YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEĞİŞMEZLİK İLKESİ VE UYGULAMALARI

YUNUS AL

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR RAFAİL ALİZADE

MATEMATİK BÖLÜMÜ

SUNUM TARİHİ: 26.12.2016

BORNOVA / İZMİR
ARALIK 2016

Bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri:	**İmza:**
Prof. Dr. Rafail ALİZADE (Danışman) Yaşar Üniversitesi	....
Prof. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü	....
Yrd. Doç. Dr. Şule Ayar ÖZBAL Yaşar Üniversitesi	....

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

DEĞİŞMEZLİK İLKESİ VE UYGULAMALARI

Al Yunus
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Rafail ALİZADE
Aralık 2016

Bu çalışmada; değişmezlik ilkesinin değişik matematik sorularının çözümünde nasıl uygulanabileceği gösterilmiştir. Ayrıca ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarında değişmezlik ilkesi ile ilgili çıkmış soruların çözümleri verilmiştir.

Tezin matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrenciler ve bunları çalıştıracak öğretmenler için faydalı olacağı düşünülmektedir.

ABSTRACT

THE INVARIANCE PRINCIPLE AND APPLICATIONS

AL, Yunus

Msc in Department of Mathematics

Thesis Advisor: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

December 2016

In this thesis we show how to apply the invariance principle for solving various mathematical problems. Furthermore we give the solution of the problems that taken part in national and international mathematical olympiads by the way of the invariance prıncıple.

We hope that this thesis will be helpfull for high school students that take part in the mathematical olympiads.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman, her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan, değerli hocam Prof. Dr. Rafail ALİZADE‘ye çok teşekkür ederim. Bu süreçte bana yardımcı olan eşim Besire Sümeyra Al, çocuklarım Ömer ve Selma’ya ayrıca Yaşar Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yunus AL

İzmir,2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “DEĞİŞMEZLİK İLKESİ VE UYGULAMALARI” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Yunus AL
İMZA

…………..
26 Aralık 2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

Kısaltma	Açıklama
IMO	International Mathematical Olympiad
VMEO	Vietnam Mathematical Olympiad
UMO	Ulusal Matematik Olimpiyat
UİMO	Ulusal İlköğretim Matematik Olimpiyatı

BÖLÜM BİR
GİRİŞ

Değişmezlik ilkesi konusunu seçmemizdeki gayemiz matematiğe meraklı, lise matematiğinin bir adım ilerisine geçmek isteyen, kararlı, sabırlı ve özgüven sahibi öğrencilere hayatın her safhasında karşılaştıkları problemlere eleştirel ve farklı acılardan yaklaşabilme yeteneği kazandırmaktır.

Matematik çalışan, matematikte belli bir seviyeye gelen bireylerin diğer bilim dallarındaki problemler karşısında hızlı anlama ve analitik düşünme kabiliyeti kazandıkları bilinen bir gerçektir. İşin mantığını en iyi şekilde kavramanın yolu bu tip sorularla uğraşmaktan geçer.

Değişmezlik, matematiğin tüm dallarında; özellikle cebir ve topolojide en önemli kavramlardan biridir, genelde matematiksel nesnelerin sınıflandırılması için kullanılır. Değişmezlik ilkesi Ayrık Matematikte ve özellikle ortaokul ve lise matematik olimpiyat problemlerinin çözümünde uygulanmaktadır. Değişmezlik ilkesi birbirine benzer olmayan nesneleri veya durumları ayırt etmek için kullanılmaktadır. Olimpiyat sorularının çözümünde genelde şu şekilde kullanılır; karmaşık bir süreçte değişmeyen veya nasıl değiştiği takip edilebilen bir değer bulunur ve bunun sayesinde süreç sonucunda elde edilemeyecek ve bazen edilebilecek durumlar tespit edilir. Örneğin bir süreç boyunca bir değer 6 artabiliyor veya 19 azalıp 4 artabiliyorsa bu değer mod 3'te değişmez. Başka bir örnek vermek gerekirse: bir toplamda, bir toplam sonucu 3 azaltıp başka bir toplam sonucu 17 arttırıyorsa toplamın tek veya çift olma özelliği değişmez. Bir değerin nasıl değiştiğinin takip edilebileceği bir örnekte şu şekilde verilebilir; toplamları T olan n sayı üzerinde şu şekilde işlemler yapılıyor: her hamlede iki sayı silinip yerine bunların toplamının 2 eksiği yazılıyor. Bu süreçte her hamlede sayıların adedi 1 azalır ve toplamları da 2 azalıyor. Dolayısıyla $n - 1$ adım sonra tek bir sayı kalacak ve bu sayı $T - 2n + 2$ olacaktır. Değişmezlik ilkesinin daha etkin bir şekilde ve daha karmaşık durumlar için geçerli olan uygulamaları bu tezin ileriki sayfalarında yer almaktadır.

Tezin birinci bölümünde teklik çiftlik (mod 2) ile ilgili uygulamalara yer verilmiştir. İkinci bölümde farklı modlar yardımıyla çözülebilen sorular incelenmiştir. Üçüncü bölümde farklı değişmezlik ilkesi teknikleri yardımıyla çözülebilen sorulara yer verilmiş ve son bölümde ise Türkiye'deki ulusal olimpiyatlarda çıkan değişmezlik ilkesinin uygulamalarıyla çözülebilen sorulara yer verilmiştir.

Bu tezimizde farklı soru tiplerine yer vererek güzel bir kaynak oluşturmaya çalıştık. Yaptığımız bu çalışmanın ulusal ve uluslararası yarışmalara katılan öğrencilerimiz için iyi bir kaynak niteliği taşıdığını düşünüyoruz.

BÖLÜM İKİ

TEKLİK-ÇİFTLİK İLE İLGİLİ UYGULAMALAR (MOD 2)

Örnek 1:

13 ahırda 113 at varsa her bir ahırda çift sayıda at olabilir mi?

Çözüm:

Ahırlardaki at sayılarını

$$A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_{13}$$

ile gösterelim.

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots + A_{13} = 113$$

veriliyor.

Çift sayıların toplamının çift olması gerekirken burada 13 tane çift sayının toplamı tek sayı olarak verilmiş. Her bir ahırda çift sayıda at bulunamaz en az bir ahırda tek sayıda at bulunmalıdır.

Değişmeyen: Çift sayıların toplamı çifttir.

Örnek 2:

2016 tane tamsayının toplamı tek sayıdır. Bu sayıların çarpımı tek olabilir mi?

Çözüm:

Sayılarımızı

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{2016}$$

ile gösterelim.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{2016} = \text{tek sayı}$$

olabilmesi için toplanan sayılardaki tek sayıların adedinin tek olması gerekir. Ama elimizde çift sayıda sayı var. Bu da sayılardan en az bir tanesinin çift sayı olduğunu gösterir. Sayılardan en az bir tanesi çift olduğuna göre bu sayıların çarpımı da çift olur.

Değişmeyen: Tek adette tek sayının toplamı tektir.

Tamsayıların çarpımında sayıların en az birisi çiftse sonuç çifttir.

Örnek 3:

2017×2017 boyutlu bir satranç tahtasını 1×2 boyutlu dominolarla kaplamak mümkün müdür?

Çözüm:

Satranç tahtasındaki birim kare sayısının tek olduğu görülür. Satranç tahtasını kaplayacağımız dominoların her biri 2 birimkare yer kaplar. Yani her bir dominoyu tahtaya yerleştirdiğimizde kaplanan birim karelerin sayısı ardışık çift sayılar olarak ilerler. Toplam birimkare sayısı tek olduğuna göre her halükarda bir birimkare yer boşta kalır. Verilen satranç tahtasını 1×2 boyutlu dominolarla kaplamak mümkün değildir.

Değişmeyen: Çift sayıların toplamı çifttir.

Örnek 4:

100 liralık bir banknotu toplam 23 tane olmak üzere 1 liralık ve 5 liralık paralarla bozdurmak mümkün müdür?

Çözüm:

1 ve 5 tek sayılardır. O zaman soruyu şu şekilde de ifade edebiliriz. 23 adet tek sayının toplamı 100 olabilir mi?

23 adet tek tamsayının toplamı yine tektir. Toplamın 100 olması mümkün değildir.

Değişmeyen: Tek adette tek sayının toplamı tektir.

Örnek 5:

Sayfa numaraları pozitif tamsayılar olan bir kitabın değişik yerlerinden 19 yaprak yırtılıyor. Yırtılan yapraklardaki 38 sayfa numarasının toplamı 2016 olabilir mi?

Çözüm:

Her yaprakta iki sayfa numarası vardır ve bu sayılar ardışıktır. $a \in N$ olmak üzere sayfa numaraları a ve $a+1$ dir. Her sayfadaki sayfa numaralarının toplamı $a+(a+1)=2a+1$ olur buda tek sayıdır. Elimizde 19 yaprak olduğuna göre 19 tek sayı var demektir.

Tek adette tek sayının toplamı tek olacağından toplamın 2016 olması mümkün değildir.

Değişmeyen: Ardışık iki tamsayının toplamı tektir.

Tek adette tek sayının toplamı tektir.

Örnek 6:

Tahtaya 10 adedi 0 ve 9 adedi 1 olmak üzere 15 rakam yazılmıştır. Her adımda iki sayı silinerek bunların yerine sayılar aynıysa 0 ve sayılar farklıysa 1 yazılıyor. 18 adım sonra tahtada kalan son sayı kaç olur?

Çözüm:

Tahtadaki sayılardaki değişimi bir tablo yardımıyla inceleyelim.

		Değişim	
Silinen Sayılar	Yeni Sayı	0	1
0, 0	0	-1	0
1, 1	0	1	-2
0, 1	1	-1	0
1, 0	1	-1	0

Görüldüğü gibi her hamlede 1'lerin adedindeki değişim sayısı mod 2'de sıfıra denktir. Diğer bir ifadeyle 1'lerin adedi her hamlede ya sabit kalmakta ya da 2 azalmaktadır. 1'lerin adedi ilk durumda tek olduğu verilen hamlelerle bunu sıfırlamak mümkün değildir. Tahtada kalan son sayı 1 olur.

Değişmeyen: Biri tek diğeri çift olan iki sayının farkı tektir.

Örnek 7:

Tahtaya 2017 tam sayı yazılmıştır. Geriye kalan sayıların toplamı çift sayı olacak şekilde bu sayılardan birinin silinebileceğini kanıtlayınız. Tahtaya 2018 tam sayı yazılmış olsaydı aynı şeyin doğru olduğu söylenebilir miydi?

Çözüm:

2017 sayının toplamı tek sayı veya çift sayı olabilir iki durumu da inceleyelim. Eğer toplamımız çift sayıysa 2017 adet sayının içerisinde en az bir tane çift sayı bulunur. Bu çift sayıyı silersek geriye kalan sayıların toplamı yine çifttir. Eğer 2017 adet sayının toplamı tekse, bu sayılardan en az biri tek sayıdır. Bu tek sayıyı silersek geriye kalan sayıların toplamı yine çift olur.

Tahtaya yazılan sayı adedi 2018 ise aynı şey doğru olmayabilir. Örneğin sayıların hepsi tekse bu durumda sayıların toplamı çifttir ve içlerinden hangi sayıyı silerseniz silin geriye kalan sayıların toplamı çift olmaz.

Değişmeyen: Biri tek diğeri çift olan iki sayının farkı tektir.

İki çift sayının farkı çifttir.

Örnek 8:

Öğretmen sınıfta tahtaya 12 sayısını yazıyor. Sonra sınıftaki 35 öğrencinin her birinden sırayla tahtaya kalkarak bu sayıya 1 eklemesini veya 1 çıkarmasını istiyor. Bu işlemlerin sonunda tahtada yazan sayı 0 olabilir mi?

Çözüm:

İlk durumda tahtadaki sayı çifttir. Birinci hamle sonunda ilk öğrenci 1 ekleme veya 1 çıkarma hamlelerinden hangisini yaparsa yapsın tahtadaki sayı tek olur. ikinci hamle sonunda tahtadaki sayımız çift sayı olur. Bu hamleler bu şekilde takip edilirse tek sayılı hamlelerde tahtadaki sayı tek, çift sayıdaki hamlelerde tahtadaki sayının çift olduğu görülür. Sınıfta 35 öğrencinin olması 35 hamle anlamına gelir. Hamle sayısı tek sayı olduğuna göre tahtadaki sayının bu hamleler sonucunda 0 olması mümkün değildir.

Değişmeyen: Ardışık iki tam sayıdan biri çift sayı, diğeri tek sayıdır.

Örnek 9:

Boyları birbirinden farklı 23 kişi yan yana sıra oluşturmuştur. Her adımda aralarında bir kişi olan iki kişinin yer değiştirmesiyle, bu kişileri boy sırasına dizmek her durumda mümkün müdür?

Çözüm:

Boyları farklı 23 kişiye baştan başlayarak $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots k_{23}$ diye isimlendirelim. Her adımda indis numarası tek olan kişiye bu işlemi uygularsak yer değiştirme sonucunda yine tek indis numarası olan yere gelir. Aynı durum indis numarası çift olan kişi için de geçerlidir. En uzun kişinin indis numarası çiftse kaç hamle yapılırsa yapılsın en başa veya en sona gelmesi mümkün değildir. Yani boyları farklı 23 kişiyi tanımlanan hamleyi yaparak her durumda boy sırasına dizmemiz mümkün değildir.

Değişmeyen: Aralarında bir tamsayı bulunan iki tamsayı ya çifttir ya da tektir.

Örnek 10:

Tahtaya 150 tane 0, 151 tane 1 ve 152 tane 2 yazılmıştır. Her hamlede birbirinden farklı iki sayı silinerek bunların yerine üçüncü sayı yazılıyor. 452 hamle sonunda tahtada kalan son sayı kaçtır?

Çözüm:

Yapılan hamle sonucunda hangi sayılar silinirse silinsin oluşan yeni durumda tahtadaki sayı adetlerinin teklik, çiftlik durumları değişmez. İkinci hamle olarak 3 çeşit durumdan hangisi tercih edilirse edilsin tahtadaki sayı adetlerinin teklik çiftlik durumları aynı şekilde değişir.

	Silinen Sayılar	Yeni Sayı	Sayıların Adetleri		
			0'lar	1'ler	2'ler
1. hamle	0, 1	2	tek	çift	tek
	0, 2	1	tek	çift	tek
	1, 2	0	tek	çift	tek
2. hamle			çift	tek	çift
3. hamle			tek	çift	tek

Yani tek hamlelerin sonucunda sayıların durumları (tek, çift, tek) ve çift hamlelerin sonucunda (çift, tek, çift) olur. 452 hamle sonunda tahtada yazan sayılardan sıfırlar ve ikiler çift sayıda ve birlerin adedinin ise tek sayıda olması gerektiği görülür. Bunun sonucunda da tahtada kalan son sayının 1 olacağı görülür.

Değişmeyen: Ardışık iki tam sayıdan biri çift sayı, diğeri tek sayıdır.

Örnek 11:

Bir çember boyunca sıra gözetmeksizin 0, 1, 2,………,13 sayıları yazılmıştır. Her hamlede iki komşu sayının her birine aynı tam sayı eklenebilir. Sonlu hamle sonunda bütün sayılar 0 yapılabilir mi?

Çözüm:

Sayıların toplamından hareket edelim. Tahtada ki sayıların toplamı;

$$0 + 1 + 2 + \ldots\ldots\ldots + 13 = 91$$

olur. Komşu iki sayıya aynı sayının eklenmesi demek toplama bir sayının iki katını eklemek demektir. Sayının iki katı çift olduğu için toplamdaki değişimler çifttir. İlk durumdaki sayımız tek olduğundan çift sayıdaki değişimler sonucu 0 elde etmemiz mümkün değildir. Dolayısıyla çember etrafındaki sayıların hepsini sıfır yapmak mümkün değildir.

Değişmeyen: Bir tamsayının iki katı çifttir.

Biri tek diğeri çift olan iki sayının farkı tektir.

Örnek 12:

12345678 sayısı ile başlayarak, her adımda her ikisi de sıfırdan farklı komşu iki rakamın değerleri birer azaltılarak yerleri kendi arasında değiştiriliyor. Bu şartlar doğrultusunda elde edilen en küçük sayının rakamları toplamı kaçtır?

Çözüm:

İlk sayıda rakamlar tek, çift, tek, çift, tek, çift şeklinde sıralanmıştır. Soruda verilen işlemler uygulandığında aynı durumun korunduğu görülür. Yani her işlemden sonra elde edilen altı basamaklı sayının rakamları tek, çift, tek, çift, tek, çift şeklinde sıralanır. Yani elde edebileceğimiz en küçük sayı 10101010 olabilir ve bu sayınında rakamları toplamı 4’tür. Şimdi bu sayının elde edilebileceği bir hamle sırası verelim. Sağ baştaki ilk iki rakam arasında 7 hamle, sağdan 3. ve 4. rakamlar arasında 5 hamle, sağ baştan 5. ve 6. rakamlara 3 hamle ve sağdan 7. ve 8. rakamlara 1 hamle uygulandığında aranan sayıyı elde edebiliriz.

Değişmeyen: Tek tamsayının ardışığı çift, çift tamsayının ardışığı tek tam sayıdır.

Örnek 13:

Bir küpün köşelerine 3, 0, 5, 8, 5, 9, 1 ve 4 sayıları yazılmıştır. Bir hamlede seçilmiş olan bir ayrıtın iki ucundaki sayılara aynı tam sayı ekleniyor. Sonlu hamle sonucunda tüm köşelerde 0 elde edilir mi?

Çözüm:

İlk durumda küpün köşelerinde bulunan sayıların toplamı;

$$3 + 0 + 5 + 8 + 5 + 9 + 1 + 4 = 35$$

tek sayıdır. Son durumda istenense bu sayıların toplamının 0 yani çift sayı olmasıdır. Her hamlede bir sayının herhangi bir ayrıtın iki ucuna eklenmesi sonucu bu toplamdaki değişme çift sayıda olur (bir sayıyı iki defa eklemekle sayının iki katını eklemek aynı şeylerdir). başlangıçta sayıların toplamı tek olduğu için çift sayıda değişimler sonucu bu sayıyı sıfır yapmamız mümkün değildir. İstenen durumu elde etmek mümkün değildir.

Değişmeyen: Bir tamsayının iki katı çifttir.

Biri tek diğeri çift olan iki sayının farkı tektir.

Örnek 14:

10 adası olan bir ülkede adalar birbirlerine ve anakaraya köprülerle bağlıdır. Anakaradan 6 köprü çıkıyor. Beş adadan ikişer köprü ve dört adadan üçer köprü çıkıyor. Bir adaya da bir köprü ile ulaşılabiliyor. Bu durum mümkün müdür?

Çözüm:

Her bir köprünün iki tane bağlantı noktası olduğundan n tane köprünün $2n$ tane bağlantı noktası vardır. Yani bağlantı noktaları sayısı her zaman çift olmalıdır. Ama sorudaki verilen bağlantı noktaları hesaplanırsa:

$$6+5\cdot2+4\cdot3+1 = 29$$

Bağlantı noktalarının sayısının tek olduğu görülür. Buda böyle bir durumun mümkün olmadığının kanıtıdır.

Değişmeyen: Bir tamsayının iki katı her zaman çifttir.

Örnek 15:

Masanın üstündeki 9 bardak, hepsinin tabanı altta olacak şekilde (U) yerleştirilmiştir. Bir hamlede aynı anda 4 bardak ters çevriliyor. Sonlu hamle sonunda tüm bardakların tabanlarının üstte olması (∩) sağlanabilir mi?

Çözüm:

Çevrilen 4 bardağın farklı durumlarını (mod2) de tek tek inceleyelim.

U U U U ⟶ ∩ ∩ ∩ ∩ tabanı altta olan bardak sayısı 4 azaldı.

U U U ∩ ⟶ ∩ ∩ ∩ U tabanı altta olan bardak sayısı 2 azaldı.

U U ∩ ∩ ⟶ ∩ ∩ U U tabanı altta olan bardak sayısı değişmedi.

U ∩ ∩ ∩ ⟶ ∩ U U U tabanı altta olan bardak sayısı 2 arttı.

∩ ∩ ∩ ∩ ⟶ U U U U tabanı altta olan bardak sayısı 4 arttı.

Yukarıdaki şekillerde görüldüğü gibi bütün durumlarda tabanı altta olan bardak sayısındaki değişme sayısı (mod 2) de 0 (sıfır)’ a denktir. Tabanı altta olan bardak sayısı başlangıçta tek sayı olarak verildiğinden her değişimden sonra yine tek sayı olarak kalacak ve hiçbir zaman sıfır olamayacaktır. İstenen durumun gerçekleşmesinin mümkün olmadığı böylece görülmüş olur.

Değişmeyen: Biri tek biri çift olan iki tamsayının farkı her zaman tektir.

Örnek 16:

Tahtaya 1,2,3,……,$4n$-1 şeklinde sayılar yazılmıştır. Her adımda herhangi iki sayı silinip, tahtaya bu iki sayının farkı yazılıyor. $4n$-2 adımdan sonra tahtada bir tek sayı kalacaktır. Bu sayının çift olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Tahtaya yazılan sayıların toplamının çift olduğu aşağıdaki toplam formülü yardımıyla görülür.

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+(4n-1) = 2n.(4n-1)$$

Tahtaya yazılmış olan herhangi iki sayı x ve y olsun. Bu iki sayının tüm sayıların toplamına etkisi ($x+y$) kadardır. Bu sayıları silip yerlerine bu sayıların farkını yani ($x-y$) yazdığımızı düşünelim. Bu durumda acaba tahtada yazan sayıların toplamında ne gibi bir değişiklik olmuş olabilir.

Bu toplamın:

$$(x+y) - (x-y) = 2y$$

kadar azaldığını görebiliriz. $2y$ sayısı çift sayı olduğundan toplamda her seferinde çift sayıda bir değişim olduğu söylenebilir. İki çift sayıyla yapılan toplama veya çıkarma işleminde sonuç yine çift sayı olacağından tahtada yazan son sayı hiçbir zaman tek sayı olamaz.

Değişmeyen: İki sayının toplamıyla farkı mod 2'de denktir

Örnek 17:

Tavla zarının iki karşı yüzüne birer, iki karşı yüzüne ikişer ve kalan iki karşı yüze de üçer nokta konulmuştur. Bu zarlardan 8 tanesi kullanılarak 2×2×2 boyutlu bir küp elde edilmiştir. Küpün yüzlerindeki nokta sayıları 6 ardışık tam sayı olabilir mi?

Çözüm:

1×1×1 boyutlu zarları kullanarak 2×2×2 boyutlu bir küp elde etmek istediğimizde 8 adet zara ihtiyacımız olur ve bu zarların her biri 2×2×2 boyutlu küpün bir köşesine denk gelir. Köşeye denk gelen bu zarların karşılıklı yüzlerinden birer tanesi toplamda üç yüzü dışarı bakar. Bu yüzlerdeki sayıların toplamı

$$1+2+3 = 6$$

olur. Toplamda sekiz adet zar olduğu için tüm sayıların toplamı

$$8\cdot 6 = 48$$

olur ve bu sayı çifttir. Altı tane ardışık tamsayının toplamı: n tamsayı olmak üzere

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5) = 6n+15$$

olduğu görülür. Buda tek sayıdır. Buradan 2×2×2 boyutlu küpün yüzlerinde yazan sayıların toplamının 6 ardışık tamsayının toplamı olamayacağı görülür.

Değişmeyen: Zarlar 2×2×2 boyutlu küp içinde nasıl yerleştirilirse yerleştirilsin her iki karşı yüzden biri içeri, diğeri dışarı bakar.

Örnek 18:

n kişinin katıldığı bir toplantıda katılımcılardan her hangi biri tek sayıda kişi ile tokalaşmışsa, bu kişiye "tek kişi", çift sayıda kişi ile tokalaşmışsa, bu kişiye "çift kişi" diyelim. Her zaman "tek kişi"lerin sayısının çift olduğunu gösteriniz.

Çözüm:

Toplantıdaki tek kişilerin sayısını *T* ile gösterelim. Başlangıçta (henüz kimse tokalaşmadı) tek kişilerin sayısı 0 (sıfır)'dır. Şimdi her bir tokalaşma sonrasındaki olası durumları tek tek gözden geçirelim.

Tokalaşan kişiler tek kişi ise tokalaştıktan sonra çift kişi olurlar. Yani tek kişilerin sayısı 2 azalır. Tokalaşan kişiler çift kişi ise tokalaşma sonrası tek kişi olurlar yani tek kişilerin sayısı 2 artar. Tokalaşan kişilerden biri tek kişi birisi çift kişi ise tokalaşma sonrası tek kişi olan çift kişi ve çift kişi olan tek kişi olur yani tek kişilerin sayısı değişmez.

Görüldüğü gibi tek kişilerin sayısı 2'şer artıyor, 2'şer azalıyor veya aynen kalıyor. Yani mod2'de tek kişilerin sayısı değişmiyor. Başlangıçta *T*=0 çift sayı olduğundan *T* her zaman çift sayı olarak kalır.

Değişmeyen: İki çift sayının toplamı veya farkı yine çift sayıdır. Her tokalşma iki kişi arasında olur.

Örnek19:

Standart satranç tahtasının herhangi bir satırı, sütunu veya 2×2 boyutlu bir karesi seçiliyor. Seçilen bölgedeki her kare diğer renge (siyah×beyaz) boyanıyor. Bu işlem tekrarlanarak satranç tahtası üzerinde sadece 1 (bir) tane siyah kare kalması sağlanabilir mi?

Çözüm:

Satranç tahtası üzerinde soruda verilen hamleleri uygulamaya çalışalım. Herhangi bir satır seçip tüm haneleri karşı renge boyayalım. Bu satırda işlem öncesi siyah hane sayısı x tane ise, siyahlar beyaza ve beyazlar siyaha dönüşeceğinden işlem sonrasında bu satırdaki siyah hane sayısı ($8 - x$) tane olur. Toplam siyah hane sayısındaki değişim:

$$(8 - x) - x = 2 \cdot (4 - x) \text{ (çift sayı)}$$

olur. Herhangi bir sütun üzerinde işlem yapıldığında da siyah kare sayısındaki değişim aynı olur.

İşlem 2×2 boyutlu bir kare üzerinde yapılsın. Bu karedeki siyah hane sayısı işlemden önce y tane olsun. İşlemden sonra siyah hane sayısı

$$(4 - y) - y = 2 \cdot (2 - y) \text{ (çift sayı)}$$

olur. Buradan hangi hamle yapılırsa yapılsın siyah hane sayısındaki değişimin çift sayı kadar olduğu görülür. Başlangıçta siyah kare sayısı 32 olduğundan ve her adımda siyah kare sayısındaki değişim çift sayı kadar olduğu için siyah kare sayısı hep çift kalacaktır. Siyah kare sayısının 1 tane olması hiçbir zaman mümkün değildir.

Değişmeyen: Bir tamsayının iki katı her zaman çift sayıdır.

Çift sayıyla çift sayının farkı yine çift sayıdır.

Örnek 20:

Masa üzerinde b tane beyaz, s tane siyah ve k tane kırmızı bilye bulunsun. Ahmet bu bilyelerle şöyle bir oyun oynuyor. Her seferinde masanın üzerinden iki farklı renkte birer bilye alıp onların yerine üçüncü renkte bir bilye bırakıyor. b,k,s'nin hangi değerleri için Ahmet bu işlemi sonlu adımda uygulayarak masada 1 adet top bırakabilir?

Çözüm:

Beyaz, kırmızı ve siyah bilyelerin yapılan işlemden sonraki sayılarını b,k,s ile gösterelim. Her adımda bilye sayılarında birer adet değişme olacağından işlem sonucu tek sayıda olanlar çift ve çift sayıda olanlar tek sayıya dönüşür.

$$k \equiv b \equiv s \text{ (mod 2)}$$

durumunda yani farklı renkteki bilye sayılarının hepsi tekse veya hepsi çiftse yapılan işlemler sonucu masada bir bilye kalması mümkün olmaz.

$k \equiv b$ (mod 2) ve $k \not\equiv s$ (mod 2)

durumunda yine aynı nedenle masa üzerinde tek bir beyaz bilye veya tek bir kırmızı bilye kalamaz.

İşlemler sonunda masa üzerinde tek bir bilye kalmasını söyle sağlayabiliriz. Tek bırakmak istediğimiz bilye kırmızı renk olsun. Her adımda bilye sayısının bir azaldığı aşikardır. Belli sayıda hamle sonunda masada 3 adet bilye kalmış olsun (bilyelerin hepsi aynı renk olmasın). Bu bilyelerin dağılımının yukarıda verilen şartlardan dolayı

$b = 0$, $s = 2$ ve $k = 1$

şeklinde veya

$b=2$, $s = 0$ ve $k = 1$

şeklinde olması gerektiğini biliyoruz. Buradan birinci dağılımı incelersek önce birer tane siyah ve kırmızı bilye alınıp onların yerine beyaz bilye koyulur. Sonra birer adet beyaz ve siyah bilye alınarak onların yerine kırmızı bir bilye ilave edilir. Böylece masada tek bir kırmızı bilye kalmış olur.

İkinci dağılıma bakılırsa burada da önce birer adet beyaz ve kırmızı bilye alınarak onların yerine siyah bilye koyulur. Sonra siyah ve beyaz bilyeler alınarak yerlerine kırmızı bilye koyulur. Böylece masada yine tek bir kırmızı bilye bırakılmış olur.

Değişmeyen: Ardışık iki tamsayıdan birisi tek sayı ise diğeri çift sayıdır.

Örnek 21:

8×8 boyutlu satranç tahtasının her hanesine bir tam sayı yazılmıştır. Her adımda 4×4 veya 3×3 boyutlu bir kare seçilip, buradaki her sayıya 1 (bir) eklenebilir. Başlangıç durumu ne olursa olsun sonlu adımda bütün sayıların 2 ile bölündüğü bir durum elde etmek mümkün müdür?

Çözüm:

Üçüncü ve altıncı satırlar dışındaki tüm sayıların toplamını S ile gösterelim.(yani elimizde 3 tane 2×8 tipinde dikdörtgen şeklinde parça var)

3×3 boyutlu bir kare nasıl seçilirse seçilsin S toplamı 6 artar.

4×4 boyutlu bir kare nasıl seçilirse seçilsin S toplamı 8 veya 12 artar.

Görüldüğü gibi S toplamındaki artış hangi işlem yapılırsa yapılsın mod 2'de değişmiyor. O halde başlangıçta S toplamı;

$S \equiv 1 \pmod 2$

olacak şekilde seçilirse yapılan işlemler sonucu;

$S \equiv 0 \pmod 2$

durumu elde edilemez.

Değişmeyen: Birisi tek diğeri çift iki sayının farkı tek sayıdır.

Örnek 22:

Bir sınıfta tahtaya on tanesi 0 (sıfır) ve dokuz tanesi 1 (bir) olmak üzere 19 rakam yazılmıştır. Her adımda tahtadan iki sayı silinerek, silinen sayılar aynıysa 0 (sıfır), farklıysa 1 (bir) yazılıyor. Bu işlem 18 defa yapıldığında tahtada kalan son sayı kaç olur?

Çözüm:

Her adımda üç farklı durum ortaya çıkar. Bunlar;

(0,0) sayıları siliniyorsa 0 yazılır.

(0,1) sayıları siliniyorsa 1 yazılır.

(1,1) sayıları siliniyorsa 0 yazılır.

Birinci durumda tahtadaki sayıların toplamı değişmez. İkinci durumda tahtadaki sayıların toplamı değişmez. Üçüncü durumda ise tahtadaki sayıların toplamı 2 azalır. Buna göre her durumda toplam mod 2'de değişmez. Başlangıçta $9 \equiv 1 \pmod 2$ olduğundan tahtada kalan son sayı 1 olabilir.

Değişmeyen: Birisi tek diğeri çift iki sayının farkı tek sayıdır.

Örnek 23:

1,2,3,………..,13 sayıları yan yana tahtaya yazılıyor. Sonra öğrencilerden bu sayıların aralarına (önlerine) + ve – (artı ve eksi) sembollerini rastgele yerleştirmeleri isteniyor. Elde edilen yeni sayı dizisinin toplamı 0 (sıfır) olabilir mi?

Çözüm:

Bu sayıların toplamının

$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+13 = 91$ tek sayı olduğu görülür. Önüne – (eksi) gelen sayının iki katı toplamdan çıkarılmış olur. Sayının iki katı her zaman çift olduğundan

tek – çift = tek

durumu karşımıza çıkar. Tek sayıdan çift sayıları çıkartarak çift sayıya yani sıfıra ulaşmamız mümkün değildir.

Değişmeyen: Birisi tek diğeri çift iki sayının farkı tek sayıdır.

Bir tamsayını iki katı çift sayıdır

Örnek 24:

20 sepet bir çember üzerine yerleştirilmiştir. 65 elmayı birbirine komşu olan her iki sepetteki elma sayıları arasındaki fark bir olacak şekilde sepetlere yerleştirmek mümkün müdür?

Çözüm:

Komşu sepetlerdeki elma sayılarının arasındaki farkın 1 (bir) olabilmesi için sepetlerdeki elma sayıların ardışık olması gerekir. Yani bir sepette tek sayıda elma varsa hemen yanındaki sepette çift sayıda elma olmalıdır. Bu şekilde devam edilirse sepetlerin 10 tanesinde çift sayıda elma, 10 tanesinde ise tek sayıda elma olduğu görülür. Sepetlerdeki elma sayıları toplamı

10·(tek + çift) = çift

olması gerekir. Ama bize verilen toplam elma sayısı tek olduğu için böyle bir yerleştirmenin imkansız olduğu söylenebilir.

Değişmeyen: Birisi tek diğeri çift iki sayının çarpımı çift sayıdır.

Örnek 25:

Tahtaya 1,2,3,4 ……….,2017,2018 sayıları yazılmıştır. Her hamlede iki sayı silinerek bu sayıların yerine farklarının mutlak değeri yazılıyor. Belli sayıda hamleden sonra tahtada kalan sayı 0 (sıfır) olabilir mi?

Çözüm:

Alınan iki sayının farkının mutlak değeri için aşağıdaki durumlar elde edilir.

$|\text{tek} - \text{çift}| = \text{tek}$

$|\text{çift} - \text{çift}| = \text{çift}$

$|\text{tek} - \text{tek}| = \text{çift}$

Bu durumlar incelenirse tek sayıların adedi değişmiyor ya da iki adet azalıyor. Verilen ardışık sayı dizisinin elemanlarından 2009 tanesi tek sayı, 2009 tanesi ise çift sayıdır. 2009 sayısını ikişer ikişer azaltarak 0 (sıfır)'a ulaşmamız mümkün değildir.

Değişmeyen: Birisi tek diğeri çift iki sayının farkı tek sayıdır.

Örnek 26:

Bir kaplumbağa düz bir zeminde sabit hızla doğrusal olarak yürüyor. Her 15 dakikada bir 90^o dönüyor. Kaplumbağanın sadece tam sayı saatlerde başlangıç noktasına dönebileceğini kanıtlayınız.

Çözüm:

Kaplumbağa 15 dakikalık süreler boyunca doğu, batı, kuzey, güney yönlerde yürüyor. Bu yönler boyunca ilerlediği 15'er dakikalık sürelerin sayılarına sırasıyla *x, y, a ve b* diyelim. Doğuya gittiği sürelerin sayısıyla batıya gittiği sürelerin sayıları eşit ve aynı zamanda kuzeye gittiği sürelerin sayısıyla güneye gittiği 15'er dakikalık sürelerin sayısı eşittir. Yani;

$x = y$ ve $a = b$ dir

Buradan

$x + y + a + b$ toplamının çift sayı olduğu görülür.

Kaplumbağa her 15 dakikada bir 90^o döndüğü için 15 dakika doğu veya batıya gidiyorsa sonraki 15 dakika kuzey veya güney yönünde gitmek zorundadır. Bu durumda $x + y + a + b$ toplamının çift olduğu da göz önüne alınarak;

$$x + y = a + b$$

olduğu görülür. Bu da bizi

$$x = y = a = b$$

eşitliğine götürür. Dolayısıyla kaplumbağanın toplam aldığı yolun süresinin

$$x + y + a + b = 4x$$

tane 15 dakika olduğu görülür. Bu da;

$4x \cdot 15\text{dk} = x$ tane saat demektir.

Değişmeyen: Birisi tek diğeri çift iki sayının çarpımı çift sayıdır.

Örnek 27:

1,2,3, ……… ,n sayılarını $a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots\ldots.. a_n$ dizisinin permutasyonlarından herhangi birine kodlanmış olsun. n tekse,

$T = (a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots\ldots(a_n - n)$

çarpımının çift sayı olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm:

T'nin tek sayı olduğunu kabul edelim. O zaman a_n-n (n = 1,2,3,……k) farklarının her birinin tek sayı olması gerekir. n tek sayı olduğundan

$(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots\cdots + (a_n - n)$

toplamının da tek sayı olması gerekir. Fakat

$(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \cdots\cdots + (a_n - n)$

$(a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n) - (1+2+\cdots\cdots+n) = 0$ olduğu görülür. Bu da çift sayıdır. Bu çelişki bize çarpımın çift sayı olduğunu kanıtlar.

Değişmeyen: Tek adette tek sayının toplamı tek sayıdır.

Örnek 28:

Standart satranç tahtası üzerinde herhangi bir hanedeki at sonlu sayıda adımdan sonra başlangıç hanesine geri dönebilmesi için çift sayıda hamle yapması gerektiğini gösteriniz. (At her hamlede standart hareketini yapmaktadır.)

Çözüm:

At satranç tahtasında beyaz hanede olsun. Standart hamlesini yapınca siyah haneye bir hamle daha yapınca beyaz haneye ulaşır. Aynı şekilde at başlangıçta siyah hanedeyse bir hamle sonunda beyaz haneye sonraki hamledeyse siyah haneye ulaşır. Yani atın bulunduğu hanenin renginde bir haneye ulaşabilmesi için her zaman çift sayıda hamle yapması gerekir.

Değişmeyen: Çift sayıların toplamı çifttir.

BÖLÜM ÜÇ
FARKLI MOD DEĞERLERİ İLE İLĞİLİ UYGULAMALAR

Örnek 29:

Bir fanusta 13 tane bakteri vardır. Kavanozdaki bakteriler bir bakterinin dört parçaya ayrılması yöntemiyle çoğalmaktadırlar. Belli bir sürenin sonunda kavanozda 2017 tane bakteri olabilir mi?**(mod 3)**

Çözüm:

Bakterilerin çoğalma şekline bakarsak her hamlede bakteri sayısının 3 arttığını görürüz. Bu da bize kavanozdaki bakteri sayısının mod 3'te değişmediğini gösterir. Başlangıçtaki bakteri sayısının;

$$13 \equiv 1 \pmod 3$$

olduğu biliniyor. Son durumdaki bakteri sayısı ise;

$$2017 \equiv 1 \pmod 3$$

olduğundan fanusta 2017 bakterinin bulunduğu bir durum olabilir.

Örnek 30:

Üç farklı kutunun içinde sırasıyla 17, 19 ve 21 adet top vardır. Ömer her hamlesinde iki kutu seçip bu kutulardan birer top alıp, bu iki topu seçmediği diğer kutuya koyuyor. Sonlu hamlede Ömer'in tüm topları tek bir kutuya toplaması mümkün müdür?**(mod 3)**

Çözüm:

Genel bir çözüm yapmaya çalışalım. Kutulardaki topların sayısı (x, y, z) olsun. Ömer ilk iki kutuyu seçerek verilen işlemi uygularsa kutudaki topların sayısı (x - 1, y - 1, z + 2) şeklinde olur. Son durumda kutulardaki top sayılarının farkı mod 3'te incelenirse;

$x - y \equiv 1 \pmod 3$

$y - z \equiv 1 \pmod 3$

$z - x \equiv 1 \pmod 3$

olduğu görülür. Yani mod 3'te kutulardaki bilye sayılarının farkları 1'e eşittir. Fakat olması istenen durumda iki kutudaki bilye sayılarının farkının 0 olması isteniyor. Bu da istenen durumun gerçekleşmesinin imkansız olduğunu gösterir.

Örnek 31:

Sayfa numaraları 1,2,3,………..,n şeklinde numaralandırılan bir kitabın değişik yerlerinden 19 yaprak yırtılıyor. Yırtılan yapraklardaki 38 sayfanın sayfa numaraları toplamı 2017 olabilir mi?**(mod 4)**

Çözüm:

$k \in N$ olmak üzere kitaptaki sayfa numaralarını $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$, $4k + 4$ şeklinde ifade edilebilir. Bu sayfa numaraları için;

$4k + 1 + 4k + 2 \equiv 4k + 3 + 4k + 4 \equiv 3 \pmod 4$

olduğu görülür. Yani her yapraktaki sayfa numaralarının toplamı mod 4'te eşit ve 3'tür. 19 yapraktaki sayfa numaralarının toplamı;

$19 \cdot 3 \equiv 3 \pmod 4$

olması gerekir. Ama verilen sayfa numaralarının toplamı;

$2017 \equiv 1 \pmod 4$

olduğundan 2017 olamaz.

Örnek 32:

Bir kapta 2017 tane bakteri vardır. Her hamlede 25 bakteri ölüyor ve ölenlerin yerine bir bakteri ürüyor veya 1 bakteri ölüyor ve onun yerine 13 bakteri oluşuyor. Kaptaki bakteri sayısı en az kaç olabilir? **(mod 4)**

Çözüm:

Birinci durumu göz önüne alırsak kaptaki bakteri sayısı 24 azalıyor. İkinci durumu göz önüne alırsak bakteri sayısı 12 artıyor. Her iki durumda da bakteri sayısındaki değişimin (mod 4)'te aynı olduğu görülür.

$24 \equiv 12 \equiv 0 \pmod 4$

$2017 \equiv 1 \pmod 4$

olduğundan kaptaki bakteri sayısı $k \in Z^+$ olmak üzere $4k + 1$ formundadır. Buradan da mod 4'teki değişmeler sonucu kaptaki bakteri sayısı en az 1 olabilir. Birinci durum 84 kez art arda tekrarlarsa kapta sonuçta 1 bilye kalır.

Örnek 33:

Evinde 2017 tane cevizi olan Ahmet Bey kendisini ziyarete gelen çocuklara her seferinde 18 ceviz veya 33 ceviz veriyor. Ahmet bey evindeki ceviz sayısını en az kaça düşürebilir?**(mod 3)**

Çözüm:

Ahmet Bey'in her seferinde çocuklara verdiği ceviz miktarları 3'ün katıdır.

$18 \equiv 33 \equiv 0 \pmod 3$

$2017 \equiv 1 \pmod 3$

olduğundan Ahmet Bey'in elinde kalan ceviz miktarı en az 1 olabilir. Bu olay şu şekilde gerçekleşebilir. Ahmet Bey eve gelen 30 çocuğa 33'er ceviz, 2 çocuğa da 18'er ceviz verirse elinde 1 ceviz kalmış olur.

Örnek 34:

Bir çember üzerinde eşit aralıklarla 2016 nokta alınarak bu noktalar saat yönünde sırasıyla 1,2,3,4………. ,2016 şeklinde numaralandırılmıştır. 2 noktasında bulunan ve her sıçrayışta 3 aralık (2,5,8,… gibi) ilerleyen bir çekirgenin 2016 sayısının bulunduğu noktaya ulaşması mümkün müdür? **(mod 3)**

Çözüm:

Çekirgenin zıpladığı noktalar $k \in N$ olmak üzere $3k + 2$ formundadır. Başka bir ifadeyle çekirgenin zıpladığı noktaların numaraları mod 3'te 2'ye denktir. Fakat;

$2016 \equiv 0 \pmod 3$

olduğundan çekirge 2016 sayısının bulunduğu noktaya ulaşamaz.

Örnek 35:

Selma elindeki kâğıt parçasını ilk hamlede 5 veya 13 parçaya ayırıyor. Sonra bu parçalardan her birini tekrar 5 veya 13 parçaya ayırıyor. Sonlu hamle sonunda elde edilen kâğıt parçası sayısı 2019 olabilir mi? **(mod 4)**

Çözüm:

Her hamlede kağıt parçalarının sayısı 4 veya 12 adet artıyor. Yani kağıt parçalarının sayısındaki değişim mod 4'te aynıdır. Başlangıçta 1 parça kağıt vardı.

$$1 \equiv 1 \pmod 4$$

Belli bir hamle sayısından sonra ise;

$$2019 \equiv 3 \pmod 4$$

olduğundan kağıt parçalarının sayısının 2019 olması mümkün değildir.

Örnek 36:

$S(n)$; n pozitif tam sayısının rakamları toplamı olmak üzere,

$$n + S(n) + S(S(n)) = 2017$$

denklemini sağlayan kaç farklı n pozitif tam sayısı vardır? **(mod 3)**

Çözüm:

$S(n)$; n pozitif tam sayısının rakamları toplamı olmak üzere;

$$n \equiv S(n) \equiv S(S(n)) \pmod 3$$

olduğundan

$$n + S(n) + S(S(n)) \equiv 0 \pmod 3$$

olmalıdır. Fakat

$$2017 \equiv 1 \pmod 3$$

olduğundan bu denklemin çözümü yoktur.

Örnek 37:

$A = \{3,4,5,6,7,8\}$ kümesinin elemanları kullanılarak yazılabilen rakamları farklı 6 basamaklı sayıların kaç tanesi bir doğal sayının karesidir? **(mod 9)**

Çözüm:

Bir sayının karesinin mod 9'daki değeri 0, 1, 4, 7, 8 sayılarından biridir. Yani;

$$x^2 \equiv 0,1,4,7,8 \pmod 9$$

şeklinde yazılabilir. *A* kümesinin elemanları kullanılarak yazılan 6 basamaklı rakamları farklı sayı *K* olsun. *K* sayısının rakamları toplamı;

$$3+4+5+6+7+8 \equiv 6 \pmod 9$$

olduğundan bu *K* sayısı herhangi bir sayının karesi olamaz.

Örnek 38:

1'den $2n$'ye kadar olan tüm sayılar herhangi bir sıra gözetilmeksizin bir satıra yazılmıştır. Her sayıya, bulunduğu yerin sıra numarasını ekleyelim. Bu ekleme işlemleri sonucu, $2n$'e bölündüğünde aynı kalanı veren en az iki sayının bulunduğunu kanıtlayınız.**(mod 2*n*)**

Çözüm:

1'den $2n$'ye kadar olan sayıları

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ a_{2n}$$

şeklinde yazalım. Her sayıya bulunduğu yerin sıra numarası eklendiğinde elde edilen

$$a_1+1\ , a_2+2,\ a_3+3,\ \ldots\ldots\ldots,\ a_{2n}+2n$$

sayıları $2n$'ye bölündüğünde farklı kalanları veriyorsa, bu kalanlar sıra gözetmeksizin;

$$0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots..,2n-1$$

dir. O halde

$$a_1+1 + a_2+2 + \cdots + a_{2n}+2n \equiv 0+1+2+\cdots+2n-1 \pmod{2n}$$

olmalıdır.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} = 1+2+\cdots+2n$$

olduğundan

$$2\cdot(1+2+\cdots+2n) \equiv 0+1+2+\cdots+2n-1 \pmod{2n}$$

veya

$$\frac{2\cdot 2n(2n+1)}{2} \equiv \frac{(2n-1)2n}{2} \pmod{2n}$$

buradan

$0 \equiv -n \pmod{2n}$

elde edilir. Bu çelişki a_1+1 ,a_2+2, a_3+3, ………, $a_{2n}+2n$ sayılarından, $2n$'ye bölündüğünde aynı kalanı veren ikisinin bulunduğunu kanıtlar.

Örnek39:

Başlangıçta boş olan bir odaya her bir dakikada bir kişi giriyor veya odadan iki kişi ayrılıyor. 3^{2017} dakikanın sonunda odada $3^{2016}+2$ kişinin olması mümkün müdür? **(mod 3)**

Çözüm:

Odada n kişinin bulunduğu bir durumu göz önüne alalım. Bir dakika sonra odada $n + 1$ yada $n - 2$ kişi olur. Bu iki durumdaki kişi sayıları arasındaki fark

$n + 1 - (n - 2) = 3$'tür.

Toplamda geçen iki dakikalık süreden sonra ise odadaki kişi sayıları,

$n - 1 , n + 2 , n - 4$

değerlerinden biri olur. $n + 1$ değerini de göz önüne alırsak bu dört farklı değerden herhangi ikisinin farkı 3'ün katıdır. Bu şekilde devam edildiği takdirde herhangi bir t zamanda odada bulunabilecek kişi sayılarının herhangi ikisinin farkı yine 3'ün katı olur.

Odaya her bir dakika için bir kişi girdiğini düşünelim. 3^{2017} dakika sonunda odada 3^{2017} kişi bulunur. Şu anda odadaki insan sayısı 3'ün katıdır. Odaya girme değil de çıkma olması durumunda 1 kişi odaya girmeyecek 2 kişide çıkacağı için kayıp 3 kişi olacaktır. k dakika sonra odadaki kişi sayısı $3^{2017} - 3k$ formunda olacaktır. bu da odadaki kişi sayısının 3'ün katı olması demektir.

$3^{2016} + 2 \equiv 2 \pmod 3$

olduğundan odada hiçbir zaman $3^{2016} + 2$ kişi bulunamaz.

Örnek 40:

Bir ülkede 13 banka vardır. Ülkedeki demokratikleşme süreci sonunda yeni bankalar açılmak istendi. Kanunlar ise yeni bankaların sadece mevcut olan bir bankanın 4 bankaya bölünmesiyle oluşabileceğini öngörüyor. İki sene sonunda ülkedeki banka sayısı 2018 olabilir mi?**(mod 3)**

Çözüm:

Her bir banka 4 bankaya bölündüğünde banka sayısındaki artış 3 adet olur, yani banka sayısındaki artış mod 3'te değişmez.

$13 \equiv 1 \pmod 3$ ve

$2018 \equiv 2 \pmod 3$

olduğundan banka sayısının 2018 olması mümkün değildir.

Örnek 41:

8×8 boyutlu satranç tahtasının her hanesine bir tam sayı yazılmıştır. Her adımda 3×3 veya 4×4 boyutlu bir kare seçilip, buradaki her sayıya 1 (bir) eklenebilir. Başlangıç durumu ne olursa olsun sonlu adımda bütün sayıların 3 ile bölündüğü bir durum elde etmek mümkün müdür? **(mod 3)**

Çözüm:

Dördüncü ve sekizinci satırlar dışındaki tüm 1×1 boyutlu karelerdeki sayıların toplamını T ile gösterelim. Soruda verilen işlem 3×3 boyutlu bir kare üzerinde uygulandığında T toplamı 6 veya 9 artar. Aynı işlem 4×4 boyutlu bir kare üzerinde uygulandığında T toplamı 12 artar. O halde başlangıçta

$T \not\equiv 0 \pmod 3$

alınırsa yapılan işlemler sonucunda bütün sayıların 3'e bölünmesi sağlanamaz.

Örnek 42:

Matematik öğretmeni Yunus Bey sınıfta tahtaya dört basamaklı 1236 sayısını yazıyor. Sonra sınıfa bu sayı üzerinde aşağıda yazan şekilde değişiklik yapmalarını istiyor.

9'dan farklı olan iki komşu rakamın her birine bir eklenebilir.

0' dan farklı olan iki komşu rakamın her birinden bir çıkarılabilir.

Bu işlemler sonucu 2015, 2016, 2017, 2018 sayılarından hangileri elde edilebilir? **(mod 11)**

Çözüm:

Yapılan her işlem sonucunda 11,110,1100 sayılarından biri sayımıza ekleniyor veya çıkartılıyor. Buradan sayının değerinin mod 11'de değişmediği görülür.

$2015 \not\equiv 1236$, $2016 \not\equiv 1236$, $2018 \not\equiv 1236$

olduğundan bu işlemler sonucu 2015, 2016, 2018 sayıları elde edilemez. 2017 sayısının elde edilebileceğini gösterelim. Önce yüzler ve binler basamağındaki sayılara bir eklenerek 2336 sayısı elde edilir. Sonra onlar ve yüzler basamağındaki sayılardan art arda üç defa bir çıkarılarak 2006 sayısına ulaşılır. Son olarak birler ve onlar basamağındaki sayılara bir eklenerek 2017 sayısı elde edilmiş olur.

Örnek 43:

Bir çember üzerinde eşit aralıklarla n tane nokta işaretlenerek bu noktaların her birine bir delik açılıyor ve deliklere birer adet misket bırakılıyor. Her bir adımda herhangi 2 misketi alıp, aynı anda farklı yönlerde bir delik sonrasına koyuyoruz. Hangi *n* değerleri için tüm misketleri bir delikte toplayabiliriz?

Çözüm:

x_i ile i. delikteki topu gösterelim.

$$S = \sum i x_i$$

ifadesi hiçbir zaman (mod *n*)'de değişmez. Gerçektende işlemi bir kez uyguladığımızda *S* toplamı için üç durum ortaya çıkar. *S* toplamı değişmez, *S* toplamı *n* artar veya *S* toplamı *n* azalır. Yani *S* toplamı (mod *n*)'de değişmez.

Soruda istenen durumun gerçekleştiğini varsayalım. En sonunda *n* top da bir delikte toplanır ve $S = n{\cdot}k$ (k$\in$ {1, 2,….,m}) olur. *S* değerleri (mod *n*) değişmediğinden

$$\sum_{1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$$

olur. *n* ve *n* + 1 sayıları aralarında asal olduğundan bu denkliğin gerçekleşmesi için *n* sayısı tek sayı olmalıdır.

Örnek 44:

2^{2017} sayısının ilk rakamını silip bunu geriye kalan sayıya ekliyor ve bu işlemi 10 basamaklı bir sayı elde edene kadar tekrarlıyoruz. Son sayının en az iki basamağındaki rakamların aynı olduğunu ispatlayınız. **(mod 9)**

Çözüm:

Bir sayının ilk basamağı silinip bu sayı geride kalan sayıya eklendiğinde sayının değeri mod 9'da değişmez. İlk sayının mod 9'daki değerini bulalım.

$2^{1996} = (2^3)^{672}.2 \equiv 2 \pmod{9}$'dur.

O halde elde edilen 10 basamaklı a sayısı için

$a \equiv 2 \pmod{9}$

olmak zorundadır.

a nın tüm basamakları birbirinden farklı olsaydı

$a = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 9 = 45 \equiv 0 \pmod{9}$

olacaktı. Dolayısıyla böyle bir durum mümkün olamaz.

Örnek 45:

Üç basamaklı bir *abc* sayısının birler ve yüzler basamağı yer değiştirilerek *cba* sayısı elde ediliyor. Bu iki sayının farkının mutlak değeri alınarak yeni bir bir sayı elde ediliyor. Elde edilen yeni sayı üç basamaklı ise bu işlem sayı üzerinde uygulanmaya devam ediyor. Böyle devam edilirse mutlaka 99'a veya 0'a ulaşabileceğimizi kanıtlayınız. **(mod9)**

Çözüm:

$abc \equiv cba \pmod{9}$

olduğundan bu iki sayının farkının mutlak değeri 0 olabilir. (rakamlar aynı ise) 0 değilse de yeni elde edilen sayı 9 ile tam bölünür ve onlar basamağı 9 olur. Yani yeni elde edilen sayıyı $a_1b_1c_1$ ile gösterirsek, bu sayı

$a_1b_1c_1 = \{99,198,297,\ldots\ldots\ldots\ldots 990\}$

sayılarından birine eşittir.

$a_1b_1c_1 = 990$

alınırsa soruda verilen işlem uygulandığında aşağıdaki sayı dizisi elde edilir.

891,693,297,495,99

Eğer $a_1b_1c_1$ sayısı

198,297,………..891

sayılarından biri olursa o zaman yukarıdaki sayı dizisinin bir alt dizisini elde ederiz.

Örnek 46:

1’den 1000000’a kadar her sayının basamakları toplamını alalım; sonra elde edilen her sayının basamakları toplamını alalım vs., 1000000 tane bir basamaklı sayı elde edilene kadar. Bu sayılar arasında 1’ler mi, yoksa 2’ler mi daha çoktur?**(mod 9)**

Çözüm:

s(a), a sayısının basamakları toplamını göstermek üzere $a \equiv s(a)$ (mod 9) olduğundan, işlemler sonucu sayılar 9 modunda değişmeyecek, dolayısıyla son elde edilen sayılar arasındaki 1’lerin sayısı, 1’den 1000000’a kadar, mod 9’da 1’e eşit olan sayıların sayısına, 2’lerin sayısı da mod 9’da 2’ye eşit olan sayıların sayısına eşittir. Birincilerin sayısı ikincilerden 1 fazla olduğundan 1’lerin sayısı da 1 fazladır.

Örnek 47:

Masa üzerinde b tane beyaz, s tane siyah ve k tane kırmızı bilye bulunsun. Ahmet bu bilyelerle şöyle bir oyun oynuyor. Her seferinde masanın üzerinden iki farklı renkte birer bilye alıp onların yerine üçüncü renkte iki bilye bırakıyor. Ahmet bu işlem sonucunda *b,k,s*’nin hangi değerleri için masada tek renk bilye bırakabilir?

Çözüm:

Beyaz, siyah ve kırmızı bilyelerin sayıları *b,s* ve k olmak üzere oyunun ilk hamlesinden sonra masa üzerindeki bilye sayıları aşağıdaki üç durumdan biri olur.

$$(b+2,\ s-1,\ k-1)$$
$$(b-1,\ s+2,\ k-1)$$
$$(b-1,\ s-1,\ k+2)$$

Bu durumların üçünde de aşağıda görüleceği gibi b ve s sayıları mod3’te aynı değişime uğruyorlar.

$$(b+2)-b \equiv (s-1)-s \pmod 3$$
$$(b-1)-b \equiv (s+2)-s \pmod 3$$
$$(b-1)-b \equiv (s-1)-s \pmod 3$$

Aynı durum b ile k ve s ile k içinde geçerlidir. Bu işlemler sonucunda $b = s = 0$ olması isteniyorsa en başta $b \equiv s$ (mod 3) olması gerekirdi. Başlangıçta verilen b, k ve s sayıları mod 3’te birbirinden farklı iseler yapılan işlemler sonucu tüm bilyelerin aynı renkten olmasını sağlamak mümkün değildir. Masada tek renk bilye kalan durumları şu şekilde gösterebiliriz;

$b \equiv s$ (mod 3)

olsun. ($b \equiv k$ (mod 3) ve $k \equiv s$ (mod 3) durumları da benzer şekilde gösterilebilir.) $b = s$ ise, her hamlede siyah ve beyaz bilye alıp yerlerine iki kırmızı bilye bırakarak bilyelerin hepsinin kırmızı renkte olması sağlanabilir. $b < s$ ise, ($b \equiv s$ (mod 3) şartı unutulmamalı) alınan bilyelerden birinin siyah olmasına dikkat ederek, siyah bilyelerin azalması ve beyaz bilyelerin artması sonucunda siyah ve beyaz bilyelerin sayısı eşitlenebilir. Böylece yukarıda verilen $b = s$ durumuna ulaşılmış olur. $b < s$ ve $k = 0$ durumunda ise siyahlar her adımda azalırken beyazların sayısında geçici olarak artmalar gözlenebilir. $b > s$ durumunda ise $b < s$ durumunda beyaz ve siyah bilyeler için yapılan işlemler, siyah ve beyaz bilyelere uygulanarak masada kırmızı bilyelerin kalması sağlanabilir.

Örnek 48:

1, 0, 1, 0, 1, 0, 3, 5, 0, 9, …. dizisinde 7.'den başlayarak her terim bundan önce gelen son 6 terimin toplamının 10'a bölündüğünde elde edilen kalana eşittir. Bu dizide ….., 0, 1, 0, 1, 0, 1,….. alt dizisine rastlanmayacağını kanıtlayınız.

Çözüm:

Her $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ altılısına:

$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \equiv 2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+2x_6 \pmod{10}$

sayısını karşılık getirelim. Bu bizim değişmezimizdir.

$x_7 \equiv x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \pmod{10}$ ise

$F(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) - F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \equiv 2x_2+4x_3+6x_4+8x_5+2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - (2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+2x_6) \equiv 0 \pmod{10}$

olduğundan dizide art arda gelen herhangi $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sayıları alındığında $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ sayısı 10 modunda hep aynı olacaktır.

$F(1, 0, 1, 0, 1, 0) \equiv 8 \not\equiv 4 \equiv F(0, 1, 0, 1, 0, 1) \pmod{10}$

olduğundan 0, 1, 0, 1, 0, 1 alt dizisine rastlanmaz.

Örnek 49:

Elemanları bilyelerden oluşan birkaç küme verilsin. Her adımda bu kümelerden eleman sayısı en az 3 olan birini alarak ona şöyle bir işlem uygulayalım. Seçilen kümeden bir bilye ayırarak geriye kalan bilyeleri iki gruba ayıralım. (Bu iki küme boş olmasın fakat aynı sayıda bilye içermek zorunda değiller.) Başlangıçta 2018 bilye içeren tek küme verilmişse, belli sayıda adım sonra 3 bilye içeren kümeler elde etmek mümkün müdür? **(mod 3)**

Çözüm:

n. adımdan sonra böyle bir duruma ulaşabildiğimizi varsayalım. Her adımda bilye sayısı 1 azaldığından n adımda bilye sayısı n kadar azalır ve elde edilen k adet kümenin hepsinde 3'er bilye kaldığı düşünülürse bu durum şu şekilde ifade edilebilir;

$$2018 - n \equiv 3 \cdot k \equiv 0 \pmod 3$$

buradan

$$n \equiv 2 \pmod 3$$

olması gerektiği görülür. O zaman m pozitif tamsayı olmak üzere $n = 3m - 1$ şeklinde yazılabilir. Her adımda küme sayısı 1 arttığına göre n adımda $n + 1 = 3m$ küme bulunur.

n. adımda elimizde bulunan kümelerdeki bilye sayısını şu şekilde bir denklemle ifade edebiliriz;

$$3(3m) = 2018 - (3m - 1)$$

bu işlem devam ettirilirse;

$m = (2017/12) \notin Z$ bulunur. Bu çelişkide bize böyle bir durumun mümkün olmadığını gösterir.

Örnek 50:

Ocak 2016'da 1 madalya alan İpek'in başarılarını takip eden bir gazeteci Şubat ayından başlayarak her ay, bir önceki aya göre 1 fazla ya da 2 eksik tane madalya aldığını farketti ve 2016 yılı boyunca toplam 55 madalya aldığını iddaa etti. Değişmezlik konusunda ders alan İpek gazeteciye de aynı dersi almasını tavsiye etti. Neden?

Çözüm:

İpek'in her ayın sonunda sene başından itibaren aldığı madalyaların toplam sayısının mod 3'teki değişimi incelenirse yıl sonunda alması gereken madalya sayısının mod 3'te sıfır olması gerektiği görülür.

$$55 \equiv 1 \pmod 3$$

olduğundan bu şartlarda toplam madalya sayısının 55 olamayacağı görülür.

Örnek 51:

1 veya -1 den sayılarından oluşan n elemanlı bir sayı dizisi verilmiş olsun. Dizideki sayıları $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$ şeklinde kodlayalım. Eğer bu sayılar aşağıda verilen eşitliği sağlıyorsa n sayısının 4'ün katı olduğunu gösteriniz. **(mod 4)**

$$S = a_1a_2\, a_3a_4 + a_2a_3\, a_4a_5 + \ldots\ldots\ldots + a_na_1a_2\, a_3 = 0$$

Çözüm:

Sırayla -1 e eşit olan terimlerin her birinin yerine 1 yazalım. $a_i = -1$ elemanını 1'e çevirdiğimizde bu elemanın içinde bulunduğu 4 adet çarpım ifadesinin sonucu değişeceğinden buna bağlı olarak S toplamı da değişir. Şimdi oluşabilecek durumları tek tek inceleyelim;

4 adet çarpım ifadesinin sonucu pozitifse bu değişiklik sonrası negatif olurlar ve S toplamı 8 azalır. 3'ü pozitif ve 1 tanesi negatif ise S toplamı 4 azalır. 2'si pozitif 2'si negatif ise S toplamı değişmez. 1'i pozitif 3 tanesi negatif ise verilen değişiklik sonrası pozitif olanlar negatif ve negatif olanlar pozitif olacağından S toplamı 4 artar. Hepsi negatif ise S toplamı 8 artış gösterir.

Buradan da görüldüğü gibi S toplamı 4 modunda değişmez. Sayıların hepsi 1 olduktan sonra S toplamı n'ye eşit olacağından, $n \equiv 0 \pmod 4$ olduğu görülür.

Örnek 52:

1, 2, 3, …………. ,n şeklinde numaralandırılmışn tane priz bir çember üzerine eşit aralıklarla yerleştirilmiştir. Aynı zamanda sırasız numaralandırılmış n tane fiş (numaralar 1'den n'e kadar) her adımda 1 rotasyon ile prizlere takılıyor. Hangi n değerleri için her takma işleminde en az bir fiş ile aynı numaralı bir priz denk gelir.

Çözüm:

x_1, x_2, ……… , x_n ile fişlerin numaralarını gösterelim. Eğer x_k sayısı p rotasyon ile k. yere denk geliyorsa, bu sayı ilk başta $x_k - p$ veya $(x_k - p + n)$. yerdedir. Sorudaki varsayımın doğru olduğunu düşünelim. Bu durumda her bir sayı 1 rotasyon durumunda kendi yerine gelebileceği için, bulundukları yerleri $x_k - p$ cinsinden ifade etmek gerekirse

$$x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n - 1 - 2 - 3 \dots\dots\dots - n$$

toplamına (mod n)'de denk olur. Çünkü herbir sayı birbirinden farklı ve rotasyon sayıları da farklıdır. O zaman bu toplam 0'a eşittir.

$$0 \equiv 1 + 2 + 3 + \dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ (mod n) (sağ taraf yerlerinin diğer bir ifadesidir)

Bu eşitliğin n'nin tek sayı değerleri için sağlandığı görülür.

BÖLÜM 4

FARKLI YÖNTEMLER KULLANILARAK ÇÖZÜLEBİLEN SORULAR

Örnek 53:

n + 1 tane öğrencimiz ve n tane hikaye kitabımız olsun. Her öğrencinin okuduğu hikaye kitabı sayısı farklı olmak üzere her hikaye kitabını aynı sayıda öğrenci okumuştur. Hikaye kitaplarının sayısı için ne söylenebilir?

Çözüm:

n + 1 tane öğrencinin her birinin okuduğu hikaye kitabı sayısı farklı olmak üzere bu sayılar 0, 1, 2, ………. , n sayılarından birisidir. n+1 tane öğrencinin her bir tanesi bu sayı dizisinden bir elemanla eşleşir. Böylece toplam okunma sayısı;

$$0+1+2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

olarak bulunur. Her bir hikaye kitabı $k \in \mathbb{Z}^+$ kez okunmuş olsun. Bu durumda toplam okuma sayısı;

$$k\cdot n$$

dir. İki farklı yoldan bulunan okunma sayıları birbirlerine eşitlenirse

$$k\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$$

elde edilir. Buradan $n = 2k$-1 bulunur bu da n sayısının tek tam sayı olduğunu bize gösterir.

Örnek 54:

($n \geq 2$) olmak üzere n adet pozitif tamsayıyı x_1, x_2, x_3,……………., x_n şeklinde kodlayalım. Her adımda aşağıda gösterildiği gibi dizinin ardışık iki elemanının aritmetik ortalaması alınarak yeni diziler elde ediliyor.

$$(x_1, x_2, x_3,\ldots\ldots\ldots, x_n) \text{ ------> } \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \ldots\ldots.., \frac{x_n+x_1}{2}\right)$$

Bu şekilde devam edildiği takdirde sonlu adım sonra elde ettiğimiz dizinin elemanlarının tamsayı olmayan sayılardan oluşacağını gösteriniz.

Çözüm:

İlk olarak dizideki en büyük ve en küçük sayı arasındaki farkın daima azaldığını gösterelim.

(x_i , y_j) = (dizideki en küçük sayı , dizideki en büyük sayı)

olmak üzere, 2. dizideki en küçük ve en büyük sayıları

$\left(\frac{x_r+x_{r+1}}{2}, \frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) = (\text{dizideki en küçük sayı}\, , \text{dizideki en büyük sayı})$

şeklinde gösterelim.

$x_i < x_r$ ve $x_i < x_{r+1}$ olduğundan $x_i < \frac{x_r+x_{r+1}}{2}$ olur.

Benzer şekilde;

$x_k + x_{k+1} < 2x_j$ buradan da $x_j > \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$

olduğu görülebilir. Yani dizinin terimlerinin kullanıldığı sayı aralığının daraldığı görülür. Sonlu adım sonunda ya tüm sayılar bir a sayısına eşitlenir ya da hiçbiri tamsayı olmaz. İlk durumun mümkün olmadığını gösterelim.

Elemanları birbirine eşit olamayan ($z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n$) dizisini ele alalım. Fakat bir sonraki hamlede;

$$\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{z_2+z_3}{2} = \cdots = \frac{z_n+z_1}{2}$$

olsun. Dolayısıyla;

$$z_1 = z_3 = \cdots \ , \ z_2 = z_4 = \cdots$$

olur. n tekse z_i ‘lerin hepsi eşittir ve bu sonuç bizim varsayımımızla çelişir. n çiftse z_i dizisi;

($a, b, a, b, \ldots\ldots\ldots$)

formatındadır. Buradan da

$$\frac{y_1+y_2}{2} = a, \ \frac{y_3+y_4}{2} = a, \ldots\ldots.., \frac{y_{n-1}+y_n}{2} = a \ \text{ ve}$$

$$\frac{y_2+y_3}{2} = b, \ \frac{y_4+y_5}{2} = b, \ldots\ldots.., \frac{y_n+1}{2} = b$$

olan ($a, b, a, b, \ldots\ldots\ldots$) dizisinden bir önceki hamlede elde edilen ($y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$) dizisine ulaşabiliriz. Bu durumda b’ ye eşit olan ifadelerin toplamı a’ya eşit olan ifadelerin toplamına eşit olur. Yani;

$a = b$

olur. Bu da varsayımımızla çelişir. sonuç olarak ($a, a, a, \ldots\ldots\ldots, a$) dizisi elde edilemez.

Örnek 55:

1,2,3,4,…………. ,2020 sayıları tahtaya istenilen sırayla yazılıyor. Daha sonra her bir adımda komşu iki sayı siliniyor ve bunların yerine bu sayıların farkının mutlak değeri yazılıyor. Bu işlem tahtada bir sayı kalana kadar devam ettirilirse tahtada kalan en son sayı en çok kaç olabilir?

Çözüm:

Yapılan işlemler sonucunda tahtadaki en büyük sayıdan daha büyük bir sayı elde edilemez. Çünkü negatif olmayan iki sayının farkının mutlak değeri bu sayıların büyük olanından daha küçük olur. İlk adımdan sonra elde edilebilecek en büyük sayı 2019 ve en küçük sayı 1'dir. Bu işlemlerden sonra ikinci adımda elde edilebilecek en büyük sayı 2018'tir. Bu da tahtada 2018'den büyük sayının elde edilememesi demektir. Şimdi 2018 sayısını tahtada nasıl bırakabileceğimizi gösterelim.

Tahtadaki sayıları;

2020, 1, 2, 3,……………., 2019

şeklinde yazalım. Bunlara verilen işlemi aşağıdaki gibi uygulayalım

$|2020-1|, |2-3|, \ldots\ldots\ldots, |2018-2019|$

2019, 1, 1,…………….,1

sayı dizisini elde ederiz. Soruda verilen işlem bu sayı dizisindeki elemanlara aşağıdaki gibi bir defa daha uygulanırsa

$|2019-1|, |1-1|, \ldots\ldots\ldots, |1-1|$

2018, 0, 0,…………..,0

dizisini elde ederiz. Buradan itibaren devam edildiği takdirde tahtada kalan son sayı 2018 olur.

Örnek 56:

Yirmi kart verilmiştir. 0'dan 9'a kadar olan sayıların her biri bu kartlardan ikisinin üzerine yazılmıştır. Bu kartları öyle sıralamak mümkün müdür ki, 1 yazılmış kartlar arasında tam 1 kart olsun, 2 yazılmış kartlar arasında tam 2 kart olsun vs., 9 yazılmış kartlar arasında 9 kart olsun?

Çözüm:

Böyle bir sıralamanın mümkün olduğunu varsayalım. ilk 0 sayısı a_0., ilk 1 sayısı a_1., vs. ilk 9 sayısı a_9. sırada gelmiş olsun. O halde ikinci 0 sayısı (a_0 + 1)., ikinci 1 sayısı (a_1 + 2)., vs. ikinci 9 sayısı (a_9 + 10). sırada gelmiş olacak. Tüm sayıların sıraları 1, 2, ….. , 20 olacağından bu sıraları aşağıdaki şekilde iki yolla toplayabiliriz.

$$a_0 + a_0 + 1 + a_1 + a_1 + 2 + \ldots\ldots + a_9 + a_9 + 10 = 1 + 2 + \ldots\ldots + 20$$

$$2(a_0 + a_1 + \ldots.+ a_9) = \frac{20\cdot21}{2} - \frac{10\cdot11}{2} = 155$$

155 tek sayı olduğundan çelişki elde edilir. Böyle bir sıralamanın mümkün olmadığı görülür.

Örnek 57:

Matematik öğretmeni Yavuz Bey sınıfta tahtaya 1, 2, ……. , 29, 30 sayılarını yazarak tahtaya kaldırdığı öğrencisi Bülent'e sayılar üzerinde yapması gereken işlemi şöyle tarif ediyor. Her adımda tahtada seçtiğin iki sayı a ve b olmak üzere bu iki sayıyı silip yerlerine $a\cdot b+a+b$ yazarak işlemlere devam edersen tahtada kalan son sayı kaç olur?

Çözüm:

Sayılarımıza

$$a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots., a_{30}$$

diyelim. a_1 ve a_2 seçildiğinde yerlerine yazılan sayı için aşağıdaki işlem yapılabilir.

$$a_1\cdot a_2 + a_1 + a_2 = (a_1 + 1)(a_2 + 2) - 1$$

Bu yeni elde ettiğimiz sayıyı a_3 sayısı ıle yukarıdaki şartlar altında işleme sokarsak

$$a_3\cdot[(a_1 + 1)(a_2 + 2) - 1] + a_3 + (a_1 + 1)(a_2 + 2) - 1$$

$$(a_1 + 1)(a_2 + 2)(a_3 + 1) - 1$$

elde edilir. Bu işlemler bu şekilde devam ettirilirse 29. adımda

$$(a_1 + 1)(a_2 + 2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(a_{30} + 1) - 1$$

İfadesi elde edilir. $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{30}$ sayıları yerlerine yazılarak tahtada kalan son sayı

$$2\cdot3\cdot4\cdot5\cdots\cdots\cdots31 - 1 = 31! - 1$$

bulunur.

Örnek 58:

2,4,6……,200 sayıları verilmiş olsun. her adımda bu sayılardan ikisini silerek yerlerine bu sayıların toplamının üç eksiğini yazalım. İşlemlere bu şekilde devam edersek sonlu adım sonunda tahtada kalan tek sayı kaç olur?

Çözüm:

Sayılarımızı

$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_{100}$ şeklinde gösterelim.

a_1 ve a_2 sayıları için

$$a_1 + a_2 - 3$$

elde edilir. a_3 ve $a_1 + a_2 - 3$ sayıları için

$$a_1 + a_2 + a_3 - 2\cdot3$$

elde edilir. İşlemler bu şekilde devam ettirilirse en son elde edilecek sayı;

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{100} - 99\cdot3$$

$$100\cdot101 - 99\cdot3 = 9803$$

olarak bulunur.

Örnek 59:

5×5 boyutlu bir tabloda, her 1×1'lik kareye her satırındaki sayıların çarpımı negatif olacak şekilde 25 sayı yazılmıştır. Üzerindeki sayıların çarpımı negatif olan sütun sayısı en az kaç adettir?

Çözüm:

Her satırdaki sayıların çarpımı negatif ise satırlardaki sayıların çarpımıyla elde edilen 5 sayının çarpımı (yani tüm sayıların çarpımı) negatiftir. Sütunlardaki sayıların çarpımı da tüm sayıların çarpımına eşit olduğuna göre o da negatiftir. Bu durumda en az bir sütun üzerindeki sayıların çarpımı negatif olmalıdır. Bu duruma örnek şu şekilde verilebilir. 1. sütundaki tüm elemanlar negatif, tablodaki diğer elemanlar pozitif seçilirse istenen durum gerçekleşmiş olur.

Örnek 60:

Yunus hangisinin kaç gram olduğunu bilmediği 1,2,3, ……. ,20 gramlık 20 adet parayı bir kutuya koyuyor. Yunus kutudan rastgele iki para çekerek bunlardan hangisinin daha ağır olduğunu arkadaşına soruyor. Fakat hangi paranın ağır olduğunu öğrenmeden önce bu işin karşılığı olarak arkadaşına kutudan bir para veriyor. Sonlu sayıda işlem sonunda Yunus kutudan çektiği iki adet madeni paranın ağırlıkları toplamının 33'den küçük olmadığını garantileyebilir mi?

Çözüm:

Madeni paraları

$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, P_{30}$

şeklinde isimlendiren Yunus paraları 15'erli iki gruba ayırır. Yunus önce P_1'i arkadaşına verir ve ondan P_2 ve P_3'ü karşılaştırmasını ister. Sonra bunlardan hafif olanı arkadaşına verir ve ağır olanla P_4'ü karşılaştırır, hafif olanı arkadaşına verir. Bu işlemi P_{14}'e kadar devam ettirir ve buradaki 13 adet paranın (P_1 yok çünkü daha ağırlığı hakkında yorum yapamadan arkadaşına vermişti) en ağırını P_{15} ile karşılaştırır, hafif olanını arkadaşına verir. Böylece $P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, P_{15}$ grubundaki paraların en ağırını tespit etmiş olur. Biz bu paraya P_n diyelim. P_n'nin 13 adet paradan daha ağır olduğunu biliyoruz. Yani

$P_n > 13$

$P_n \geq 14$ olur.

Yunus ikinci gruptaki paraları karşılaştırmaya P_{16} ve P_{17} ile başlayarak birinci gruptaki paralar için yaptığı işlemleri tekrar eder. Her seferinde hafif parayı arkadaşına verir ve bir sonraki parayla elindekini kıyaslar. İkinci gruptaki paraların en ağırına P_m diyelim.

$P_m > 14$

$P_m \geq 15$ olur.

Son adımda Yunus arkadaşından P_n ve P_m'i kıyaslamasını ister. Burada iki durum ortaya çıkar.

- P_n daha ağır ise P_m'den ve onun daha ağır olduğu 14 sayıdan da daha ağırdır $P_n \geq 29$ olur. $P_m \geq 15$ olduğunu biliyoruz. Buradan
  $P_m + P_n \geq 34$ bulunur.
- P_m daha ağır ise P_n'den ve onun daha ağır olduğu 13 sayıdan da daha ağırdır $P_m \geq 29$ olur. $P_n \geq 14$ olduğunu biliyoruz. Buradan
  $P_m + P_n \geq 33$ bulunur.

O halde Yunus seçtiği iki paranın ağırlıkları toplamının 33'den küçük olmadığını garantileyebilir.

Örnek 61:

Ahmet bir elmayı 20 veya 14 parçaya ayırıyor. Daha sonra bu parçalardan birini alarak tekrar 20 veya 14 parçaya ayırarak bu işleme böylece devam ediyor. Sonlu adım sonunda 1!+2!+3!+……………….+2017! Sayısı kadar parça elde edebilir mi?

Çözüm:

Ahmet bir elmayı 20 parçaya ayırdığında parça sayısı 19 artarken elmayı 14 parçaya ayırdığında parça sayısı 13 artar. 20 parçalık hamle sayısı x ve 14 parçalık hamle sayısı y olsun. $x + y$ hamle sonunda eldeki parça sayısına bağlı denklem

$$1 + 19x + 13y = 1!+2!+3!+\ldots+2017!$$

$$19x + 13y = 2!+3!+\ldots+2017!$$

elde edilir.

$$\text{obeb}(19,13) \mid 2!+3!+\ldots+2017!$$

olduğundan denklemin tamsayılarda çözümü vardır. Pozitif tamsayılardaki çözümü elde edebilmek için söyle bir gruplama yapmak gerekir;

$$2!+3!+\ldots+2017! = (2!+3!+4!+5!) + (6!+8!) + (7!+9!+10!) + (11!+12!) + (13!+14!+\ldots+2017!)$$

şeklinde yazılabilir.

$$2!+3!+4!+5! = 8 \cdot 19$$

$$6!+8! = 6! \cdot 19 \cdot 3$$

$$7!+9!+10! = 7! \cdot 61 \cdot 13$$

$$11!+12! = 11! \cdot 13$$

$$13!+14!+\ldots+2017! = 13 \cdot k \text{ (13 parantezine alınabilir)}$$

buradan da görüldüğü gibi 2!+3!+…….+2017! sayını x ve y tamsayılar olmak üzere $19x + 13y$ şeklinde yazabiliriz. Yani Ahmet'in elmayı istediği kadar parçaya ayırması mümkündür.

Örnek 62:

5×5 lik bir tablonun her bir birim karesine 1,2,3,4,…..,25 sayıları ardışık sayılar ortak bir kenarı paylaşan birim karelerde yer alacak şekilde yazılıyor. Buna göre bu tablonun bir satırında en fazla kaç asal sayı olabilir?

Çözüm:

5×5'lik tabloyu sol alt köşedeki birim kare siyah olacak şekilde satranç tahtası gibi boyayalım. Tablonun 25 birim karesinden 13 tanesi siyah ve 12 tanesi beyaz renktedir. Ardışık iki sayıdan birinin tek ve birinin çift olduğunu biliyoruz. Ayrıca 2'den büyük asal sayıların tek olduğunu da biliyoruz. Siyah karelerde tek sayılar ve beyaz karelerde çift sayılar olacak şekilde bir yerleştirme yapıldığında bir satırda en çok dört asal sayı olabilir. Her bir satırda en az 2 beyaz kare vardır bunlardan sadece bir tanesi asal olabileceğinden bir satırda 5 tane asal sayı olması mümkün değildir. Örnek durum yandaki gibidir.

21	20	11	10	9
22	19	12	1	8
23	18	13	2	7
24	17	14	3	6
25	16	15	4	5

Örnek 63:

30 kişilik bir sınıfta düzenlenen bir satranç turnuvasında bütün öğrenciler birbirleriyle maç yapmıştır. Turnuva sonucunda katılımcılardan her birinin kazandığı ve berabere kaldığı maçların sayısı aynı olabilir mi?

Çözüm:

(i = 1, 2, 3,………, 30) olmak üzere i. katılan kişinin kazandığı maç sayısı n_i ve kaybettiği maç sayısı m_i olsun. Her katılan yarışmacının kazandığı maç sayısı berabere kaldığı maç sayısına eşittir. Her katılımcı toplamda 29 maç yapmıştır. Bu bilgileri göz önüne alarak

$$2n_i + m_i = 29$$

denklemi elde edilebilir. Ayrıca her bir kişinin kazandığı maçı diğer yarışmacı kaybettiği için toplamda kazanılan maçların sayısı ile kaybedilen maçların sayıları eşit olduğundan

$$\sum_{i=1}^{20} n_i = \sum_{i=1}^{20} m_i$$

olur. Böylece

$$\sum_{i=1}^{20} 19 = \sum_{i=1}^{20} (2n_i + m_i) = 2\sum_{i=1}^{20} n_i + \sum_{i=1}^{20} m_i = 3\sum_{i=1}^{20} n_i$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafı mod 3'te denk olmadığından, problemde bahsedilen durumun gerçekleşmesi mümkün değildir.

Örnek 64:

Bir masa etrafında oturan 10 arkadaşın her birinin banka hesabında sıfırdan farklı pozitif veya negatif bir gerçek sayı yazılmıştır. Arkadaşlardan her biri sırayla diğer 9 kişinin her birinin hesabına (işlemlerden önceki) kendi hesabındaki miktarın $\frac{1}{9}$'unu ekliyor, kendisininkine ise 0 yazıyor. Onuncu işlemden sonra bankacıların hesaplarındaki sayıların baştaki duruma gelemeyeceğini gösteriniz.

Çözüm:

Arkadaşların banka hesaplarındaki pozitif sayıların toplamını p ile gösterelim. Hesabında işlem yapılan bankacının parası a ve $a < 0$ olsun. Bu durumda herkesin hesabına negatif bir ekleme yapıldığı için p sayısı artmaz. Hesabında işlem yapılan bankacının parası a ve $a > 0$ olsun. Bu durumda p sayısı en az $\frac{a}{9}$ kadar azalır. Hesabındaki para sıfırdan farklı olan ilk bankacının işleminden sonra p azalacak ve hiç artmadığı için ilk baştaki duruma dönülmesi hiçbir zaman mümkün olmayacaktır.

Örnek 65:

$x_0 = 10$ ve $y_0 = 11$ olmak üzere $n \geq 11$ tamsayısı için

$$x_{n+1} = \frac{3x_n - 4y_n}{5}, \quad y_{n+1} = \frac{3y_n + 4x_n}{5}$$

eşitlikleri veriliyor. $x_{100}^2 + y_{100}^2$ toplamının sonucu kaçtır?

Çözüm:

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = \left(\frac{9x_n^2 + 16y_n^2 - 24x_n\, y_n}{25}\right) + \left(\frac{16x_n^2 + 9y_n^2 + 24x_n\, y_n}{25}\right)$$

$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = x_n^2 + y_n^2$ ifadesi bizim için bir değişmezdir.

$$x_{100}^2 + y_{100}^2 = 10^2 + 11^2 = 221$$

bulunur.

Örnek 66:

$m \times n$ boyutlu tablonun tüm hanelerine tam sayılar yazılmıştır. Her adımda herhangi bir satır veya sütundaki tüm sayıların işareti tersine çevrilerek bir oyun oynanıyor. Sonlu adımda her satır ve sütundaki sayıların toplamının negatif olmadığı (sıfır olabilir) bir durumun elde edilebileceğini kanıtlayınız.

Çözüm:

Satır ve sütun toplamlarını kontrol ederek toplamları negatif olanları tespit edelim. Sonra her bir adımda toplamları negatif olan satır veya sütundaki sayıların işaretlerini tersine çevirelim. Tablodaki tüm sayıların toplamı *S* olsun. *S* toplamı aynı zamanda tablodaki tüm satırlardaki (sütunlardaki) sayıların toplamına eşit olduğundan her adımda *S* sayısı büyümüş olur. bu satır veya sütun işlemini kaç kez tekrar edersek edelim tablodaki her sayı iki farklı değer (başlangıçta *x* ise alabileceği değerler *x* veya -*x*'tir) alabilir. Bu da bize *S* toplamının alabileceği değer sayısının en fazla 2^{mn} olduğunu gösterir. Buradan da *S* sayısındaki büyümenin sonsuza kadar sürdürülemez ve bir yerde işlemlere son vermek zorunda kalırız. Bu her satırdaki veya sütundaki sayıların toplamının negatif olmadığı durumun elde edildiğini bize gösterir.

Örnek 67:

Öğlen vakti (saat 12:00'da) üç sinek sanki anlaşmışlar gibi biri saatin akrebinin üzerine, ikincisi yelkovanın üzerine, üçüncüsü ise saniyeyi gösteren kadranın üzerine kondular. Kadranlardan biri diğerine yetiştiğinde üzerlerinde bulunan sinekler yer değiştirmektedir. (saniye göstergesi aynı zamanda yelkovana ve akrebe yetiştiği zaman saniye göstergesi ve akrep üzerindeki sinekler yer değiştirmektedir.) Bu durumda gece yarısına kadar sineklerin her biri merkez etrafında kaç tam tur atmıştır?

Çözüm:

Koşulları dikkatli incelediğimizde sineklerin birbirlerini geçmediklerini görürüz. Dolayısıyla iki sineğin dönme sayısı arasındaki fark en fazla 1 olabilir. 12 saat içinde (gece yarısına kadar) akrep 1 kez, yelkovan 12 kez ve saniye kadranı 720 defa merkez etrafında dönüş yapmıştır. O halde üç sinek toplamda,

$$720 + 12 + 1 = 733$$

defa merkez etrafında tur atmıştır. Bu sayıyı aralarındaki fark en fazla 1 olan üç sayının toplamı şeklinde göstermeye çalışalım;

$$244 + 244 + 245 = 733$$

İlk başta saniye göstergesi üzerinde bulunan sinek önde gittiği için diğerlerinden bir tur fazladan tur atarak 245 tur atmıştır. Başlangıçta akrep ve yelkovan üzerine konan sinekler ise 244'er tur atmışlardır.

Örnek 68:

Matematik öğretmeni Ahmet Bey ders esnasında tahtaya yazdığı sayılardan herhangi ikisini seçerek onların üzerinde şöyle bir işlem gerçekleştiriyor. Ahmet Bey'in seçtiği sayılar a ve b olmak üzere, onların yerine yazdığı x ve y sayılarını sıralı ikilileri kullanarak şu şekilde ifade ediyor.

$$(x, y) = (0.6a - 0.8b , 0.8a + 0.6b)$$

Ahmet Beyin tahtaya yazdığı sayılar (4, 5, 13) ise öğrenciler yukarıda tarif edilen işlemleri uygulayarak (5, 7, 13) sayılarını elde edebilir mi?

Çözüm:

Yeni elde edilen ikilinin elemanlarının karelerini alıp toplarsak;

$$(0.6a - 0.8b)^2 + (0.8a + 0.6b)^2 = x^2 + y^2$$

elde edilir. Bu bizim değişmezimizdir. Yani verilen üçlü (*a, b, c*) olsun. Belli sayıda hamleden sonra elde edilen üçlüye (*x, y, z*) diyelim. Bu üçlülerin arasında

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

(değişmezimizin gereği olarak) eşitliğinin olması gerekir.

$$4^2 + 5^2 + 13^2 < 5^2 + 7^2 + 13^2$$

olduğundan bu üçlüyü elde etmek imkansızdır.

Örnek 69:

n kenarlı konveks bir çokgenin köşelerine gerçel sayılar yazılmış olsun. Ardışık dört köşedeki sayılar *a, b, c* ve *d* olmak üzere bu sayıları kullanarak

$$(a - d) \cdot (b - c)$$

işlemi yapılıyor. Eğer;

$$(a - d) \cdot (b - c) < 0$$

ise *b* ve *c*'nin yerleri değiştiriliyor. Sonlu sayıda değişim olabileceğini gösteriniz.

Çözüm:

Bu değiştirme işlemi komşu terimlerin çarpımlarının toplamı olan *S* sayısını büyütür. Gerçekten de ardışık dört köşedeki sayılar *a, b, c* ve *d*'yi kullanarak *S* sayısını elde edelim.

$$S = ab + bc + cd$$

Eğer;

$$(a - d) \cdot (b - c) < 0 \quad (ab + dc < ac + bd)$$

oluyorsa *b* ve *c*'nin yerleri değiştirilerek elde edilen yeni *S* toplamı;

$$S = ac + bc + bd$$

olur. Diğer toplam terimleri değişmez sadece *S* toplamı artış gösterir. *S* toplamını alabileceği farklı değerlerin sayısı $(n - 1)!$'den büyük olamayacağı için bu işlem sonlu sayıda yapılabilir.

Örnek 70:

$f(x) = x^2 + 4x + 3$ fonksiyonuna aşağıdaki işlemleri uygulayarak $g(x) = x^2 + 10x + 9$ fonksiyonunu elde etmek mümkün müdür? Bu işlemler ise şöyle tanımlanıyor;

- $x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x+1}\right)$
- $(x-1)^2 \cdot f\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Çözüm:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun diskriminantı $b^2 - 4ac$'dir. Eğer $f(x)$'i birinci işleme sokarsak;

$$f(x) = (a+b+c)x^2 + (b+2a)x + a$$

fonksiyonunu elde ederiz ki bunun da diskriminantı $b^2 - 4ac$'dir.

Benzer şekilde $f(x)$'i ikinci işleme sokarsak;

$$f(x) = cx^2 + (b-2c)x + (a-b+c)$$

fonksiyonunu elde ederiz ki bunun da diskriminantı $b^2 - 4ac$'dir. Burada yapılan işlemler sonucu değişmeyen şeyin diskriminant olduğu görülür. $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının diskriminant değerleri eşit olmadığından birinden diğerini bu işlemler sonucu elde etmek mümkün değildir.

Örnek 71:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonuna aşağıdaki işlemler uygulanıyor.

- a ile c'nin yerleri değiştirilebilir.
- t reel sayı olmak üzere x yerine $(x + t)$ yazılabilir.

Bu işlemleri uygulayarak $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonundan $g(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonunu elde etmek mümkün müdür?

Çözüm:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda a ile c'nin yeri değiştirilirse $g(x) = cx^2 + bx + a$ fonksiyonu elde edilir ve diskriminantın değişmediği görülür.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda t bir reel sayı olmak üzere x yerine ($x + t$) yazılırsa;

$$g(x) = a(x+t)^2 + b(x+t) + c$$

fonksiyonu elde edilir ve yine diskriminantın değişmediği görülür. Fakat $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 - x - 1$ fonksiyonlarının diskriminant değerleri sırasıyla 5 ve 9 olduğundan asla birinden diğeri elde edilemez.

Örnek 72:

10 tane kağıt parçasının her birinin üstüne 2'nin kuvveti olan birkaç sayı yazılmıştır. Her bir kağıt parçasının üzerine yazılan sayıların toplamı bir diğerindekilerin toplamına eşittir. Gösteriniz ki kağıt parçaları üzerinde en az 6 defa yazılan bir sayı vardır.

Çözüm:

Bir kağıt parçasının üzerinde yazan 2'nin kuvveti olan sayıların toplamı m olsun. $2^k \leq m$ eşitsizliğini sağlayan maksimum k sayısını n ile gösterelim. Tüm kağıt parçalarındaki sayıların toplamı $10m$'dir. Diğer taraftan sayılardan hiçbirisine 5 defadan fazla rastlanmasaydı tüm sayıların toplamı en fazla

$$5\cdot (2^n + \ldots\ldots\ldots + 2^0) = 5\cdot (2^{n-1} - 1) = 10\cdot 2^n - 5 < 10m$$

olabilirdi. Bu da bize en az 6 defa rastlanılan bir sayı olduğunu gösterir.

Örnek 73:

Tahtaya n tane sayı yazılmıştır. Her adımda bu sayılardan herhangi ikisi (bunlar a ve b olsun) alınıp bunların yerine $\frac{a+b}{4}$ yazılıyor. $n - 1$ adım sonra tahta üzerinde tek bir sayı kalır. Başlangıçta alınan n adet sayının hepsi 1 olursa tahtada kalan son sayının $\frac{1}{n}$ 'den küçük olmadığını kanıtlayınız.

Çözüm:

İki pozitif sayının aritmetik ortalaması bunların harmonik ortalamasından büyük veya eşittir. Bu aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

buradan da

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla a ve b sayıları alınıp yerine $\frac{a+b}{4}$ yazıldığında tahta üzerindeki sayıların terslerinin toplamı artmıyor. O halde sona kalan x sayısının tersi, ilk sayıların terslerinin toplamından büyük olamayacaktır.

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{1} = n$$

bu durumda

$x \geq \frac{1}{n}$'dir.

BÖLÜM 5

ULUSAL MATEMATİK OLİMPİYATI SINAVINDA ÇIKMIŞ VE DEĞİŞMEZLİK İLKESİYLE ÇÖZÜLEBİLEN SORULAR

Soru 1:

2×5 tipindeki bir satranç tahtasının üst sırasında sol köşeden itibaren ardışık k kareye siyah pullar konmuştur. Boş olan karelere istediğimiz sırayla beyaz pullar konuluyor. En az bir ortak köşeye sahip iki kare komşu sayılmak üzere, her beyaz pul konulduğunda, komşu karelere daha önce konmuş olan pulların rengi, beyazsa siyaha, siyahsa beyaza dönüştürülüyor. k'nın aşağıdaki değerlerinden hangisi için tüm kareler dolduğunda pulların hepsi beyaz olur? **(UMO-1999)**

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Hiçbiri

Çözüm:

İlk olarak $k = 0$ durumunda pulların toplam renk değişim sayılarını hesaplayalım. Her komşu ikilide hanelerin birine diğerinden daha önce pul konmuş olacak, dolayısıyla her ikili için tam bir kez renk değişimi olmuş olacak. Yatay komşu ikililerin sayısı $2 \cdot 4 = 8$, dikey komşu ikililerin sayısı 5, çapraz komşu ikililerin sayısı da $2 \cdot 4 = 8$ olduğundan toplam değişim sayısı;

$$8 + 5 + 8 = 21$$

yani tek sayı olur. Pullar ilk konulduğunda beyaz oldukları için sonuçta pulların hepsinin beyaz olması mümkün değildir. $k = 1$ durumunda pullar aşağıdaki tablodaki sırayla konulursa hepsi beyaz olur. $k > 1$ durumunda sol üst köşedeki siyah pulun tam iki tane komşusuna pul konacak, dolayısıyla bu pul sonuçta siyah olacak. Böylece sadece $k = 1$ durumunda tüm pulların beyaz olabileceği görülür.

Cevap B

Soru 2:

Başlangıçta, düzgün n kenarlı bir çokgenin köşelerinde bulunan n tane havaalanının k tanesinde birer uçak vardır. Her gün, bu uçaklardan her biri, o gün bulunduğu havaalanının en yakınındaki iki havaalanından birine uçuyor. Başlangıç dağılımı ne olursa olsun, bütün uçakların günün birinde aynı havaalanında toplanması, aşağıdaki (n, k) sıralı ikililerinden hangisi için olanaksızdır?**(UMO-2001)**

a) (10, 6) b) (10, 4) c) (11, 3) d) (11, 5) e) (13, 6)

Çözüm:

Düzgün ongenin köşelerini $A_0,A_1,A_2,\ldots\ldots,A_9$ şeklinde isimlendirelim. Bu çokgenin 6 köşesinde bulunan uçakların m günden sonra A_0' da toplandığını varsayalım. m çift sayı ise, başlangıçta uçakların çift numaralı köşelerde (A_0, A_2, A_4, A_6, A_8); m tekse, başlangıçta uçakların tek numaralı köşelerde (A_1, A_3, A_5, A_7, A_9) bulunması gerekir. Ne çift, ne de tek numaralı 6 köşe bulunmadığından çelişki elde ediyoruz.

Cevap A

Soru 3:

Başlangıçta bütün birim kareleri beyaz olan $m\times n$ bir tahtayı , sonuçta ortak kenara sahip herhangi iki kareden biri siyah biri beyaz olacak şekilde boyamak istiyoruz. Boyama işleminin her adımında tahta üstünde 2×2 bir kare seçilerek, beyaz birim kareleri siyaha ve siyah birim kareleri beyaza boyanıyor. Aşağıdakilerden hangi (m, n) sıralı ikilisi için, tahta istenilen biçimde boyanabilir.**(UMO-2002)**

a) (3, 3) b) (2, 6) c) (4, 8) d) (5, 5) e) Hiçbiri

Çözüm:

m ve n sayılarından birinin tek sayı olduğu durumlarda tahtanın istenilen biçimde boyanamayacağını gösterelim. Örneğin satırların sayısı m tek $n \geq 2$ olsun (n = 1 durumunda tahtanın istenilen şekilde boyanamayacağı açıktır). İlk iki sütundaki beyaz karelerle siyah karelerin sayılarının farkını F ile göstermek üzere F'nin 4 modunda hep sabit kalacağını gösterelim. 2×2 boyutlu bir kare üzerinde mümkün olan tüm durumları inceleyelim:

- Karelerin hepsi beyaz ise ($F = 4$), işlem sonucunda hepsi siyah olacak ($F = -4$) dolayısıyla F'deki değişim $8 \equiv 0$ (mod 4) olur.
- Karelerden 3 tanesi beyaz ve 1 tanesi siyah ise ($F = 2$), işlem sonucunda 3 tanesi siyah ve bir tanesi beyaz olur ($F = -2$). Dolayısıyla $2- (-2) \equiv 0$ (mod 4)'dür.
  İşlemden önce $F = 0$ ise, işlemden sonar yine $F = 0$ olur.
- $F = -2$ ve $F = -4$ olduğu durumlar da benzer şekilde incelenebilir.

Şimdi m tek sayı olduğundan başlangıçta $F = 2m \equiv 2$ (mod 4) olur ve işlemler sonucu hiçbir zaman $F = 0$ elde edilemeyecek, dolayısıyla tahta tüm komşu kareler farklı olacak biçimde boyanamayacaktır. Böyleve (a) ve (d) şıklarının olamıyacağı görülür. (b) şıkkında birinci sütundaki iki kare hep aynı renkte olacak dolayısıyla bu durumda da tahta istenilen şekilde boyanamaz. (c) şıkkının doğru olduğunu göstermek için 4×4 boyutlu tahtanın istenilen biçimde boyanabildiğini göstermemiz yeterlidir. Bu da sol alt ve sağ üst köşelerdeki, sol orta, sağ orta, üst orta, alt ortadaki 2×2'lik kareler seçilip bunlar üzerinde işlem yapılarak elde edilir (karelerin seçilme sırası önemli değildir).

Cevap C

Soru 4:

Ali, 2005 taştan oluşan bir öbekteki taşlardan birini seçip, bu taşı Betül'ün göremeyeceği biçimde işaretliyor ve taşları karıştırıyor. Betül, her hamlede mevcut taşları hiçbiri boş olmayan üç öbeğe ayırıyor. Ali, işaretlediği taşı içermeyen iki öbekten, varsa daha çok taştan oluşanını, eğer her ikisi de aynı sayıda taştan oluşuyorsa, herhangi birini oyundan çıkartıyor ve geri kalanları karıştırıyor. Sıra tekrar Betül'e geliyor ve oyun bu şekilde iki taş kalana kadar sürüyor. İki taş kalınca, Ali Betül'e hangi taşın işaretli olduğunu söylüyor. Betül işaretli taşı bulmayı en az kaç hamlede garantileyebilir?**(UMO-2005)**

a) 11 b) 13 c) 17 d) 18 e) 19

Çözüm:

Betül'ün herhangi bir hamlesinden önce taş sayısı $n = 2k$ gibi bir çift sayı ise Betül en fazla $k - 1$ tane taşın oyundan çıkarılmasını garantileyebilir. Daha fazla sayıda taşın oyundan çıkması için Betül'ün en az k taş içeren bir öbek ayırması gerekir. Fakat işaretli taş bu öbekte ise, diğer öbeklerin her birinde en fazla $k - 1$ taş olduğundan oyundan çıkarılan taş sayısı da en fazla $k - 1$ olur.

Benzer şekilde $n = 2k + 1$ ise Betül en fazla k taşın çıkarılmasını garantileyebilir. O halde Betül aşağıdaki stratejiyi uygularsa en az hamle sayısına ulaşır;

Taş sayısı $2k + 1$ ise bunları k, k, 1 taş içeren üç öbeğe, taş sayısı $2k$ ise k, $k + 1$, 1 taş içeren üç öbeğe ayırır. Birinci durumda en az k, ikinci durumda en az $k - 1$ taş oyundan çıkarılmış olur. 2005 taş için en kötü durumda taş sayısı şöyle değişir:

2005, 1003, 502, 252, 127, 64, 33, 17, 9, 5, 3, 2

Böylece Betül en az 11 hamlede işaretli taşı bulmayı garantileyebilir.

Cevap A

Soru 5:

Kenar uzunlukları 1 olan 27 tane küpten her birinde, iki karşılıklı yüz birer nokta, başka iki karşılıklı yüz ikişer nokta, geri kalan iki karşılıklı yüz de üçer nokta ile işaretleniyor. Bu 27 küp ile 3×3×3 boyutlarında bir küp oluşturursak, bu küpün yüzleri üstünde işaretlenmiş toplam nokta sayısı en az kaç olur? **(UMO-2006)**

a) 54 b) 60 c) 72 d) 90 e) Hiçbiri

Çözüm:

3×3×3 boyutlu küpün köşelerindeki 8 küpün her birinin her iki karşı yüzünden biri içeride kalacak, diğeri dışarı olacak yani görünecektir. O halde bu küplerin her birinde $1 + 2 + 3 = 6$ nokta görülür. Ayrıtların ortasında bulunan 12 küpün her birinde en az $1 + 2 = 3$ nokta ve yüzlerin merkezlerinde bulunan 6 küpün her birinde en az 1 nokta görülür. Böylece toplamda en az:

$$8 \cdot 6 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 90$$

nokta görülür.

Cevap D

Soru 6:

n takımın katıldığı bir hentbol turnuvasında, her takım, kendi dışındaki her takımla tam olarak bir maç yapıyor. Her maçta kazanan 2, kaybeden 0 puan alırken, beraberlik durumunda iki takımda 1'er puan kazanıyor. Turnuvanın bitiminde tüm takımların puanları farklı olup, sonuncu olan takım ilk üç sırada yer alan takımların hepsini yenmiş ise, n en az kaç olabilir?**(UMO-2006)**

a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) Hiçbiri

Çözüm:

k. sırada yer alan takımın puanı x_k olsun. Sonuncu takım ilk üç takımı yendiği için $x_n \geq 6$ olur. Ayrıca takımların puanları birbirinden farklı olduğundan;

$x_{n-1} \geq 7$, $x_{n-2} \geq 8$, ……., $x_1 \geq n + 5$

olur. Dolayısıyla;

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq \frac{n(6+n+5)}{2} = \frac{n(n+11)}{2}$$

olur. her maçtan 2 puan geldiğinde toplam puan

$\binom{n}{2} = n(n+1)$'dir.

O halde; $n(n - 1) \geq \frac{n(n+11)}{2}$ eşitsizliğinden $n \geq 13$ elde edilir.

Cevap E

Soru 7:

10×10 bir satranç tahtasının birinci satırının karelerine sırasıyla 0, 1, 2,…..,9 ikinci satırının karelerine sırasıyla 10, 11, 12,…….,19,………, onuncu satırın karelerine sırasıyla 90, 91, 92,………,99 sayıları yazılmıştır. Sayıların bazılarının önüne, her satır ve her sütunda tam olarak beş tane olacak şekilde eksi işareti ekleyerek tüm sayıların toplamı en az kaç yapılabilir?**(UMO-2008)**

a) -10 b) -2 c) 2 d) 10 e) Hiçbiri

Çözüm:

Eksi işaretleri nasıl eklenirse eklensin tüm sayıların toplamının 0 olacağını kanıtlayalım. Eksi işaretleri koşula uygun biçimde herhangi bir şekilde eklenmiş olsun. Başlangıçta bir satırdaki tüm sayılardan aynı bir sayı çıkarılırsa tahtadaki tüm sayıların toplamı değişmez, dolayısıyla tüm satırlar 0, 1, 2, …… ,9 yapılabilir. Sütunlar aynı sayılardan oluştuğundan bunlardan 5'i " + " ve 5'i de " – " toplam 0 olur.

Cevap E

Soru 8:

$a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{2008}$ tam sayılarından her biri en az 1 en çok ise 5 tir. (a_n, a_{n+1}) ikilisine, $a_n < a_{n+1}$ ise artan ikili, $a_n > a_{n+1}$ ise azalan ikili diyelim. dizideki artan ikili sayısı 103 tane ise azalan ikili sayısı en az kaçtır?**(UMO-2008)**

a) 21 b) 24 c) 36 d) 102 e) Hiçbiri

Çözüm:

Azalan ikililerin sayısı k olsun.

$$4 \geq a_{2008} - a_1 = (a_{2008} - a_{2007}) + (a_{2007} - a_{2006}) + \ldots\ldots + (a_2 - a_1) \geq 103 - 4k$$

Eşitsizliğinden $4k \geq 99$ ve $k \geq 25$ elde edilir. Öte yandan dizi

1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5,………, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 4,…..,4

şeklin de seçilirse tam 103 tane artan ikili, 25 tane de azalan ikili bulunur.

Cevap E

Soru 9:

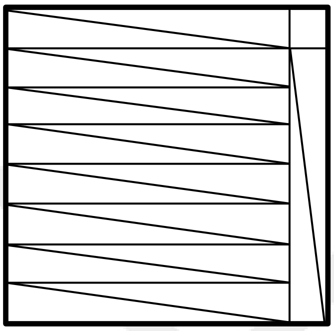
8×8 boyutlu bir satranç tahtasının bir köşesinden bir birim kare kesilip atıldığında kalan şekli eşit alanlı üçgenlere bölmek için en az kaç üçgen gereklidir?**(UMO-2008)**

a) 17 b) 19 c) 20 d) 21 e) Hiçbiri

Çözüm:

Kalan şekil üçgenlere bölündüğünde kesik kareye bitişik üçgenlerden birinin alanının en fazla $\frac{1 \cdot 7}{2}$ olacağı açıktır. O halde üçgen sayını bulmak için tüm alanı bir üçgenin alanına bölersek;

$\frac{63}{\frac{7}{2}}$ = 18'den az olamaz. Koşulu sağlayan 18 üçgen örneği aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Cevap B

Soru 10:

Boyları birbirlerinden farklı 14 öğrenci başlangıçta nasıl sıralanmış olursa olsunlar, her adımda yan yana duran iki öğrencinin yerini değiştirerek en az kaç adımda öğrencileri boy sırasına sokmak mümkün olur?**(UMO-2011)**

a) 42 b) 43 c) 45 d) 52 e) Hiçbiri

Çözüm:

$A > B$ olmak üzere; A, B'den soldaysa bu duruma evirtim diyelim ve bir dizilişteki evirtim sayısını $s(i)$ ile gösterelim. 14 öğrenci büyükten küçüğe sıralandığında evirtim sayısı;

$$s(i) = \binom{14}{2} = 91$$

olur ve küçükten büyüğe sıralandığında ise;

$s(i)$ = 0'dır.

Her hamlede *s(i)* tam olarak 1 azalır veya 1 artar. Dolayısıyla başlangıçta *s(i)* ≥ 46 ise en fazla 45 adımda *s(i)* = 91 durumuna, başlangıçta *s(i)* ≤ 45 ise en fazla 45 adımda *s(i)* = 0 durumuna ulaşılır. Öte yandan başlangıçta *s(i)* = 45 ise 45'den daha az adımda, *s(i)* = 0 ve *s(i)* = 91 durumuna ulaşılamaz.

Cevap C

Soru 11:

Yazı tahtasına 1, 3, 5, …….. , 99, 101 sayıları yazılmıştır. Her adımda bu sayılardan ikisini silerek onların yerine sayıların toplamının 1 eksiği yazılıyor. Sonlu adımdan sonra tahtada tek sayı kalacaktır. Bu sayı nedir?**(UİMO-1997)**

a) 9600 b) 2555 c) 2551 d) 2505 e) 2501

Çözüm:

Her adımdan sonra tahta üzerindeki tüm sayıların toplamı 1 azalıyor. Tahta üzerinde;

$$\frac{101-1}{2} + 1 = 51$$

sayı olduğundan adım sayısı 50 olacaktır. tahta da kalan tek sayı da

$$(1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 101) - 50 = \frac{(101-1)\cdot 51}{2} - 50 = 2551$$

olur.

Cevap C

Soru 12:

Bir kenarının uzunluğu 10 birim olan eşkenar üçgenin kenarlarına eşit aralıklarla paraleller çizilerek her kenar 10 parçaya bölünüp küçük eşkenar üçgenler oluşturuluyor. Kenar uzunluğu 1 birim olan üçgenlerden toplam olarak en az kaç kenar silinmelidir ki, kalan şekilde hiç üçgen bulunmasın?**(UİMO-2000)**

a) 65 b) 60 c) 45 d) 50 e) 55

Çözüm:

Sayıları toplamı;

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10 = \frac{(10-1)\cdot 10}{2} = 55$$

olan tüm yatay kenarları silersek, geriye kalan şekilde hiçbir üçgen bulunmaz. Diğer taraftan, en tepedeki üçgenden başlayarak her satırda birinci üçgenden başlamak üzere bir atlayarak üçgenler taranırsa, ortak kenarları bulunmayan

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 10 = 55$$

Tane taranmış üçgen elde edilmiş olur. Bundan dolayı hiç üçgen kalmaması için bu üçgenlerden her birinin bir kenarının silinmesi gerektiğinden en az 55 kenar silmemiz gerekir.

Cevap E

Soru 13:

Bir pozitif tamsayının 9 katının rakamlarının toplamına bu sayının "özsayısı" diyelim. tüm iki basamaklı sayıların özsayıları toplamı nedir? ?**(UİMO-2000)**

a) 2115 b) 1125 c) 1918 d) 1215 e) 1999

Çözüm:

İki basamaklı sayının özsayısı 9'a bölündüğünden, 9 veya 18 olabilir. Bunlardan 18 olanların sayısını bulalım. Diğer bir deyişle, 9'un, 9'a bölündüğünde iki basamaklı sayı veren ve basamakları toplamı 18 olan katlarının sayısını bulalım. İki basamaklı buna uygun tek sayı 99'dur.

100 ile 200 arasında 2 tane bulunur (189, 198).

200 ile 300 arasında 3 tane sayı bulunur (279, 288, 297)

.

800 ile 900 arasında 9 tane sayı bulunur (819, 828, …..,891).

Böylece toplam;

$1 + 2 + \ldots\ldots + 9 = 45$

tane böyle sayı bulunur. Geriye kalan 45 tane iki basamaklı sayının özsayıları 9'dur. Böylece tüm özsayıların toplamı

$$45 \cdot 18 + 45 \cdot 9 = 1215\text{'tir}$$

Cevap D

Soru 14:

Tahtaya soldan sağa doğru yazılı n tane rakamdan, her seferinde üçü hariç diğerlerini silerek tüm üç basamaklı sayılar elde edilebiliyorsa, *n* en az kaç olabilir? (**UİMO-2005)**

a) 28 b) 29 c) 30 d) 31 e) 36

Çözüm:

111, 222, …….. , 999 sayılarından her biri elde edilebildiğinden 1, 2, 3,....,9 Rakamlarının her birinden en az 3'er tane bulunur. 100 sayısı elde edilebildiğinden en az 2 tane 0 bulunur. Böylece $n \geq 29$ bulunur. Öte yandan

12345678901234567890123456789

Şeklinde 29 rakam yazılırsa tüm üç basamaklı sayılar elde edilebilir, yani *n*'nin en küçük değeri 29'dur.

Cevap B

Soru 15:

Matematik öğretmeni, tahtanın soluna 1, sağına 2 yazıyor. Birinci öğrenci bu sayıların arasına toplamları olan 3 sayısını yazıyor. İkinci öğrenciden itibaren sırası gelen her öğrenci yine tahtada ardışık yazılı tüm sayı ikilileri için, bunların arasına toplamlarını yazıyor. Yedinci öğrenci de işlemlerini bitirdikten sonra, tahtada yazılı tüm sayıların toplamı kaç olur? (**UİMO-2006)**

a) 3192 b) 3216 c) 3282 d) 3312 e) 3366

Çözüm:

Her hamlede eklenen sayıların toplamına en soldaki 1 ve en sağdaki iki dışında tahta üzerindeki sayıların her biri ikişer kez, 1 ve 2'de birer kez katkı sağlayacak. Dolayısıyla bir hamleden önce tahta üzerindeki sayıların toplamı A ise, hamleden sonra bu toplam $3A - 3$ olacak. O halde yedinci öğrencinin işleminden sonra toplam

$$3\cdot(3\cdot(3\cdot(3\cdot(3\cdot(3\cdot(3\cdot(1+2)-3)-3)-3)-3)-3)-3)-3) = 3282$$

olur.

Cevap C

Soru 16:

2007 kent arasında karşılıklı uçak seferleri düzenleniyor. Herhangi bir kentten bir diğerine en çok bir aktarma yaparak ulaşılmasını olanaklı kılmak için, en az kaç sefer düzenlenmelidir? **(UİMO-2007)**

a) 2007 b) 2064 c) 3002 d) 4006 e) Hiçbiri

Çözüm:

Bir A kentini seçip diğer kentlerin her birinden A'ya sefer (toplam 2006 sefer) düzenlersek her kentten bir diğerine en çok bir aktarma ile ulaşılır. Her kentten diğerine aktarmalı veya aktarmasız ulaşım mümkünse sefer sayısının en az 2006 olduğunu gösterelim.

Bir kentte başlayıp aynı kente dönen bir rota (buna çevrim denir) varsa bu rota üzerindeki bir seferi kaldırırsak yine her kentten diğerine ulaşılır, dolayısıyla çevrimlerin bulunmadığını varsayabiliriz. O halde sadece bir sefer bulunan bir kent vardır. Gerçekten, aksi takdirde bir kentten çıkıp rastgele bir rota oluşturduğumuzda, her kentten en az 2 sefer çıktığından daha önce bulunduğumuz bir kente gelmediğimiz sürece rotayı uzatabiliriz. Kent sayısı sonlu olduğundan bu rota sonsuz olamaz, dolayısıyla daha önce bulunduğumuz bir kente geleceğiz, yani bir çevrim oluşacak. Bu da çelişkidir. Sadece bir sefer bulunan kenti ve bu seferi gözardı ettiğimizde kent ve sefer sayısı 1 azalacak ve geriye kalan ortamda yine cevrim bulunmayacak ve dolayısıyla tek sefer bulunan bir kent olacaktır. Bunları da gözardı edelim v.s. sonunda 2 kent ve bir sefer kalacak. Demek ki, başlangıçta da sefer sayısı kent sayısının bir eksiği, yani 2006 imiş.

Cevap E

Soru 17:

Yan yana yazılmış olan 123456789 rakamlarından bazılarının arasına " + " işareti koyularak oluşturulan bir toplam aşağıdakilerden hangisi olamaz? (**UİMO-2008)**

a) 144 b) 153 c) 189 d) 375 e) 486

Çözüm:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 9 = 45 \equiv 0 \pmod 9$$

olduğundan " + " işareti hangi rakamların arasına konulursa konulsun toplam daima 9 ile bölünür. 375 sayısı 9'a tam bölünmediğinden toplam 375 olamaz. Oluşturulan toplam aşağıdaki şekillerde diğer sayılara eşit olabilir:

$1 + 2 + 34 + 5 + 6 + 7 + 89 = 144$

$12 + 34 + 5 + 6 + 7 + 89 = 153$

$1 + 23 + 4 + 5 + 67 + 89 = 189$

$1 + 2 + 3 + 456 + 7 + 8 + 9 = 486$

Cevap D

Soru 18:

Başlangıçta tahtaya -1, 2, -3, 4, -5, 6 sayıları yazılıdır. Her adımda tahtaya yazılı olan herhangi a ve b sayılarını silip onların yerine $2a + b$ ve $2b + a$ sayılarını yazarsak (0, 0, 0, 3, -9, 9), (0, 1, 1, 3, 6, -6), (0, 0, 0, 3, -6, 9), (0, 1, 1, -3, 6, -9), (0, 0, 2, 5, 5, 6) altılılarından kaç tanesini elde edebiliriz? (**UİMO-2014)**

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Çözüm:

(0, 0, 0, 3, -9, 9) altılısının elde edilebildiğini gösterelim;

(-1, 2, -3, 4, -5, 6)

(0, 3, -3, 4, -5, 6) 1. adım

(0, 3, 0, 4, -5, 9) 2. adım

(0, 3, 0, 3, -6, 9) 3. adım

(0, 0, 0, 3, -9, 9) 4. adım

Cevap A

Soru 19:

Başlangıçta ellerinde 5, 10, 15, 20, 25 şeker bulunan beş öğrenciden her adımda biri elindeki şekerlerin bir kısmını diğer öğrenciler arasında eşit olarak paylaştırıyor. En az kaç adımda öğrencilerin ellerindeki şekerlerin sayısı eşitlenebilir? **(UİMO-2011)**

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Çözüm:

Son hamleden önce 4 öğrencinin şeker sayıları aynı olmak zorundadır. Sondan bir önceki hamleden önce en az 3 öğrencinin şeker sayısı aynı olmak zorunda v.s. Dolayısıyla 4'ten az sayıda hamlede şekerlerin sayısı eşitlenemez.

Önce ikinci öğrenci birer şeker dağıtırsa, şeker sayıları 6, 6, 16, 21, 26 olur.

Ardından üçüncü öğrenci ikişer şeker dağıtırsa durum 8, 8, 8, 23, 26 olur.

Sonra dördüncü öğrenci üçer şeker dağıtırsa 11, 11, 11, 11, 31 olur

Son olarak beşinci öğrenci dörder şeker dağıtırsa şeker sayıları eşitlenmiş olur.

Cevap A

Soru 20:

3×3 satranç tahtasının dokuz karesinden her birinde başlangıçta 0 yazılıdır. Her adımda, ortak bir kenara sahip iki kare seçilerek, üstlerindeki sayılardan her ikisine birden ya 1 ya da -1 eklenmektedir. Sonlu sayıda adım sonunda, karelerdeki sayıların hepsini birden 2 yapmanın mümkün olmadığını gösteriniz. **(UİMO-2006KI)**

Çözüm:

Bir adımdan önce karelerdeki sayılar şekildeki gibiyse

$$(a + c + e + g + k) - (b + d + f + h)$$

Farkı bu adımdan sonra değişmez, çünkü bu adımda her iki parantezdeki toplama 1'er eklenecek veya çıkarılacaktır. Başlangıçta bu toplam 0 olduğundan hep 0 kalacak, dolayısıyla bu farkın 2'ye eşit olduğu, tüm sayıların 2 olma durumu elde edilemeyecektir.

Soru 21:

Bir masa üstündeki 24 tane bardaktan tam olarak üç tanesi ters çevrilmiştir. Her işlemde herhangi dört bardağı çevirebiliyoruz. En fazla 100 işlem yaparak bütün bardakları düz hale getirebilir miyiz? **(UİMO-2008KI)**

Çözüm:

Her işlem sonucu ters çevrilmiş bardak sayısı çift sayı kadar değişiyor. Başlangıçta tek sayıda (3) bardak ters çevrilmiş olduğundan ters çevrilmiş bardak sayısını sıfıra getirmek mümkün değildir. Cevap: Getiremeyiz.

KAYNAKÇA

Artur E., Problem-Solving Strategies, 1999, Springer

Alizade,R., Ders Notları, Yaşar Üniversitesi, 2013, İzmir

Andreescu, T., Enescu, B., 2010, Mathematical Olympiad Treasures, USA, Birkhauser.

Prof. Dr. Refail Alizade, Prof. Dr. Ünal Ufuktepe Sonlu Matematik Altın Nokta Yayınevi, 2012

Prof. Dr. Refail Alizade, Doç. Dr. Ünal Ufuktepe Sonlu Matematik TUBİTAK Yayınları Bilgi Dizisi,

Yrd. Doç. Dr Mustafa Özdemir, Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Altın Nokta Yayınevi, 2010

Ertan KAYA, Kombinatorik Altın Nokta Yayınevi, 2012

İlham Aliyev, Mustafa Özdemir, Dilber Şıhaliyeva, Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatları Sorular ve Çözümler, Tubitak Yayınları, 2012

Öztürk, F., 1995, Kombinatorik (Sayma Problemleri), Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No: 30

Ömer GÜRLÜ, Olimpik Matematik İlk Adım Altın Nokta Yayınevi, 2012

Ömer GÜRLÜ, Olimpik Sonlu Matematik Altın Nokta Yayınevi 2015

WEB KAYNAKLARI

http://www.tubitak.gov.tr

http://www.mathlinks.ro

http://www. artofproblemsolving.com

ÖZGEÇMİŞ

Yunus AL 05.03.1977 tarihinde İstanbul'da doğdu, ilkokul, ortaokul ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden 2000 yılında mezun olduktan sonra özel sektörde bir süre çalıştı. 2010 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığında öğretmenlik yapmaya başladı. Sırasıyla Cizre Atatürk Anadolu Lisesi, Cizre Fen Lisesi, Kiraz Çok Programlı Anadolu Lisesi'nde görev yaptıktan sonra halen çalışmakta olduğu İzmir Bayındır Anadolu Lisesi'ne atandı. Evli ve iki çocuk babasıdır.