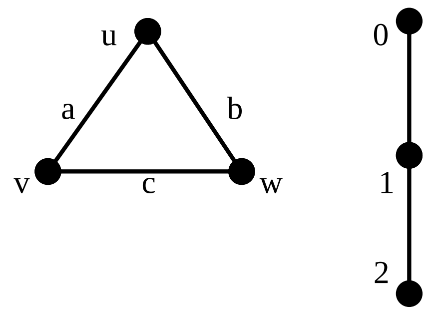
Örnek 6.2.8. (Yol graflarda çarpma işleminin tepe boyaması)

K_3 3 tepeli bir tam graf P_3 3 tepeli bir yol graftır. Bu iki grafın çarpımı şu şekilde olacaktır.

Öncelikle bu iki grafın tepe noktalarının çarpımı $V_{K\times P} = V_K \times V_P$ dir.

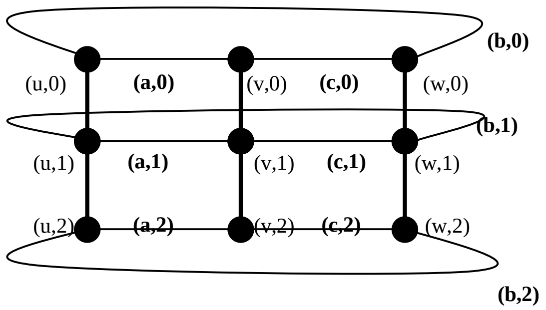
İki grafın çarpımının ayrıt birleşimleri ise,

$E_{K\times P} = (V_K \times E_P) \cup (E_K \times V_P)$ dir.



$\chi(K_3)$= 3 $\chi(P_3)$= 2

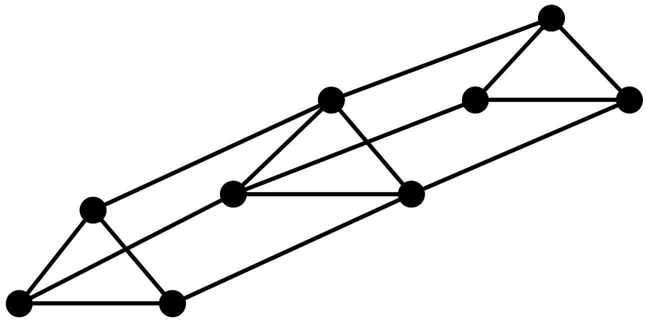
Şekil 6.17 Tam graf ve yol graf



Şekil 6.18 $K_3 \times P_3$ graflarının çarpımının etiketlenmesi

K_3 ve P_3 graflarının çarpımı sonucunda oluşacak yeni grafın tepe sayısı K_3 tam grafının tepe sayısı ile P_3 yol grafın tepe sayılarının çarpımı sonucu bulunur. Bu durumda yeni oluşacak yeni grafın tepe sayısı Tanım 6.1.5'den hareketle 3×3= 9 olur.

Ayrıca yeni oluşacak bu grafın ayrıt sayısı ise Tanım 6.1.5'den hareketle (3×2)+(3×3)= 15 olur.

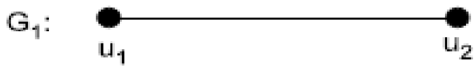


Şekil 6.19 $K_3 \times P_3$ gösterimi

$K_3 \times P_3$ sonucunda oluşan grafın kromatik sayısı $\chi(K_3 \times P_3)$= 3'dür.

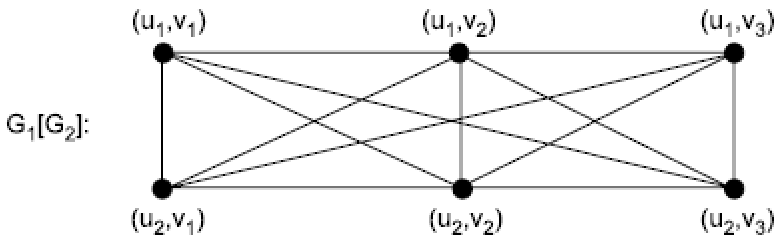
Örnek 6.2.9. (Graflarda bileşke işleminin tepe boyaması)

G_1 ve G_2 graflarını alalım. Bu iki grafa bileşke işlemini uyguladığımızda ortaya çıkacak yeni graf aşağıdaki gibi olacaktır.



$\chi(G_1)= \ 2$

$\chi(G_2)= 2$

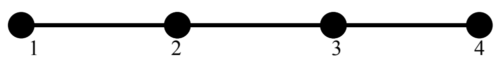


Şekil 6.20 Graflarda Bileşke İşlemi

G_1 grafının kromatik sayısı 2’dir. Yani bu grafın tepeleri en az 2 renge boyanabilir. Aynı şekilde G_2 grafının kromatik sayısı da 2’dir. Buna karşılık bu grafın birleşmesi sonucunda ortaya çıkan yeni grafın kromatik sayısı ise 4 olacaktır.

Örnek 6.2.10. (Yol grafın tümleyeninin ayrıt boyaması)

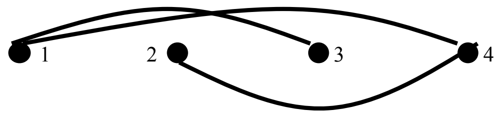
4 tepeli bir yol graf aldığımızda,

P_4 : 

şeklinde gösterilir ve

$\chi‘(P_4)= 2$ olur. Yani 4 tepeli bir yol graf en az iki renk ile boyanabilir.

$\overline{(P_4)}$ =



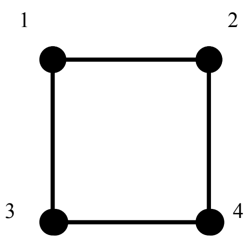
Şekil 6.21 4 ayrıtlı yol grafın tümleyeni

$\chi'(\overline{P_4})$= 2’dir. Yani ortaya çıkan grafın ayrıtları da yine en az 2 renge boyanabilir. Bu durumda $\chi'(P_4) = \chi'(\overline{P_4}) = 2$’dir.

Örnek 6.2.11. (Çevre grafın tümleyeninin ayrıt boyaması)

$$\chi(C_p) = \begin{cases} 2, & p - çift \\ 3, & p - tek \end{cases}$$

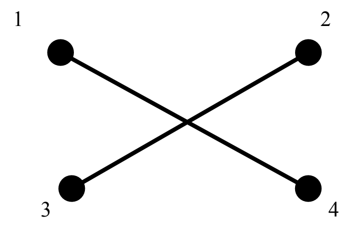
Çevre grafı 4 tepeli olarak kabul edersek, ortaya çıkacak graf aşağıdaki gibi olur.



Şekil 6.22 4 tepeli çevre graf

Bu grafımızın kromatik index’i ise 2’dir. $\chi'(C_n)$ = n çift sayı ise 2’dir. n=4 bu durumda da $\chi'(C_4)$= 2’dir.

Bu grafın tümleyeni ise, aşağıdaki şekilde olur.

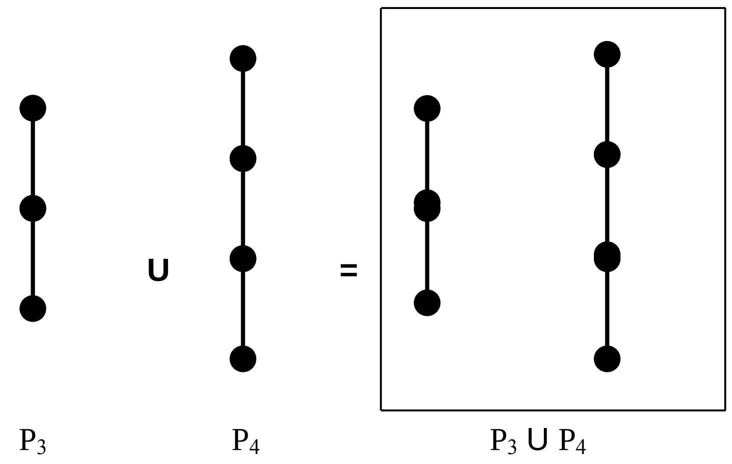


Şekil 6.23 (C_4) grafının tümleyeni

Yeni oluşan grafın tümleyeninin kromatik index’i ise yine 2’dir. Bu durumda $\chi'(C_4) = \chi'(\overline{C_4}) = 2$’dir.

Örnek 6.2.12. (Yol graflarda birleşme işleminin ayrıt boyaması)

P_3 3 tepeli bir yol graf, P_4 ise 4 tepeli bir yol graftır. Bu iki grafın birleşimi aşağıdaki gibi olur.

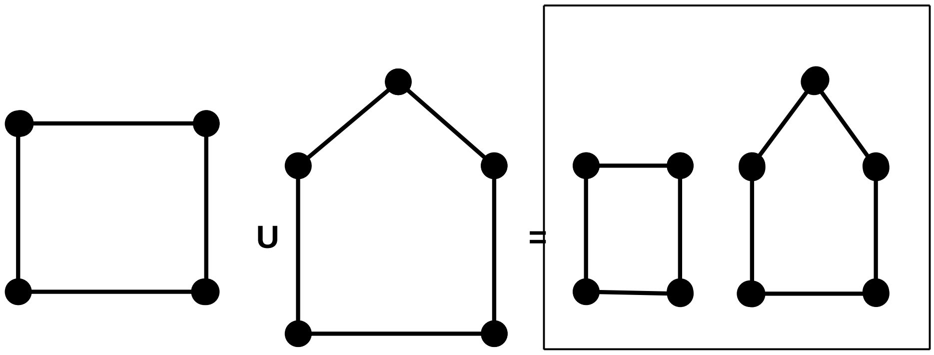


$\chi'(P_3) = 2$ $\chi'(P_4) = 2$ $\chi'(P_3 \cup P_4) = 2$ olacaktır.

Şekil 6.24 İki Yol Grafın Birleşimi

Örnek 6.2.13. (Çevre graflarda birleşme işleminin ayrıt boyaması)

C_4 4 ayrıtlı bir çevre graf, C_5 ise 5 ayrıtlı bir çevre graftır. C_4 grafının ayrıtlarını boyamak için gerekli en az renk sayısı 2'dir. Buna karşılık C_5 grafının ayrıtlarını boyamak için gerekli en az renk sayısı ise 3'dür. Bu iki grafın birleşimi aşağıdaki gibi olur. Ortaya çıkan yeni grafın ayrıtlarını boyamak için gerekli en az renk sayısı ise 3 olur.



$\chi'(C_4) = 2$ $\chi'(C_5) = 3$ $\chi'(C_4 \cup C_5) = 3$

Şekil 6.25 İki Çevre Grafın Birleşimi

Örnek 6.2.14. (Yol graflarda toplama işleminin ayrıt boyaması)

P_2 ve P_3 birer yol graf olsun. P_2'i 2 ve P_3'i de 3 tepeli bir yol graf olarak kabul edelim. Bu iki grafın toplanması şu şekilde olacaktır. Öncelikle iki yol grafın toplanması halinde oluşacak yeni graf $P_2+ P_3$ şeklinde gösterilir. Tanım 6.1.4 'den hareket edersek, yeni oluşan bu graf 2+3=5 tepeli bir graf olacaktır. Aynı şekilde P_2 grafının ayrıt sayısı 1, P_3 grafının ayrıt sayısı da 2 olacaktır. Bu iki grafın toplanması halinde oluşacak yeni grafın ayrıt sayısı da (1+2)+ (2×3)=9 olacaktır.

P_2 P_3 P_2 + P_3

Şekil 6.26 Yol graflarda toplama işleminin ayrıt boyaması

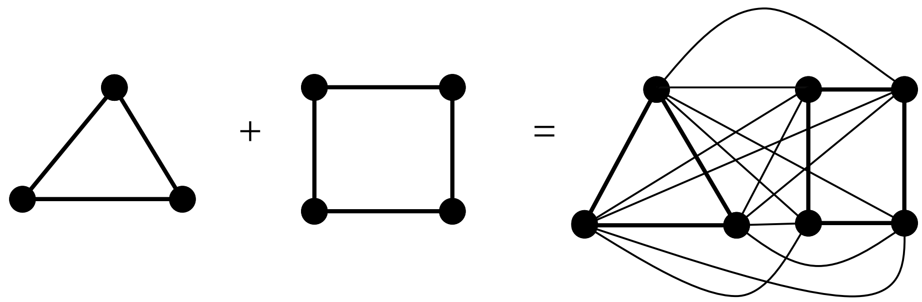
Bir n tepeli Yol Grafın kromatik index'i (P_n)= 2'dir. Buradan hareketle P_2 grafı en az 1 renge boyanabilirken, P_3 grafı da en az 2 renge boyanabilir. P_2 ve P_3 graflarının toplanması sonucu oluşan yeni grafın kromatik index'i ise, 4'dür. Çünkü bir grafta bitişik olan iki ayrıt farklı renkte olacak şekilde boyanmasına ayrıt boyama denir. Ayrıca kromatik index'in bir ayrıt boyama için gerekli en az renk sayısını ifade ettiğini yukarıda belirtmiştik. Bu bilgiler ışığında yeni oluşan grafın ayrıt sayısı 9'dur. Buradan hareketle de P_2+ P_3 grafının kromatik index'i ise

$\chi'(P) = 4$ olacaktır.

Örnek 6.2.15. (Çevre graflarda toplama işleminin ayrıt boyaması)

C_3 ve C_4 birer çevre graftır. C_3 3 ve C_4 ise 4 ayrıtlı bir çevre graftır. Tanım 6.1.4 'den hareket edersek, yeni oluşan bu graf 3+4=7 tepeli bir graf olacaktır. Aynı şekilde C_3 grafının ayrıt sayısı 3, C_4 grafının ayrıt sayısı da 4 olacaktır. Bu iki grafın toplanması halinde oluşacak yeni grafın ayrıt sayısı da (3+4)+ (3×4)= 19 olacaktır. Bu iki grafın toplanması sonucunda ortaya çıkacak graf aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\chi(C_p) = \begin{cases} 2, & p - \text{çift} \\ 3, & p - \text{tek} \end{cases}$$



Şekil 6.27 Çevre grafların toplanması sonucu oluşan grafın ayrıt boyaması

Çevre grafların kromatik index'i hesaplanırken, grafın ayrıt sayısı tek sayı ise kromatik index'i 3, ayrıt sayısı çift sayı ise kromatik index'i 2'dir. C_3 grafı 3 ayrıtlı bir çevre graf olduğu için kromatik index'i $\chi'(C_3)= 3$'dür. Buradan hareketle C_3 grafı en az 3 renge boyanabilir. C_3 grafı da 4 ayrıtlı bir çevre graf olduğu için kromatik index'i $\chi'(C_3)= 2$'dir. C_3 ve C_4 graflarının toplanması sonucu oluşan yeni grafın kromatik index'i ise $\chi'(C_3+ C_4)= 8$'dir.

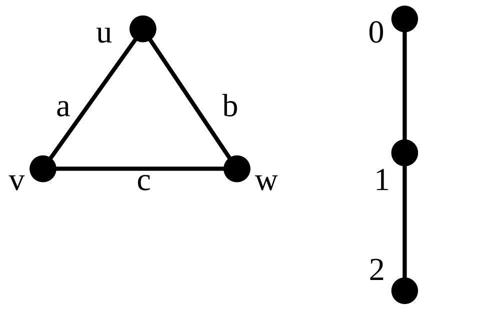
Örnek 6.2.16. (Graflarda çarpma işleminin ayrıt boyaması)

K_3 3 tepeli bir tam graf P_1 3 tepeli bir yol graf olsun. Bu iki grafın çarpımı şu şekilde olacaktır.

Öncelikle bu iki grafın tepe noktalarının çarpımı $V_{K\times P} = V_K \times V_P$ dir.

İki grafın çarpımının ayrıt birleşimleri ise,

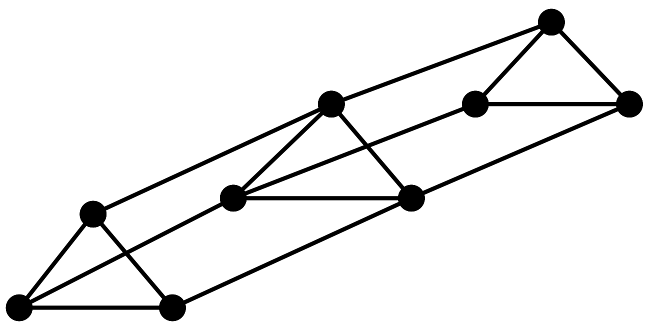
$E_{K\times P} = (V_K \times E_P) \cup (E_K \times V_P)$ dir.



$\chi(K_3)= 2$ $\chi(P_3)= 2$

Şekil 6.28 Tam graf ve yol graf

Yeni oluşan bu grafın ayrıt sayısı ise Tanım 6.1.5'den hareketle $(3\times2)+(3\times3)= 15$ olur.

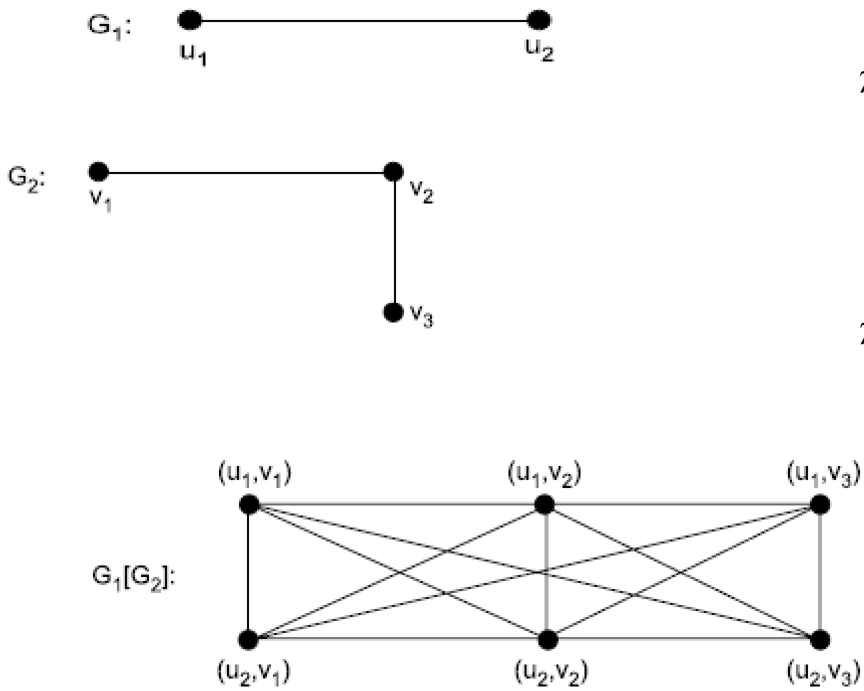


Şekil 6.29 $K_3 \times P_3$ grafının gösterimi

$K_3 \times P_3$ sonucunda oluşan grafın kromatik index'i $\chi'(K_3\times P_3)= 4$ olur.

Örnek 6.2.17. (Graflarda bileşke işleminin ayrıt boyaması)

G_1 ve G_2 graflarını alalım. Bu iki grafa bileşke işlemini uyguladığımızda ortaya çıkacak yeni graf aşağıdaki gibi olacaktır.



$\chi(G_1)= 2$

$\chi(G_2)= 2$

Şekil 6.30 Graflarda bileşke işlemi sonucu oluşan grafın ayrıt boyaması

G_1 grafının kromatik index'i 1'dir. Yani bu grafın ayrıtı en az 1 renge boyanabilir. Aynı şekilde G_2 grafının kromatik index'i de 2'dir. Buna karşılık bu grafın birleşmesi sonucunda ortaya çıkan yeni grafın kromatik index'i ise 5 olacaktır.

SONUÇ

Bu tezde bazı özel graflarda tepe boyama ve ayrıt boyama için gerekli olan en az renk sayısı üzerine bilgi birikimi sağlanmış ve ardından graf işlemleri boyaması üzerine çalışılmıştır.

Grafların tepe ve ayrıt boyaması için gerekli olan en az renk sayısı özel graflardan yararlanılarak hesaplanabilmektedir. Buradan hareketle graf boyama için gerekli olan en az renk sayısı ile graf işlemleri sonucunda ortaya çıkan yeni grafların boyanması için gerekli olan en az renk sayısı hesaplandığında bazı işlemlerde aynı kalmakta bazılarında ise değiştiği ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Arkut, İ., C., 2010, Çizge ve Harita Boyamada Matematiksel Görsellik, Elektrik Mühendisliği Dergisi, Sayı 440, 23-26s.

Arkut, İ., C., 2004, Dört Renk Problemi ve Teoremi, Matematik Dünyası, 86-89s.

Arkut, İ., C., 1993, Ringel'in Eşalan Düzlemsel Kübik Graf Problemi Üzerine, Matematik Dünyası, Sayı 5, 5-9s.

Bacak, G., 2004, Vertex Coloring of a Graph, Graduate School of Engineering and Sciences of Izmir Institute of Technology, 39p (Yayınlanmamış).

Bacak, G. ve Beşeri, T., 2002, Çizge Kuramına Genel Bir Bakış, Matematik Dünyası, Cilt 11, Sayı, 4, 13-18s.

Berkman, A., Doğanaksoy, A. ve Keyman, E., 1991, Dört Renk Problemi, Matematik Dünyası, 7-10s.

Casselgren, C., J., 2011, On Some Graph Coloring Problems, Doctoral Thesis, Department of Mathematicsand Mathematical Statistics Ume˚a University, 22p. (unpublished)

Chartrand G. and Zhang P., 2009, Chromatic Graph Theory, CRC Press, 483p.

Cunningham, D., 2004, Vertex Magic, Electronic Journal of Undergraduate Mathematics, Volume 9: 1-20pp.

Çölkesen, R., 2004, Bilgisayar programlamaya yeni baslayanlar icin programlama sanatı algoritmalar, Papatya Yayınları, 334s.

Deo, Narsingh, 1974, Graph Theory with Application to Engineering and Computer Science, Phindia, 479p.

Dızman, Yıldız, 2007, Network Topolojileri ve Graf Parametreleri, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 46s. (Yayınlanmamış)

Diestel, R., 2000, Graph Theory, Springer-Verlag, 312p.

Doğanaksoy, A., 1993, Graf Teorisi I-II, Matematik Dünyası, 10-16s.

Groos, J. And Yellen, J., 1999, Graph Theory and Its Applications, Crc Press, 576p.

Gutman, I., 2008, The Chemical Formula $CnH2n+2$ and Its Mathematical Background, Volume 11(2), 53-61pp.

Hartsfield, N. And Ringel, G., 1990, Pearlsin Graph Theory: A Comphrenensive İntroduction, Academic Press, 246p.

Nakano, S., Zhou, X. and Nishizeki, T., 1995, Edge Coloring Algorithms, Computer Science Today: Recent Trends and Developments Volume 1000 of Lecture Notes in Computer Science, Springer, 172-183p.

Malaguti, E., 2006, The Vertex Coloring Problem and İts Generalizations, Doctoral Thesis, Universita Degli Studi Di Bologna, 126p. (unpublished).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Paksoy, B. And Tosun, H.A., 2010, Dört Renk Problemi, İstanbul Erkek Lisesi Dergisi, 18-22s.

Rawat, N., 2013, History and Application of Graph Theory, İnternational Journal of Computer Architecture and Mobility, Volume 2, Issue 1.

Saran, M., S., 2008, Graf Teorisinin Bazı Mühendislik Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 60s. (Yayınlanmamış).

Vedatvathi, N. and Gurram, D., 2013, Applications on Graph Theory, İnternational Journal of Engineering Research & Technology, Volume 2, Issue 1, 1-4p.

West, D. B., 2005, İntroduction to Graph Theory, Prentice Hall, 512p.

Wilson, R. J., 1985, İntroduction to Graph Theory, Longman Group, 166p.

Yorgancıoğlu, Z., 2010, Çiftli Grafların Tam Boyanması, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 34s. (Yayınlanmamış).

ÖZGEÇMİŞ

Sezen Duman, 1986 Aydın'da doğdu. İlkokulu Aydın Ekrem Çifçi ilköğretim okulunda bitirdi. Lise öğrenimini Aydın Lisesinde tamamladı. 2008 yılında Doğu Akdeniz Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü kazandı. Lisans eğitimini 4 yılın sonunda tamamlayıp 2012 yılında mezun oldu. Aynı yıl Yaşar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. 2013 yılında Özel İzmir Anadolu Sağlık Meslek Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak çalıştı.