YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DETERMİNİSTİK KONTROLDE MAKSİMUM PRENSİP, DİNAMİK PROGRAMLAMA VE ARALARINDAKİ BAĞINTI

DURMUŞ ALİ BAKAR

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR ŞAHLAR MEHERREM

MATEMATİK BÖLÜMÜ

SUNUM TARİHİ: 20.01.2017

BORNOVA / İZMİR
OCAK 2017

Bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Yüksek Lisans tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri:	**İmza:**
Prof. Dr.Şaban EREN Yaşar Üniversitesi	....
Doç. Dr.Şahlar MEHERREM Yaşar Üniversitesi	....
Yrd.Doç. Dr.Derya DOĞAN Celal Bayar Üniversitesi	....

Prof. Dr.Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

DETERMİNİSTİK KONTROLDE MAKSİMUM PRENSİP, DİNAMİK PROGRAMLAMA VE ARALARINDAKİ BAĞINTI

Bakar, Durmuş Ali
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışman: Doç. Dr. Şahlar MEHERREM
Ocak 2017

Kontrol sistemlerini en uygun şekilde öğrenmenin iki ana aracı vardır ki; ek fonksiyonunu, Hamilton fonksiyonunu ve değer fonksiyonunu içeren Pontryagin’ in maksimum prensibi ve Bellman’ ın dinamik programlamasıdır. Bu fonksiyonlar arasındaki ilişki, deterministik, sonlu boyutlu sistemler açısından, Crandall ve Lions tarafından tanımlanan üst türev ve alt türev kavramlarını uygulayarak bu çalışmada araştırılmıştır. Sonuçlarımız temelde klasik olanların düzgün olmayan versiyonlarıdır. Maksimum prensip ve Hamilton-Jacobi-Bellman denklemi (viskozite anlamında) arasındaki bağlantı yukarıda bahsedilen ilişkinin sonucu olarak açıklanmaktadır.

Anahtar sözcükler: Optimal Kontrol, maksimum prensip, dinamik programlama, vizkozite çözümleri, üst türev, alt türev.

ABSTRACT

MAXİMUM PRİNCİPLE, DYNAMIC PROGRAMMING, AND THEIR CONNECTION IN DETERMİNİSTİC CONTROL

Bakar, Durmuş Ali
Msc, in Mathematics
Advisor: Assoc. Prof. Şahlar MEHERREM
January 2017

There are two methods to study optimal control problems. One of them is Pontragian's maximum principle and second one is Bellman dynamic equation. Both of these method involve the adjoint function, Hamiltonian function and the Value function. There is relationship between this method in the deterministic case. But in this thesis we will try to investigate connecting between these principle in the supperdifferantial and subdifferantial means. Mainly, connecting between maximum principle and Hamilton-Jacobi-Bellman equation is given in this thesis.

Keywords: Optimal control, maximum principle, dynamic programming, viscosity solutions, superdifferantial, subdifferantial.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Şahlar MEHERREM ayrıca bana daima destek olan eşim Emine ÖZÖLMEZ' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Durmuş Ali BAKAR

İzmir, 2017

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Deterministik Kontrolde Maksimum Prensip, Dinamik Programlama ve Aralarındaki İlişki" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Durmuş Ali BAKAR

İMZA

20/01/2017

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM BİR
GİRİŞ

$(s,y)\in[0,1]\times R^d$ ikilisi verildiğinde, R^d ' de aşağıdaki gibi optimal kontrol problemini düşünelim;

Minimize edilen: $$J(s,y;u)=\int_s^1 L\big(t,x(t),u(t)\big)dt+h\big(x(1)\big), \tag{1a}$$

Hedeflenen: $$dx(t)/d(t)=f\big(t,x(t),u(t)\big),\ t\in[s,1] \text{ olsun,} \tag{1b}$$

$$x(s)=y \tag{1c}$$

Burada kabul edilebilir bütün kontrollerin arasında, (1a) fonksiyoneline (1b) ve (1c) dahilinde minimumlarını bulalım. $\{u(.)|u,\ [s,1]$ ' den Γ ' ya tanımlı ölçülebilir bir Lebesgue fonksiyonudur $\}$ ve Γ , R^m ' de belirlenmiş keyfi bir kümedir. (1d)

Başlangıç zamanı s ve başlangıç durumu y' nin önemini vurgulamak için yukarıdaki problemi C_{sy} ile gösterebiliriz. Değer fonksiyonu

$$V(s,y)=\inf\{J(s,y;u):u\in U_{ad}[s,1]\} \tag{2}$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\hat{x}$, $\hat{u}\in U_{ad}[s,1]$ için (1)' in bir çözümü ise ve $J(s,y;\hat{u})=V(s,y)$ için (1) ifadesinin uyumlu bir çözümü olursa, $(\hat{x},\hat{u})$ ikilisine C_{sy} probleminin optimal ikilisi olarak adlandırılır.

Pontryagin maksimum prensibini ispatladığından ve Bellman' da Dinamik programlama metodunu öne sürdüğünden beri, Optimal kontrol teorisindeki birçok araştırma bu iki yoldan biri boyunca uygulanmıştır. Maksimum prensibe göre eğer $(\hat{x},\hat{u})$, C_{sy} problemi için optimal ikili ise, $t\in[s,1]$ için

$$d\psi(t)/dt=-f_x\big(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)\big)\psi(t)-L_x\big(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)\big)\text{ve }\psi(1)=h_x\big(\hat{x}(1)\big) \tag{3}$$

$$\forall(t,x,u,p)\in[s,1]\times R^d\times\Gamma\times R^d \text{ için } H(t,x,u,p)=-\big(p,f(t,x,u)\big)-L(t,x,u) \tag{4}$$

$$t\in[s,1] \text{ için } H\big(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\psi(t)\big)=\max_{u\in\Gamma}H\big(t,\hat{x}(t),u,\psi(t)\big) \tag{5}$$

eşitliğini sağlayan öyle bir $\psi:[s,1]\to R^d$ fonksiyonu vardır.

Bunun yanı sıra, Dinamik Programlamaya göre, eğer değer fonksiyonu $V(\cdot,\cdot)$ sürekli türevlenebilir ise Hamilton-Jacobi-Bellman denklemini sağlar.

$$-\partial V(t,x)\Big/\partial t+\sup_{u\in\Gamma} H\left(t,x,u,\partial V(t,x)/\partial x\right)=0,$$

$$(t,x)\in[0,1]\times R^{d},\ V(1,x)=h(x) \tag{6}$$

Fakat Dinamik Programlama değer fonksiyonunun düzgün olmasını gerektirirse, daha en başından sağlam bir zemin oluşturmaz ki bu en kolay durumlarda bile gerçek değildir. Maksimum prensip ve Dinamik programlama arasındaki ilişkiye gelince bilinen sonuç şudur; $\forall t\in[s,1]$ için

$$\psi(t)=\partial V\left(t,\hat{x}(t)\right)\Big/\partial x \tag{7}$$

ki bu eşitlik yukarıdaki aynı sebepten dolayı genellemeden yoksundur.

Bu literatür de önemli bir boşluktur. Son zamanlarda, lineer olmayan kısmi türevli lineer diferansiyel denklemleri vizkozite çözümler olarak adlandıran Crandall ve Lions bu boşluğu kısmen doldurmuştur. Lions oldukça mantıklı varsayımlar altında, değer fonksiyonu V' in bir vizkozite çözüm olduğunu başarılı bir şekilde gösterdi. Bir vizkozite çözümün avantajlarından biri varlık, teklik teoremlerinin hepsinde geçerli olmasıdır. Bu yüzden Dinamik Programlama sağlam bir çerçevede kurulabilir.

Bu çalışmayla deterministik, sonlu boyutlu sistemler açısından bakıldığında şu soruya cevap arıyoruz: " Değer fonksiyonu $V(\cdot,\cdot)$ ' un sürekli türevliliğini iddia etmeksizin MP ve DP arasındaki ilişki nedir?". Vizkozite çözümünü çağrıştıran üst türev ve alt türev kavramlarını uygulayarak "ψ", "H", "V" fonksiyonları arasındaki ilişkiyi araştırıyoruz. Elbette ki $V(\cdot,\cdot)$ yeterince düzgünse, çözümümüz (7) olarak bilinen ifadeye indirgenir. Bunların yanı sıra $\left(t,x(t)\right)$' de $V(\cdot,\cdot)$ ' in alt ve üst türevlerinin ilgi çekici birkaç özelliği elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, Maksimum Prensip doğrudan Dinamik Programlamadan ispatlanabilir.

BÖLÜM İKİ
FRECHET ALT TÜREVLERİ

Frechet alt türevleri 25 yıldan daha fazla bir süredir bilinmektedir. İlk olarak muhtemelen (alt yarı türevler adı altında) sonlu boyutlarda ortaya atıldı.

2.1. TANIMLAR VE TEMEL ÖZELLİKLER

X gerçek bir Banach uzayı olsun ve f fonksiyonunu X' den genişletilmiş bir doğruya götürsün. O halde $\overline{R} = R \cup \{+\infty\}$, ve X sonludur.

$$\partial f(x) = \left\{ x^* \in X^* : \liminf_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - (x^*, u - x)}{\|u - x\|} \geq 0 \right\} \tag{8}$$

kümesi f fonksiyonunun x noktasında alt türevi (Frechet alt türevi) denir. Özellikleri bazen Frechet alt gradyanları olarak tanımlanır.

(8)' de ifade edilen küme kapalı ve konvekstir. Diğer iki önerme bir Frechet türevinin konveks çözümünün alt türevlerini genellediğini göstermektedir.

Özellik 2.1 Eğer f fonksiyonu x noktasında $\nabla f(x)$' li bir Frechet türevi varsa;

$$\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$$

eşitliği sağlanır.

Özellik 2.2 f fonksiyonu bir konveks ise;

$$\partial f(x) = \left\{ x^* \in X^* : f(u) - f(x) \geq (x^*, u - x), \forall u \in X \right\}. \tag{9}$$

(8)' de ifade edilen kümenin X' de denk bir norma bağlı olmadığını belirtebiliriz.

Örnek 2.1 (8)' de ifade edilen küme boş olsun. $f : X \to B, f(u) = -|u|, u \in X$ alalım. $\partial f(0) = \varnothing$ eşitliği açıktır.

$\partial f(x) \neq \varnothing$ ise, f fonksiyonunun X' de bir alt türev olduğunu söyleyebiliriz. $\partial^+ f(x) \neq \varnothing$ ise, f fonksiyonunun X' de bir Frechet üst türevi olduğunu söyleyebiliriz.

$$\partial^+ f(x) = \left\{ x^* \in X^* : \limsup_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - (x^*, u - x)}{\|u - x\|} \leq 0 \right\}. \tag{10}$$

(8)' de ifade edilen küme, f fonksiyonunu alttan destekleyen doğrusal sürekli fonksiyonlardan oluşurken, (10)’ da belirtilen fonksiyoneller f fonksiyonunu üstten destekler. Klasik bir durumun aksine; nesneler gibi iki farklı türevin oluşumu düzgün olmayan bir analiz için gayet doğaldır. Esasen bir fonksiyonun alttan ve üstten türev özelliği farklı olabilir.

Muhakkak ki türevlenemeyen durumda (8) ve (10) ' da belirtilen kümelerden en az biri boş olmalıdır.

Özellik 2.3 Eğer f fonksiyonu sadece X’ de Frechet türevli ise, hem (8)' de belirtilen küme hem de (10)' da belirtilen küme aynı anda boş olamaz. Böyle bir durumda ise ; $\partial f(x) = \partial^{+} f(x) = \{\nabla f(x)\}$ eşitliğini alabiliriz. Genelde aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\partial(-f)(x) = -\partial^{+} f(x).$$

Örnek 2.2 Hem (8) hem de (10)' da belirtilen kümeler aynı anda boş olabilir. $u \neq 0$ ve $f(0) = 0$ için $f : X \to B : f(u) = u \sin(1/u)$ alalım.

Daha sonra $\partial f(0) = \partial f^{+}(0) = \varnothing$ eşitliği elde edilir.

Örnek 2.3 (8)' de ifade edilen kümenin tekli olması diferansiyellenebilir olduğunu göstermez. $u \neq 0$ ve $f(0) = 0$ için $f : X \to B : f(u) = \max(u \sin(1/u), 0)$ alalım.

$\partial f(0) = \{0\}$ ’ e sahip olsak da, f fonksiyonu sıfır noktasında türevli değildir.

Örnek 2.4 Frechet türevi özellik (8)’ de gereklidir. Gateaux türev fonksiyonları Frechet anlamında alt türevlenemez olabilir.

$u_2 = u_1^2$ için $f : X^2 \to B, f(u_1, u_2) = -\sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}$ alalım ve sonra $f(u_1, u_2) = 0$ ’ dır.

Açıkçası, $\partial f(x) = \varnothing$ iken, f fonksiyonu sıfır noktasında Gateaux türevidir. (Sıfır noktasına eşit bir türevle birlikte)

Özellik 2.4 Eğer f fonksiyonu $\nabla f(x)$ türeviyle, Gateaux türevi varsa ve Frechet alt türevlenebilir ise o zaman $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ ’ dir.

Örnek 2.5 Özellik 2.4 koşulları altında, f fonksiyonu Frechet anlamında hala türevlenemez olabilir.

Aksi takdirde, $u_2 = u_1^2$ için $f : X^2 \to B, f(u_1, u_2) = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}$ alalım ve daha sonra $f(u_1, u_2) = 0$ eşitliğini alalım.

Yorum 2.1 Gateaux türev kavramına bağlı bir Gateaux alt türevini tanımlamak mümkündür. Bu alt türev için, özellik (8)-(10) benzerlikleri ve diğer sonuçlar sağlanır. Gateaux ve diğer alt türev çeşitlerini dikkate almak bazı uygulamalarda faydalı olabilir. Genelde, bir Gateaux alt türevi kümesi bir Frechet alt türevinden daha geniştir.

Tanım 2.1' de belirtilen ifadeye göre, Frechet alt türevi aşağıdaki yöntemle yeniden düzenlenebilir.

Özellik 2.5 $x^* \in \partial f(x)$ ancak ve ancak $g : X \to B$ fonksiyonu oluştuğunda gerçeklenir. Bu durumda;

(a) Her $u \in X$ için $g(u) \le f(u)$ ve $g(x) = f(x)$,

(b) g fonksiyonu, x noktasında ve $\nabla g(x) = x^*$ ' de Frechet türevlidir.

Özellik 2.5' de a şıkkındaki durum, g fonksiyonunun f fonksiyonunu alttan desteklediği anlamına gelir.

Örnek 2.5' in yeter şart kısmı, doğrudan Tanım 2.1' deki ifadeden ortaya çıkar. Gerekliliği ispatlamak için, $g(u) = \min\left(f(u), f(x) + \left(x^*, u - x\right)\right), u \in X$ eşitliğini kurabilir. Bir defa daha türev alma kuralından bahsedebiliriz. Buna, sözde mutlak türev adı verilir.

$$\lim_{\substack{u \to x \\ u' \to x}} \frac{f(u') - f(u) - \langle \nabla f(x), u' - u \rangle}{\|u' - u\|} = 0 \tag{11}$$

ifadesi oluştuğunda, f fonksiyonu X' de ciddi türev olarak adlandırılır.

Açıkçası, (11) sürekli türevden daha az kısıtlı olmasına rağmen, basit Frechet türevinden daha kısıtlı bir koşuldur. Bu tamamen ters fonksiyon ve kapalı fonksiyon teoremi gibi klasik analiz sonuçları için gerekli olan mutlak türev özelliğidir.

Özellik 2.6 Eğer f fonksiyonu, $\nabla f(x)$ türeviyle X'de ciddi türevlenirse o zaman herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, öyle bir $\delta > 0$ vardır ki;

$$\partial f(u) \cup \partial^+ f(u) \subset \nabla f(x) + \varepsilon B^*$$

kapsaması tüm $u \in B_\delta(x)$ için sağlansın.

İspat.

(1.4)' ün sonucu olarak, her bir $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır. Bu durumda;

$$\left| f(u') - f(u) - \langle \nabla f(x), u' - u \rangle \right| \le \frac{\varepsilon}{2} \|u' - u\|, \forall u, u' \in B_{2\delta}(x). \tag{12}$$

$u \in B_\delta(x)$ ve $x^* \in \partial f(u)$ ' i alalım. Daha sonra (8) ifadesinin pozitif halinin sonucunu alarak, pozitif $\delta' \le \delta$ vardır. Bu durumda;

$$f(u') - f(u) - \langle x^*, u' - u \rangle \ge -\frac{\varepsilon}{2} \|u' - u\| \ \forall u' \in B_{\delta'}(u). \tag{13}$$

(12) ve (13) eşitsizlikleri ortaya çıkar; $\forall u' \in B_{\delta'}(u)$ için

$$\langle x^* - \nabla f(x), u' - u \rangle \le \varepsilon \| u' - u \|$$

ve sonuç olarak

$$\| x^* - \nabla f(x) \|_* \le \varepsilon$$

oluşur. $x^* \in \partial^+ f(u)$ durumu benzer şekilde ele alınabilir.

$\partial f(x)$ x noktasının yakınında f fonksiyonunun yerel özelliklerini göstermektedir. Örneğin, alt türevlik alt yarı sürekliliği ifade eder.

Özellik 2.7 Eğer $\partial f(x) \neq \emptyset$ sağlanırsa o zaman f fonksiyonu, x noktasında alt yarı süreklidir.

Özellik 2.8 Eğer f fonksiyonu, x noktasında alt yarı sürekliyse, $\partial f(x) = \partial(\mathrm{cl}\, f)(x)$ olur ki burada " cl f ", f fonksiyonunun bir alt yarı sürekli zarfıdır.

(8) ve (9) ifadelerini karşılaştırdığımızda, bir alt türevin önemli ölçüde sadeleştirildiği anlamına gelen konveks hali görebiliriz. Böyle bir sadeleştirmenin diğer bir örneği, pozitif homojen fonksiyonlarla verilmektedir. Herhangi $u \in X$ ve $\lambda > 0$ için $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ ise, f fonksiyonunun pozitif homojen olduğunu hatırlayınız.

Özellik 2.9 f fonksiyonu pozitif homojen olsun.

a. $f(0) = 0$ ise,

$$\partial f(0) = \{ x^* \in X^* : f(u) \ge \langle x^*, u \rangle, \forall u \in X \}.$$

b. f fonksiyonu, x noktasında sonlu ise, herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$\partial f(\lambda x) = \partial f(x)$$

Aşağıdaki özellikler Frechet alt türevlerinin bazı basit hesaplarının doğrudan tanımlardan ortaya çıktığını göstermektedir.

Özellik 2.10 Eğer f fonksiyonunun x noktasında yerel bir minimumu varsa bu durumda $0 \in \partial f(x)$ 'dır.

Özellik 2.11 Herhangi bir $\lambda > 0$ için

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x)$$

Özellik 2.12 $f_1 : X \to \overline{B}$ ve $f_2 : X \to \overline{B}$ olmak üzere, x noktasında alt türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar $f_1 + f_2$ x noktasında bir alt türevdir.

$$\partial(f_1 + f_2)(x) \supset \partial f_1(x) + \partial f_2(x). \quad (14)$$

Özellik 2.12 bir toplama kuralı örneğidir. Genellikle bu toplam kuralı herhangi bir alt türev hesaplamasının ana sonucudur. Ancak 14' deki bağıntı neredeyse gereksizdir; yani, başlangıç fonksiyonlarının alt türev öğeleri açısından, toplam fonksiyonun alt türev öğelerini basamaklarına ayırmamıza izin vermez.

Sonuç 2.12.1 $f_1 : X \to \overline{B}$ ve $f_2 : X \to \overline{B}$ fonksiyonları x noktasında sonlu değer alsın ve $f_1 + f_2$ ve $-f_1$', x noktasında alt türevlenebilir ve f_2 fonksiyonu x noktasında alt türevlenebilirdir ve o zaman $\partial f_2(x) \supset \partial(f_1 + f_2)(x) - \partial^+ f_1(x)$ sağlanır.

Özellik 2.12, Sonuç 2.12.1 ve Özellik 2.3' ü birleştirerek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.12.2 $f_1 : X \to \overline{B}$ ve $f_2 : X \to \overline{B}$ fonksiyonları x noktasında sonlu fonksiyonlar olsunlar ve f_1 fonksiyonu x noktasında Frechet türevlenebilirdir ve aşağıdaki ifade sağlanır.

$$\partial(f_1 + f_2)(x) = \nabla f_1(x) + \partial f_2(x). \tag{15}$$

Sonuç 2.12.2' de (14) eşitliği sağlanırsa önemli bir durum oluşur.

Sonuç 2.12.3 $f_1 : X \to \overline{B}$ ve $f_2 : X \to \overline{B}$ fonksiyonları x noktasında sonlu fonksiyonlar ve f_1 fonksiyonu x noktasında Frechet türevlenebilir olsun.

Eğer $f_1 + f_2$ x noktasında yerel bir minimumu varsa, o zaman $-\nabla f_1(x) \subset \partial f_2(x)$ gerçeklenir. Şimdi de zincir kuralına bakalım. h fonksiyonu diğer gerçek Banach uzayındaki değerleri alarak x noktasında bir fonksiyon olsun. Bunun x noktasında aşağıdaki eşitsizliği sağladığını söyleyebiliriz.

$$\|f(u) - f(x)\| \le \ell \|u - x\|$$

x noktasının bazı komşuluklarındaki tüm u' lar için $\ell > 0$' dır.

Herhangi bir $y^* \in Y^*$ için, $\langle y^*, h \rangle$ skaler fonksiyonu

$$\langle y^*, h \rangle(u) = \langle y^*, h(u) \rangle$$

eşitliğini sağladığını düşünelim. $g : Y \to \overline{B}$ fonksiyonu $y = h(x)$' de sonlu olsun.

$$f(u) = g(h(u)), u \in X$$

olacak şekilde bileşke fonksiyonelini düşünelim.

Özellik 2.13 Farz edelim ki $y^* \in \partial g(y)$ için, g fonksiyonu y' de alt türev ve $\langle y^*, h \rangle$' de x' de alt türevlemesi olsun. Bu durumda f fonksiyonu x' de alt türevlenebilir ve $\partial f(x) \supset \partial \langle y^*, h \rangle(x)$' dir.

Özellik 2.13' ün sonucu aşağıdaki formda yeniden yazılabilir.

$$\partial f(x) \supset \bigcup \left\{ \partial \left\langle y^*, h \right\rangle (x) : y^* \in \partial g(y) \right\}$$

Sonuç 2.13.1 h fonksiyonu için x noktasında Frechet türevi olduğunu farz edelim. Bu durumda,

$$\partial f(x) \supset \left(\nabla h(x) \right)^* \partial g\left(h(x) \right) \tag{16}$$

Burada $\left(\nabla h(x) \right)^* : Y^* \to X^*$ operatörü $\nabla h(x)$ ' e ek operatördür. Ters fonksiyon teoremini dikkate aldığımızda, Sonuç 2.13.1' den (16)' da ki kesin eşitliğini çıkarmak mümkündür.

Sonuç 2.13.2 h fonksiyonu için x noktasında mutlak türevlenebilir ve $\nabla h(x)$' in tersi olduğunu farz edelim. Bu durumda (16) eşitliğe dönüşür.

Sonuç 2.13.3 $f(u) = g(au + b), u \in X$ olsun. Bu durumda, $\partial f(x) = a\partial g(ax + b)$ olur.

Özellik 2.14 f fonksiyonu x noktasında alt türev ve g fonksiyonu da y noktasında üst türev olsun. Bu durumda $\left\langle y^*, h \right\rangle$, $y^* \in \partial^+ g(y)$ için x noktasında alt türevlenebilirdir.

$$\partial f(x) \subset \partial \left\langle y^*, h \right\rangle (x)$$

2.13 ve 2.14' deki özellikleri birleştirerek, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 2.14.1 g fonksiyonunun y noktasında Frechet türevi olsun. Bu durumda,

$$\partial f(x) = \partial \left\langle \nabla g(y), h \right\rangle (x) \text{' dır.}$$

Sonuç 2.14.1' in kolay bir sonucu olarak, iki skaler fonksiyonun türev çarpımı ve bölümü için formüller çıkarabiliriz.

Sonuç 2.14.2 Farz edelim ki f_1 ve f_2 fonksiyonları x noktasında sonlu ve x' deki durgunluk durumunu sağlasınlar. $\alpha_i = f_i(x), i = 1, 2$ ile gösterelim.

Eğer $\alpha_2 \neq 0,$ eşitsizliği sağlanıyorsa bu durumda,

$$\partial(f_1 \cdot f_2)(x) = \partial(\alpha_2 f_1 + \alpha_1 f_2)(x)$$

$$\partial\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{\partial(\alpha_2 f_1 + \alpha_1 f_2)(x)}{\alpha_2^2}.$$

Özellik 2.15 $f(u) = \sup_{i \in I} f_i(u), u \in X$ olsun. Burada I, f' in bütün fonksiyonlarının ve indekslerinin dolu bir kümesidir ve f_i, $i \in I$, x' de sonludur. Bu durumda,

$$\partial f(x) \supset \mathrm{cl\ co} \bigcup_{i \in I_0(x)} \partial f_i(x),$$

Burada $I_0(x)=\{i\in I: f_i(x)=f(x)\}$ ve cl co dış bükey kapanışını gösterir.

2.2 FRECHET ALT TÜREVLERİ VE YÖNLÜ TÜREVLER

Alt türevler, dual uzay elemanlarıdır. Frechet alt türevi, herhangi bir lokal fonksiyon yaklaşımına başvurmadan doğrudan yukarıda tanımlanmıştır. Düzgün olmayan fonksiyonları araştırmadaki diğer bir yaklaşım, belli bir noktada ilk başta yönlü türev olarak düşünülür.

Bazı $z\in X$ limitlerini açıklayalım:

$$\begin{aligned} df(x)(z) &= \liminf_{\substack{t\to+0 \\ y\to z}} \frac{f(x+ty)-f(x)}{t} \\ d_w f(x)(z) &= \liminf_{\substack{t\to+0 \\ y\xrightarrow{w} z}} \frac{f(x+ty)-f(x)}{t} \end{aligned} \tag{17}$$

Burada $y\xrightarrow{w}z$; y, X' in zayıf topolojisinde z' ye yönelik olduğu anlamına gelir. Bunlar sırasıyla, bir alt türev ve z yönünde x noktasında f fonksiyonunun zayıf bir alt türevi olarak adlandırılır. $df(x)(\cdot)$ ve $d_w f(x)(.)$, sırasıyla x noktasından $R\cup\{\pm\infty\}$ kümesine alttan yarı sürekli ve x' in zayıf topolojisini içeren pozitif yönde homojen fonksiyonlardır. $d_w f(x)(z)\le df(x)(z)$ eşitsizliği $z\in X$ ' i sağlar.

Eğer $\dim X<\infty$ ise, her iki alt türevde kesişir. Genel olarak, fonksiyonlar farklıdır ve bir sonraki eşitsizlikte alışılmış yönlü türevden farklıdır. Eğer f fonksiyonu z yönünde x' de düzgün türev ise, $df(x)(z)$ alışılmış düzgün türeve indirgenir.

Örnek 2.16 Eğer f fonksiyonu x civarında Lipschitz sürekli ise aşağıdaki eşitlik sağlanabilir;

$$df(x)(z)=\liminf_{t\to+0}\frac{f(x+tz)-f(x)}{t}.$$

Elbette alt türevler x noktasının yanında f fonksiyonunun yerel özelliklerini tanımlamak için kullanılabilir. Örneğin, $df(x)(0)=0$ eşitliği z' de f' nin alt yarı sürekliliğini ifade eder. $d_w f(x)(\cdot)$ bir bakıma olası en alt yönlü türevdir. Bu da alt türevlilikle yakından ilişkilidir.

Örnek 2.17 Aşağıdaki içerme bağıntısı sağlanır;

$$\partial f(x)\subset\left\{x^*\in X: d_w f(x)(z)\ge\langle x^*,z\rangle\,\forall z\in X\right\}. \tag{18}$$

Eğer X yansıyan ise (18)' deki eşitliği sağlar. Örnek 2.17' deki ilk iddia, doğrudan tanımlardan sonuç çıkarmaktadır. İkinci iddia da, yansıyan uzayda bir birim yuvarın zayıf kompakt olmasının bir sonucudur. (18)' in sağ tarafındaki küme bir alt türev tanımı olarak alınabilir. Yansıyan uzay (8)' de belirtilen küme ile uyumludur. Ancak, genelde bu küme (8)' de belirtilen kümeden daha büyüktür.

Şimdi optimal kontrol sistemlerinin çözümünde kullanılan Dinamik Programlama ve Maksimum Prensibi inceleyelim.

Tablo 2.1 Pontryagin Prensibi' nin Özeti

A. Problemin İfadesi

$\dot{x}(t)=f(x(t),u(t),t)$, $J=S(x(t_f),t_f)+\int_{t_0}^{t_f}V(x(t),u(t),t)dt$ performans indeksi olsun. Bu optimal kontrolde başlangıç noktası $x(t_0)=x_0$ ve bitiş noktası belli olmayan $x(t_f)$ koşulları olsun.

B. Problemin Çözümü

Adım 1 Pontryagin H fonksiyonundan

$H(x(t),u(t),\lambda(t),t)=V(x(t),u(t),t)+\lambda'(t)f(x(t),u(t),t)$ ' dir.

Adım 2 $u(t)$ kontrolünde H fonksiyonu minimize edilirken

$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_*=0$ ve $u^*(t)=h(x^*(t),\lambda^*(t),t)$ eşitliği sağlanmalıdır.

Adım 3 Adım 1' de Adım 2' nin sonuçları kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$H^*(x^*(t),h(x^*(t),\lambda^*(t),t),\lambda^*(t),t)=H^*(x^*(t),\lambda^*(t),t)$

Adım 4 Oluşan diferansiyel denklem $\dot{x}^*(t)=+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_*$ ve $\dot{\lambda}^*(t)=-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_*$ eşitlikleri yardımıyla çözülür. Burada başlangıç koşulu x_0 ve bitiş koşulu $\left[H^*+\frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f}\partial t_f+\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_*-\lambda^*(t)\right]'_{t_f}\partial x_f=0$ ' dır.

Adım 5 Adım 4' de elde edilen $\lambda^*(t)$ ve $x^*(t)$ çözümleri Adım 2' de $u^*(t)$ denkleminde yazılır.

Örnek 2.18 Aşağıda diferansiyel denklem ile ifade edilen optimal kontrol sistemini ele alalım;

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=\dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_2(t)&=u(t)\end{aligned}\tag{19}$$

Performans indeksini aşağıdaki şekilde alalım;

$$J=\frac{1}{2}\int_{t_f}^{t_f}u^2(t)dt\tag{20}$$

Başlangıç ve son sınır koşullarına bakarak optimal kontrol ve optimal durumu bulalım;

$$x(0) = [1 \quad 2]'. \tag{21}$$

Kontrol ve durumun sınırlandırılmamış olduğunu farz edelim.

Çözüm: Tablo 2.1' de verilen prosedürü adım adım izleyelim.

$$\begin{aligned} &V\big(x(t),u(t),t\big) = V\big(u(t)\big) = \frac{1}{2}u^2(t) \\ &f\big(x(t),u(t),t\big) = [f_1, f_2]' \end{aligned} \tag{22}$$

Burada $f_1 = x_2(t)$, $f_2 = u(t)$' dır.

Adım 1: Hamiltonian fonksiyonunu oluşturalım:

$$\begin{aligned} H &= H\big(x_1(t), x_2(t), u(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)\big) \\ &= V\big(u(t)\big) + \lambda'(t) f\big(x(t), u(t)\big) \\ &= \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t). \end{aligned} \tag{23}$$

Adım 2: $u^*(t)$ ' i bulalım:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u^*(t) + \lambda_2^*(t) = 0 \rightarrow u^*(t) = -\lambda_2^*(t). \tag{24}$$

Adım 3: Adım 1' deki Adım 2'nin sonuçlarını kullanarak, H^* optimalini bulalım:

$$\begin{aligned} H^*\big(x_1^*(t), x_2^*(t), \lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)\big) &= \frac{1}{2}\lambda_1^{*2}(t) + \lambda_1^*(t)x_2^*(t) - \lambda_2^{*2}(t) \\ &= \lambda_1^*(t)x_2^*(t) - \frac{1}{2}\lambda_2^{*2}(t). \end{aligned} \tag{25}$$

Adım 4: Durum ve yardımcı durum denklemlerini elde edelim:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^*(t) &= +\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_1}\right)_* = x_2^*(t) \\ \dot{x}_2^*(t) &= +\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda_2}\right)_* = -\lambda_2^*(t) \\ \dot{\lambda}_1^*(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)_* = 0 \\ \dot{\lambda}_2^*(t) &= -\left(\frac{\partial H}{\partial x_2}\right)_* = -\lambda_1^*(t). \end{aligned} \tag{26}$$

Önceki denklemleri çözerek, optimal durum ve yardımcı durum denklemlerine ulaşırız:

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{C_3}{6}t^3 - \frac{C_4}{2}t^2 + C_2 t + C_1 \\ x_2^*(t) &= \frac{C_3}{2}t^2 - C_4 t + C_2 \\ \lambda_1^*(t) &= C_3 \\ \lambda_2^*(t) &= -C_3 t + C_4. \end{aligned} \tag{27}$$

Adım 5: Optimal kontrolü bulalım: $u^*(t) = -\lambda_2^* = C_3 t - C_4$ (28)

$C_1 = 1,\ C_2 = 2,\ C_3 = 3$ ve $C_4 = 4$'dür.

Tablo 2.2 Hamilton-Bellman-Jacobi Yaklaşımı Özeti

A. Problemin İfadesi

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, $J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t)dt$ performans indeksi olsun. Bu optimal kontrolde başlangıç noktası $x(t_0) = x_0$ ve bitiş noktası belli olmayan $x(t_f)$ koşulları olsun.

B. Problemin Çözümü

Adım 1 Pontryagin H fonksiyonundan

$H(x(t), u(t), J_x^*, t) = V(x(t), u(t), t) + J_x^* f(x(t), u(t), t)$' dir.

Adım 2 $u(t)$ kontrolünde H fonksiyonu minimize edilirken

$\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)_* = 0$ ve $u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$ eşitlikleri sağlanmalıdır.

Adım 3 Adım 2' nin sonucu kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$H^*(x^*(t), h(x^*(t), J_x^*, t), J_x^*, t) = H^*(x^*(t), J_x^*, t)$

Adım 4 $J_t^* + H(x^*(t), J_t^*, t) = 0$ eşitliği ile Hamilton-Bellman-Jacobi denklemi çözülür. Burada $J^*(x^*(t_f), t_f) = S(x(t_f), t_f)$' dir.

Adım 5 Adım 4' de verilen denklemde J^* ifadesi yerine yazılarak J_x^* hesaplanır. Bulunan J_x^* ifadeside Adım 2' de yerine yazılarak $u(t)$ bulunur.

Örnek 2.19 Birinci mertebeden optimal kontrol sistemini ele alalım:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t) \tag{29}$$

ve performans indeksi;

$$J = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[x^2(t) + u^2(t)\right]dt \tag{30}$$

olsun. Optimal kontrolü bulalım.

Çözüm: İlk olarak, sırasıyla (29) ve (30) mevcut sistemi karşılaştırırken;

$$V(x(t), u(t), t) = \frac{1}{2}u^2(t) + \frac{1}{2}x^2(t);\ S(x(t_f), t_f) = \frac{1}{2}x^2(t_f)$$

$$f(x(t), u(t), t) = -2x(t) + u(t) \tag{31}$$

ifadesini görmekteyiz. Şimdi tablo 2.2' de özetlenen prosedürü kullanıyoruz:

Adım 1: Hamiltonian şu şekildedir:

$$H = \left[x^*(t), J_x, u^*(t), t\right] = V(x(t), u(t), t) + J_x f(x(t), u(t), t)$$

$$= \frac{1}{2}u^2(t) + \frac{1}{2}x^2(t) + J_x(-2x(t) + u(t)). \tag{32}$$

Adım 2: Her bir sınırlandırılmamış kontrol ve optimizasyon için gerekli şart şöyledir:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \rightarrow u(t) + J_x = 0 \tag{33}$$

ve şu şekilde çözeriz:

$$u^*(t) = -J_x. \tag{34}$$

Adım 3: Optimal kontrol (32) ve (34) optimal kontrolünü kullanarak, optimal H fonksiyonunu kuralım;

$$H = \frac{1}{2}(-J_x)^2 + \frac{1}{2}x^2(t) + J_x(-2x(t) - J_x)$$

$$= -\frac{1}{2}J_x^2 + \frac{1}{2}x^2(t) - 2x(t)J_x \tag{35}$$

Önceki bağlantıları kullanarak HJB denklemi aşağıdaki gibi oluşur:

$$J_t - \frac{1}{2}J_x^2 + \frac{1}{2}x^2(t) - 2x(t)J_x = 0 \tag{36}$$

Sınır koşuluyla birlikte şöyledir;

$$J\left(x\left(t_f\right),t_f\right)=S\left(x\left(t_f\right),t_f\right)=\frac{1}{2}x^2\left(t_f\right) \tag{37}$$

Adım 4: Sınır koşuluyla (37) HJB denklemini (36) çözmenin bir yolu, bir çözüm varsaymak ve denklem kurup kurmadığını kontrol etmektir. Böyle basit bir durumda, durumlar açısından optimal kontrolü istediğimizden ve performans indeksinin durumların ve kontrollerin kuadratik fonksiyonu olmasından, aşağıdaki çözümü tahmin edebiliriz.

$$J\left(x\left(t\right)\right)=\frac{1}{2}p\left(t\right)x^2\left(t\right) \tag{38}$$

Burada belirlenecek olan, bilinmeyen fonksiyon $p(t)$, aşağıdaki sınır şartına sahiptir:

$$J\left(x\left(t_f\right)\right)=\frac{1}{2}x^2\left(t_f\right)=\frac{1}{2}p\left(t_f\right)x^2\left(t_f\right) \tag{39}$$

Bu bize şunu verir:

$$p\left(t_f\right)=1. \tag{40}$$

$$J_x=p\left(t\right)x\left(t\right);\ J_t=\frac{1}{2}\dot{p}\left(t\right)x^2\left(t\right) \tag{41}$$

Kapalı döngü optimal kontrolüne (34) bakarsak;

$$u^*\left(t\right)=-p\left(t\right)x^*\left(t\right). \tag{42}$$

HJB denkleminin (36) içinde optimal kontrolü (41) kullanarak, şunu elde ederiz;

$$\left(\frac{1}{2}\dot{p}\left(t\right)-\frac{1}{2}p^2\left(t\right)-2p\left(t\right)+\frac{1}{2}\right)x^{*^2}=0. \tag{43}$$

Her bir $x^*\left(t\right)$ için, önceki bağıntı şu şekildedir;

$$\frac{1}{2}\dot{p}\left(t\right)-\frac{1}{2}p^2\left(t\right)-2p\left(t\right)+\frac{1}{2}=0, \tag{44}$$

Bu sınır koşuluyla çözümlenerek (40) şu hale gelir;

$$p\left(t\right)=\frac{\left(\sqrt{5}-2\right)+\left(\sqrt{5}+2\right)\left[\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right]e^{2\sqrt{5}\left(t-t_f\right)}}{1-\left[\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right]e^{2\sqrt{5}\left(t-t_f\right)}}. \tag{45}$$

Adım 5: (45) bağıntısını kullanarak, kapalı döngü optimal kontrolüne sahip oluruz. (45)' deki $t_f\to\infty$, $p\left(t\right)$, $p\left(\infty\right)=\bar{p}=\sqrt{5}-2$ olur. Optimal kontrol şu şekildedir;

$$u\left(t\right)=-\left(\sqrt{5}-2\right)x\left(t\right). \tag{46}$$

BÖLÜM ÜÇ
MAKSİMUM PRENSİBİ VE DİNAMİK PROGRAMLAMA

Bu bölümde, maksimum prensibi ve dinamik programlama ifadelerini ele alıyoruz ve aynı zamanda sonraki kullanıma bazı yardımcı lemmalar veriyoruz. İlk olarak, (1)' deki problemde görünen bilgi üzerine her daim geçerli olacak varsayımlarda bulunmaktayız.

(A1) $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ ve $L(\cdot,\cdot,\cdot)$ sırasıyla $[0,1]\times R^d\times\Gamma$ 'den R^d ve R^1 ' de sürekli dönüşümlerdir; ayrıca "f" ve"L", (t,x)'e göre $u\in\Gamma$' de düzgün süreklidir.

(A2) $(t,u)\in[0,1]\times\Gamma$, $f(t,\cdot,u)$, $L(t,\cdot,u)$ ve $h(\cdot)$ fonksiyonları için sürekli türevlenebilirdir ki burada $h(\cdot)$, R^1 değerlidir.

(A3) (t,u)' dan bağımsız bir $K>0$ sabit sayısı aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$|f(t,x,u)-f(t,y,u)|+|L(t,x,u)-L(t,y,u)|+|h(x)-h(y)|\le K|x-y|$$

$$\forall x,y\in R^d,\ |f(t,x,u)|+|L(t,x,u)|+|h(x)|\le K(1+|x|),\ \forall x\in R^d.$$

Teorem 3.1 Maksimum prensibine göre eğer $(\hat{x},\hat{u})$, C_{sy} problemi için optimal ise öyle bir "ψ"ek denklemini sağlayan ψ fonksiyonu olmalı ki (4) maksimum şartı sağlansın.

Yukarıdaki teoremin kanıtı bilindik bir durumdur. (Pontryagin, 1962)

Lemma 3.1 Farz edelim ki $(\hat{x},\hat{u})$, C_{sy} problemi için optimal olsun ve $\phi(\cdot,\cdot)$ temel matris olsun:

$$dy(t)/dt=f_x^{\,T}(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))y(t). \qquad (47)$$

O zaman aşağıdaki sonuçlar sağlanır:

i) $\sup_{s \le r \le t \le 1} |\phi(t,r)| \le \text{sabit}$

ii) Ek fonksiyon"ψ" şu şekilde gösterilir.

$$\psi(t) = \int_t^1 \phi^T(r,t) L_x(r, \hat{x}(r), \hat{u}(r)) dr + \phi^T(1,t) h_x(\hat{x}(1)) \tag{48}$$

İspat.

i) İspatı açıktır.

ii) Bilinen temel matris özelliklerini kullanarak ψ fonksiyonunu kontrol edilir.

Tanım 3.1 Q, R^n' de açık bir küme ve $v \in C(Q)$ olsun. v' nin ($D^+v(x)$ ile ifade edilen) $x \in Q$,' deki üst türevi şu şekilde tanımlanır.

$$D^+v(x) = \left\{ p \in R^n \left| \overline{\lim_{y \to x}} \left[v(y) - v(x) - (p, y-x) \right] \middle/ |y - x \le 0| \right. \right\}$$

$$\left[D^- v(x) = \left\{ p \in R^n \left| \underline{\lim_{y \to x}} \{...\} \ge 0 \right. \right\} \right].$$

Tanım 3.2 $H \in C(Q \times R \times R^n)$ ve $v \in C(Q)$ olsun. Bu durumda v çözümü aşağıdaki doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemin vizkozite çözümüdür.

$$H(x, v, Dv) = 0$$

Öyle ki,

$$H(x, v(x), p) \le 0, \qquad \forall x \in Q, \forall p \in D^+v(x),$$

$$H(x, v, Dv) \ge 0 \qquad \forall x \in Q, \forall p \in D^-v(x).$$

Bundan sonra, $D^+_{tx}v(\cdot,\cdot)$ ' i (t,x) değişkenlerinde üst türev, her sabit t için x değişkeninde $D^+_x v(t,\cdot)$ ' i üst türev olarak gösterebiliriz.

Teorem 3.2 $V(\cdot,\cdot)$ değer fonksiyonu (6)' da ifade edilen HJB denkleminin vizkozite çözümüdür.

Yorum 3.1 Ref. 3' de belirtilen (2) no' lu fonksiyon değeri tanımı, Lions' un (Refs. 5, 6)' daki tanımından bir nebze farklıdır. Buradaki fark Lions' un değer fonksiyonu ileri HJB denklemini sağlarken, bizim değer fonksiyonumuzun geri HJB denklemini sağlamasından kaynaklanmaktadır. Ancak Teorem 3.2' nin kanıtı Ref.5' de belirtilen gibidir.

3.1 ANA SONUÇLAR

Ek fonksiyon " ψ ", Hamiltonian fonksiyon H ve değer fonksiyonu V , maksimum prensibi ve dinamik programlamada bulunan en önemli veridir. Bu bölümde, üst türev ve alt türev çerçevesinde birbirleriyle olan ilişkilerini göstereceğiz.

Teorem 3.3. $(\hat{x},\hat{u})$' nin C_{sy} problemi için optimal olduğunu farz edelim.

$$t\in[s,1],\ D_x^- V(t,\hat{x}(t))\subset\{\psi(t)\}\subset D_x^+ V(t,\hat{x}(t))$$

İspat. $z\in R^d$ için $x(\cdot;z)$' yi, kontrol $\hat{u}$, başlangıç zamanı t, ve başlangıç durumu z (1)' in çözümü olsun.

Böylece,

$$x(r;z)-\hat{x}(r)$$

$$=z-\hat{x}(t)+\int_t^r\{f(\theta,x(\theta;z),\hat{u}(\theta))-f(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta))\}d\theta$$

$$-z-\hat{x}(t)+\int_t^r f_x^T(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta))(x(\theta;z)-\hat{x}(\theta))d\theta+\int_t^r \varepsilon(\theta;z)(x(\theta;z)-\hat{x}(\theta))d\theta, \tag{49}$$

Burada $\varepsilon(\theta;z)$ aşağıda belirtildiği gibidir;

$$\varepsilon(\theta;z)\equiv\int_0^1\{f_x^T(\theta,\hat{x}(\theta)+\alpha(x(\theta;z)-\hat{x}(\theta)),\hat{u}(\theta))-f_x^T(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta))\}d\alpha.$$

Aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\lim_{z\to\hat{x}(t)}\in(\theta;z)=0,\qquad \forall\theta\in[t,1], \tag{50a}$$

$$\sup_{\theta t}|\in(\theta;z)|\le \text{sabit} \tag{50b}$$

(49)' da belirtilen eşitlikten ve sabitlerin varyasyonu formülünden aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$x(r;z)-\hat{x}(r)$$

$$=\phi(r,t)(z-\hat{x}(t))+\int_t^r\phi(r,\theta)\in(\theta;z)(x(\theta;z)-\hat{x}(\theta))d\theta, \tag{51}$$

Burada ϕ fonksiyonu daha önce Lemma 3.1' de tanımlanmaktadır. Böylelikle,

$$V(t,z)-V(t,\hat{x}(t))$$
$$\leq \int_t^1 \left\{L(r,x(r;z),\hat{u}(r))-L(r,\hat{x}(r),\hat{u}(r))\right\}dr+h(x(1;z))-h(\hat{x}(1))$$
$$=\int_t^1 L_x^T(r,\hat{x}(r),\hat{u}(r))(x(r;z)-\hat{x}(r))dr+\int_t^1 \varepsilon_0(r;z)(x(r;z)-\hat{x}(r))dr$$
$$+h_x^T(\hat{x}(1))(x(1;z)-\hat{x}(1))+o(|x(1;z)-\hat{x}(1)|). \tag{52}$$

$\varepsilon_0(\cdot;z)$; f_x, L_x ile yer değiştirdiğinde $\varepsilon(\cdot;z)$' e benzer bir yolla tanımlanmaktadır. (51)' nin sonucu olarak, (52)' ü aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$V(t,z)-V(t,\hat{x}(t))$$
$$\leq \int_t^1 L_x^T(r,\hat{x}(r),\hat{u}(r))\phi(r,t)dr.(z-\hat{x}(t))$$
$$+h_x^T(\hat{x}(1))\phi(1,t)(z-\hat{x}(t))+o(|z-\hat{x}(t)|)$$
$$=\psi^T(t)(z-\hat{x}(t))+o(|z-\hat{x}(t)|).$$

Yukarıdaki eşitsizlik bizi aşağıdaki sonuca götürür:

$$\psi(t)\in D_x^+V(t,\hat{x}(t))$$

Öte yandan, $p\in D_x^-V(t,\hat{x}(t))$ olduğunu kabul edelim. Böylelikle

$$0\leq \underline{\lim}_{z\to\hat{x}(t)}\left\{V(t,z)-V(t,\hat{x}(t)-(p,z-\hat{x}(t)))\right\}\Big/|z-\hat{x}(t)|$$
$$\leq \underline{\lim}_{z\to\hat{x}(t)}(\psi(t)-p,z-\hat{x}(t))\Big/|z-\hat{x}(t)|.$$

Bu yüzden, $p=\psi(t)$' dir. İspat tamamlanmıştır.

Yorum 3.2 Teorem 3.3, (7)' nin düzgün olmayan bir versiyonudur. Aslında, eğer $V(t,\cdot)$ türevlenebilirse, bu teorem (7)' ye indirgenir.

Fakat genelde, $D_x^-V(t,\hat{x}(t))\subset\{\psi(t)\}$ ve $\{\psi(t)\}\subset D_x^+V(t,\hat{x}(t))$ kapsamaları mutlak olabilir, bu durumu aşağıdaki örnekle inceleyebiliriz.

Örnek 3.1 Aşağıdaki C_{00} optimal kontrol problemini düşünelim.

Minimize edilen: $-x(1)$,

Hedeflenen: $dx(t)/dt = x(t)u(t)$, a.e. $t \in [0,1]$,

$x(0) = 0$,

$u(\cdot):[0,1] \to \{r \in R^1 | 0 \le r \le 1\}$.

Bu problemin optimal çifti, $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot)) = (0,0)$ ' dır. Ayrıca aşağıdaki şekilde kolayca hesaplanabilir:

$$V(t,x) = \begin{cases} -x\exp(1-t), & x > 0 \text{ için} \\ -x, & x \le 0 \text{ için} \end{cases}$$

Böylelikle,

$$D_x^- V(0,0) = \phi, \quad D_x^+ V(0,0) = [-e,-1], \quad \psi(0) = -1$$

eşitlikleri görülür. Teorem 3.3 Hamiltonian hakkında bir şeyden bahsetmediği için yetersizdir. Daha sonra ki çalışmada Hamiltonian' ın $(t, \hat{x}(t))$' de $V(\cdot,\cdot)$ alt türevi ve üst türeviyle ilgili olduğunu gösterilecektir. $D_{tx}^+ V(t, \hat{x}(t))$' in bazı özelliklerini aşağıda inceleyelim.

Özellik 3.2 $(\hat{x}, \hat{u})$' nin C_{sy} problemi için optimal olduğunu varsayalım.

Örneğin, $t \in [s,1]$, $(p,q) \in D_{tx}^{\pm} V(t, x(t))$ için şunu alırız:

$$p = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), q) = \max_{u \in \Gamma} H(t, \hat{x}(t), u, q).$$

İspat. $t \in [s,1]$ olsun:

$$\lim_{h \to 0} (1/h) \int_t^{t+h} \begin{bmatrix} f(\theta, \hat{x}(\theta), \hat{u}(\theta)) \\ L(\theta, \hat{x}(\theta), \hat{u}(\theta)) \end{bmatrix} d\theta = \begin{bmatrix} f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \\ L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \end{bmatrix}. \tag{53}$$

Eğer $(p,q) \in D_{tx}^- V(t, \hat{x}(t))$, ise $t \in [s,1]$' i sabitleyelim ve (53)' ü sağlasın.

$$\varliminf_{r \downarrow t} \frac{V(r, \hat{x}(r)) - V(t, \hat{x}(t)) - p(r-t) - (q, \hat{x}(r) - \hat{x}(t))}{|r-t| + |\hat{x}(r) - \hat{x}(t)|} \ge 0.$$

Böylece,

$$0 \le \varliminf_{r \downarrow t} \left[-\int_t^r L(\theta, \hat{x}(\theta), \hat{u}(\theta)) d\theta - p(r-t) - \int_t^r (q, f(\theta, \hat{x}(\theta), \hat{u}(\theta))) d\theta \right] \Big/ |r-t|$$

$$0 - L(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - p - (q, f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))).$$

Bu yüzden,

$$p \le H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), q).$$

Benzer şekilde $r \uparrow t$ ’ yi kabul ederek, şu sonuca ulaşabiliriz:

$$p \ge H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), q).$$

Bu yüzden, (52) eşitliğinin sol tarafı sağlanır. $q \in D_x^- V(t, \hat{x}(t))$ olduğundan, Teorem 3.1' den $q = \psi(t)$ ’ dir. (52)’ nin sağ tarafı maksimum prensibinden elde edilir..

Diğer yandan, $(p, q) \in D_{tx}^+ V(t, \hat{x}(t))$ olduğunu varsayalım. Sonra, yukarıdaki ispatla (52) eşitliğinin sol tarafını inceleyebiliriz. Ayrıca $V(\cdot,\cdot)$, HJB denkleminin (6)' da belirtilen bir vizkozite çözümü olduğu için; $-p + \sup_{u \in \Gamma} H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), q) \le 0$ eşitsizliği yazılabilir. Bu ifade (52) eşitliğinin sağ tarafına karşılık gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Yorum 3.3 Özellik 3.2’ de şunu görebiliriz; Eğer $q(t) \in D_{tx}^{\pm} V(t, \hat{x}(t))_x$ alınırsa, ki $\left(D_{tx}^+ V(t, \hat{x}(t))\right)_x$, $D_{tx}^{\pm} V(t, \hat{x}(t))$ kümesinin “x” kesmesi anlamına gelir, burada Teorem 3.2 ile gösterilen boş olmayan $q(\cdot)$ fonksiyonu hemen her yerde maksimum koşulunu sağlar. Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 ile birlikte, $\psi(\cdot)$ ’ nin maksimum prensibi sağlayan $t \to \left(D_{tx}^+ V(t, \hat{x}(t))\right)_x$ küme değerli fonksiyonun sürekli seçimi olduğunu anlarız.

Teorem 3.5. $(\hat{x}, \hat{u})$ ’ nin C_{sy} problemi için optimal olduğunu varsayalım. Örneğin; $t \in [s,1]$, olmak üzere,

$$D_{tx}^- V(t, \hat{x}(t)) \subset \left\{\left(H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), \psi(t)), \psi(t)\right)\right\} \subset D_{tx}^+ V(t, \hat{x}(t)).$$

İspat. Teoremin sol terimi doğrudan Örnek 3.1 ve Teorem 3.4’ ün bir sonucudur. Şimdi sağ taraftaki terimi inceleyelim;

$t \in [s,1]$ ’ i sabitleyelim, böylece (53) sağlanır. $\tau > t$ ile $(\tau, z) \in [s,1] \times R^d$ için, $x(\cdot; \tau, z)$ ’ yi kontrol $\hat{u}$, başlangıç zamanı τ ve başlangıç durumu z ile (1)’ in çözümü kabul edelim. Bu durumda, $\forall r \in [\tau, 1]$ için,

$$\begin{aligned} x(r; \tau, z) = &\left\{ z - \hat{x}(t) - \int_t^{\tau} f(\theta, \hat{x}(\theta), \hat{u}(\theta))\, d\theta \right\} \\ &+ \int_{\tau}^{r} f_x^T(\theta, \hat{x}(\theta), \hat{u}(\theta))\left(x(\theta; \tau, z) - \hat{x}(\theta)\right) d\theta \\ &+ \int_{\tau}^{r} \varepsilon(\theta; \tau, z)\left(x(\theta; \tau, z) - \hat{x}(\theta)\right) d\theta. \end{aligned}$$

Burada $\varepsilon(\cdot;\tau,z)\to 0,\quad \tau\to t\ ,\ z\to\hat{x}(t)$ ve $\varepsilon(\theta;\tau,z)$ olarak düzgün sınırlıdır. Sabitlerin varyasyonu formülü ile aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:

$$x(r;\tau,z)-\hat{x}(r)=\phi(r,\tau)\left\{z-\hat{x}(t)-\int_t^{\tau} f\left(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta)\right)d\theta\right\}$$

$$+\int_{\tau}^{r}\phi(r,\theta)\in(\theta;\tau,z)-\left(x(\theta;\tau,z)-\hat{x}(\theta)\right)d\theta.$$

Teorem 3.3' deki ispata benzer bir yolla, aşağıdaki eşitliğe ulaşırız:

$$\begin{aligned}
&V(\tau,z)-V\left(t,\hat{x}(t)\right)\\
&\leq\left(\psi(\tau),z-\hat{x}(t)-\int_t^{\tau} f\left(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta)\right)d\theta\right)\\
&-\int_t^{\tau} L\left(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta)\right)d\theta+o\left(|\tau-t|+|z-\hat{x}(t)|\right)\\
&=\left(\psi(t)+\psi(t)(\tau-t)+o\left(|\tau-t|\right),z-\hat{x}(t)-\int_t^{\tau} f\left(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta)\right)d\theta\right)\\
&\int_t^{\tau} L\left(\theta,\hat{x}(\theta),\hat{u}(\theta)\right)d\theta+o\left(|\tau-t|+|z-\hat{x}(t)|\right)\\
&=\left(\psi(\tau),z-\hat{x}(t)\right)+(\tau-t)H\left(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\psi(t)\right)+o\left(|\tau-t|+|z-\hat{x}(t)|\right).(54)
\end{aligned}$$

Ayrıca, $\tau<t$ olduğunda, benzer hesaplama (54) sonucunu ortaya çıkarır. Böylelikle, istenilen sonuca ulaşılır.

Yorum 3.4 Teorem 3.5' in düzgün versiyonunun ne olduğunu görelim. Aslında, $V(\cdot,\cdot)$ türevlenebilir ise, Teorem 3.3 aşağıdaki eşitliği ortaya çıkarır:

$$\partial V\left(t,\hat{x}(t)\right)/\partial t=H\left(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\psi(t)\right)$$

$$=H\left(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\partial V\left(t,\hat{x}(t)/\partial x\right)\right).\quad \text{(Fleming, 1975)}$$

Yorum 3.5 Barron ve Jensen dinamik programlama yolu ile maksimum prensibi ispatlamıştır.(Barron, 1986) Burada, Teorem 3.5' in sonucu olarak, dinamik programlamayı kullanarak başka basit maksimum prensib ispatını gösterebiliriz.

Dinamik programlamada $\left(H\left(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t),\psi(t)\right),\psi(t)\right)\in D_{tx}^{+}V\left(t,\hat{x}(t)\right)$ olduğunda, maksimum prensibini ortaya çıkaran aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır;

$$-H\left(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t);\psi(t)\right)+\sup_{u\in\Gamma}H\left(t,\hat{x}(t),u,\psi(t)\right)\leq 0.$$

BÖLÜM DÖRT
SONUÇLAR

Üst türev ve alt türev dahil olmak üzere, vizkozite çözümü, bir çeşit düzgün olmayan analiz olarak bilinir. $V(\cdot,\cdot)$' in düzgün olduğu varsayımı ortadan kalkarken, dinamik programlama ve maksimum prensibi ile olan ilişkisi vizkozite çözüm diliyle yorumlanır.

Genelleştirilmiş gradyan olarak adlandırılan başka bir düzgün olmayan analiz yapısı Clarke tarafından önerilmiştir; genelleştirilmiş gradyanı geniş kapsamda incelemek için Ref.10' a bakınız.

Maksimum prensibi ve dinamik programlama bu çerçevede belirtilmiştir.(Clarke, 1976) Yakın zamanda Clarke ve Viner maksimum prensibi ve dinamik programlamayı

$$\psi(t) \in \partial_x V\left(t, \hat{x}(t)\right) \tag{55}$$

ile ilişkilendirmiştir. Burada $\partial_x V(t,\cdot)$ genelleştirilmiş gradyan $V(t,\cdot)$ ' yi göstermektedir.(Clarke, 1987) Açıkçası, bu çalışmadaki Teorem 3.4, (55)' e benzer bir sonuçtur; bu maksimum prensibi, dinamik programlama ve aralarındaki ilişkinin viskozite çözüm çerçevesinde düzgün ele alınabileceğini göstermektedir.

KAYNAKÇA

1. BARRON, E. N.,and JENSEN, R. (1986). ThePontryagin Maximum Principle from Dynamic Programming and Viscosity Solutions to First-Order Partial Differential Equations, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 298, pp.635-641.
2. BELLMAN, R. (1957). Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
3. CLARKE, F. H.,and VINTER, R. B. (1983). Local Optimality Conditions and Lipschitzian Solutions to the Hamilton-Jacobi Equations, SİAM Journal on Control and Optimization, Vol. 21, pp. 856-870.
4. CLARKE, F. H.,and VINTER, R. B. (1987). The Relationship between the Maximum Principle and Dynamic Programming, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 25, pp. 1291-1311.
5. CLARKE, F. H. (1983). Optimization and Nonsmooth Analysis, John Wiley New York, New York.
6. CLARKE, F. H. (1976). The Maximum Prenciple under Minimal Hypotheses, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 14, pp. 1078-1091.
7. CRANDALL, M.G.,and LIONS,P.L. (1983). Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 277, pp. 1-42.
8. FLEMING, W. H., AND RISHEL,R.W. (1975). Deterministic and Stochastic Optimal Control, Springer-Verlag, New York.
9. LIONS, P. L. (1982). Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations, Pitman, London, England.
10. Lı, X. J.,and YAO, Y. L. (1985) Maximum Prenciple of Distributed-Parameter Systems with Time Lags, Proceedings of the Conference on Control Theory of Distributed-Parameter Systems and Applications, Vorau, Austria, (1984); Editedby F. Kappel, K. Kunisch, and W. Schappacher, Springer-Verlag, New York, New York, pp. 410-427.

11. LIONS, P. L. (1985). Optimal Control and Viscosity Solutions, Proceedings of the Conference on Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming, Rome, Italy, 1984; Editedby I. Cappuzzo-Dolcetta, w. H. Fleming, and T.Zolezzi, Springer-Verlag, New York, New York, pp. 94-112.

12. PONTRYAGIN,M.L., BOLTYANSKII, V. G., GAMKRELIDZE, R. V., and MISCHENKO, E. F. (1962). The Mathematics Theory of Optimal Processes, Interscience, New York.

13. ZHOU, X. Y., Maximum Principle, Dynamic Programming. and Their Connection in Deterministic Control (1990). Journal of Optmization Theory and Applications. 65:363-373.