YAŞAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ ÜZERİNE

Elif BALIKÇI

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Sunum Tarihi: 04.08.2016

Bornova-İZMİR

2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr. Fatma Serap TOPAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Refet POLAT

Prof.Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Fark Denklem Sistemlerinin Çözülebilirliği Üzerine

Elif BALIKÇI
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR
Ağustos 2016, 40 sayfa

Bu tezde

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n} \qquad n \in N_0$$

fark denklem sistemlerini ele aldık. Burada p_n, q_n, r_n ve s_n dizileri x_0 ve y_0 başlangıç koşulları sıfırdan farklı olan x_n veya y_n dizilerini temsil etmektedir. Dizilerin seçimine göre on altı farklı denklem sistemi vardır. Bu on altı sistemden on dört tanesinin çözülebilirliği elde edilmiştir. Bu on dört sistemin on ikisinin çözümlerinin Fibonacci sayıları cinsinden olması dikkat çekicidir.

Anahtar Kelimeler: Fark Denklem Sistemleri, Ricatti Denklemi, Fibonacci Sayıları, Çözülebilirlik

ABSTRACT

On Solvability of Systems of Difference Equations

BALIKÇI, Elif
M.Sc in Department of Mathematics
Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Ahmet YANTIR
Agust 2016, 40 pages

In this thesis, we study the system of difference equations of the form

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n} \qquad n \in N_0$$

Here each of the sequences p_n, q_n, r_n and s_n represents either the sequence x_n or the squence y_n with nonzero initial conditions x_0 and y_0. We have sixteen possible systems depending on the choice of the sequences. The solvability of fourteen systems out of sixteen systems is established. It is remarkeble that the solutios of twelve systems are in terms of Fibonacci numbers.

Key words: Systems of Difference Equations, Ricatti Equation, Fibonacci Numbers, Solvability

TEŞEKKÜRLER

Tezimi hazırlarken bana destek olan ve tezimde rehberlik eden saygıdeğer tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR' a, çok teşekkür ederim.

Elif BALIKÇI

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**Fark Denklem Sistemlerinin Çözülebilirliği Üzerine**"adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin kaynaklar dizininde gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Elif BALIKÇI

04.08.2016

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1 GİRİŞ

Fark denklemleri, bir ve daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır ve fark denklemleri, diferansiyel denklemlere benzerlik göstermektedir. İnceleme süreci yönünden baktığımızda diferansiyel denklemlerden daha yenidirler. Diferansiyel denklemler 200 yılı aşan bir sürede incelenmiş, fark denklemler ise 100 yıllık bir inceleme sürecinde sistematik hale gelmiştir.

Doğa olaylarındaki süreklilik ve kesiklilik arasındaki zıtlaşma Eski yunanlılara göre, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacısıydı.Bu süreksizlik durumu fark denklemleri ile ortadan kaldırılmaya çalışılmıştır. Sonlu fark işlemleri Newton ile yayılmaya başlamış, Poincaré kadar uzanmıştır, Boole ile zirveye ulaşmıştır. Daha sonra Laplace fark denklem üzerinde çalışmıştır. 1825 yılından önce doğrusal fark denklemler ele alınmamıştı. 1885 yılında Poincaré ile doğrusal fark denklem teorisine girilmiş, Lagrange doğrusal diferansiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde etmiş, Guichard 1887'de ikinci yandaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiş, Gelgrun asimptotik çözümler üzerinde çalışmış, Birkhoff ve Carmichael bu çalışmaları genişletmişlerdir. Liouville ve Sturm ikinci mertebeden selfadjoint doğrusal diferansiyel operatörünün üzerinde çalışmalar yapmış ve kendi isimleri ile anılan Sturm-Liouville fark denkleminin çözümünü ifade etmişlerdir. March Artznouni, değişken katsayılı doğrusal fark denklemin asimptotik üstel çözümlerinin özelliklerini geliştirmiş; Hooker, Riccati denklemini geliştirmiş; Popenda, ikinci mertebeden fark denklemin osilasyonlu ve osilasyonsuz durumlarındaki teoremleri geliştirmiş ve çözümleri için bazı atıflarda bulunmuştur [3, 10, 19, 20]. Kaczorek, n'inci mertebeden homojen olmayan değişken katsayılı doğrusal fark denklemin implicit formdaki çözümlerini vermiştir [11]. Abramov, polinom katsayılı keyfi dereceli fark denklemlerin rasyonel çözümlerini vermiştir [1]. Tuzik, değişken katsayılı konvolüsyon tipteki fark denklemlerin çözülebilirliğine değinmiştir [28]. Fark denklemleri son 30 yıl içerisinde pek çok bilim adamının çalışma konusu olmuştur. Bununla ilgili olarak [18, 8, 14, 17, 4, 6, 2, 12] kitaplarından ve [26, 27, 9, 15, 16, 7] gibi başlıca makalelerden bahsedilebilir.

Diferansiyel denklemlerle fiziksel olayların bir matematiksel modeli sürekli değişim oranları arasındaki denklemler olarak ifade edilmekteyken, 20. yüzyılın başlarında radyasyon miktarı ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Süreklilik halleriyle verilen diferansiyel denklemlerin yerine, bu denklemlere benzer olan fark denklemleri ayrık zamanlarda meydana gelen olayları formüle eden bağıntılar olarak kullanılmaya başlanmıştır. Fark denklemleri için türev içeren denklemlerin sadece tamsayılarda tanımlanmış şeklidir diyebiliriz. Böylece, fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmıştır.

Günümüzde diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemler kullanılarak ortadan kaldırılmak istenmiştir. Fark denklemleri ile zamana bağlı çesitli doğa olaylarının incelenmesinde karşılaşılmaktadır. Fark denklemleri, diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde de karşımıza çıkar. Fark denklemleri teorisinin uygulamaları, nümerik analiz, kontrol teori, bilgisayar bilimi, ekonomi, biyoloji, sosyoloji, gibi bir çok bilim dalında hızlı bir şekilde artmaktadır.

Fark denklemleri geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örnegin, biyolojide canlı popülasyon sayısının araştırılmasında, tıpta hücre hareketlerinin takibinde, kontrol teorisinde kararlılık durumunun tespitinde ve daha birçok alanda fark denklemleriyle karşılşmaktadır.

Bu tezin ikinci bölümünde ana sonuçları içeren üçüncü bölümde kullanılacak olan fark denklemlerine ait genel kavramlar sunulmuştur. Bu kavramlar hakkında daha detaylı bilgilere sahip olmak isteyen okuyucular fark denklemleri ile ilgili literatürdeki kitaplara başvurabilirler. Bunların başlıcaları ilgili bölümde sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n} \qquad n \in N_0$$

fark denklem sistemi ele alınmıştır. Bu sistemin p_n, q_n, r_n ve s_n dizilerinin sıfırdan farklı x_0 ve y_0 reel başlangıç değerleri için 16 olası durumundan 14 tanesinin çözümleri incelenmiştir. Bu 14 sistemden 12 tanesinin çözümünde Fibonacci sayılarının olması dikkat çekiçidir [29].

2 FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin ana probleminin çözümünde kullanılan temel kavramlar tanıtılacaktır. Fark denklemi tanımı, sınıflandırılması, mertebesi, lineerliği tanımları ve ikinci mertebeden sabit katsayılı fark denklemlerinin çözüm yöntemleri verilmiştir. Bu bölümde [2, 4, 6-8, 12, 14, 18, 30] referanslarından faydalanılmıştır. Fark denklemleri teorisi ile daha detaylı bilgilere ve verilmiş teoremlerin ispatlarına bu kaynaklardan ulaşılabilir.

2.1 Genel Kavramlar

Tanım 2.1. $\Delta_h y(m) = y(m+h) - y(m)$ şeklinde tanımlı Δ_h operatörüne ileri h-fark operatörü denir [2]. Özel olarak $h = 1$ için $\Delta y(m) = y(m+h) - y(m)$ ile tanımlı operatöre ileri fark operatörü denir.

Tanım 2.2. $Ey(m) = y(m+1)$ şeklinde tanımlanan E operatörü kaydırma operatörü denir [2].

Tanım 2.3. $Iy(m) = y(m)$ şeklinde tanımlanan I sembolü ile gösterilen operatöre birim operatör denir [2].

Teorem 2.4. Δ, E ve I operatörleri arasında,

$$\Delta y(m) = Ey(m) - Iy(m)$$

bağlantısı vardır [2]

Tanım 2.5. n bağımsız, y de bağımlı değişken olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), \dots, E^n(y), \dots$ gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir [2, 6, 21].

$$y(m) + a_1 y(m+1) = f(m) \quad (2.1)$$

$$y(m-1) + a_1 y(m) + a_2 y(m+1) = g(m) \quad (2.2)$$

$$y(m-n) + a_1 y(m+n-1) + a_2 y(m+1) + a_1 y(m) = h(m) \quad (2.3)$$

Tanım 2.6. Bağımlı değişkenin birinci dereceden olduğu fark denklemine lineer, aksi halde lineer olmayan fark denklemi denir [2, 6, 21].

Tanım 2.7. $a_n \neq 0$ ve $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ keyfi sabitler olmak üzere (2.3) denkleminde $h_n = 0$ oluyorsa denkleme homojen [4], $h_n \neq 0$ durumunda ise denkleme homojen olmayan fark denklemi denir [6].

Tanım 2.8. (2.3) denklemine $a_n \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$ katsayıları sabit ise denkleme sabit katsayılı, eğer katsayılar bağımsız değişkenin fonksiyonları ise denkleme değişken katsayılı fark denklemi denir [4].

Tanım 2.9. $a_1, a_2, \dots, a_n, (\ a_n \neq 0)$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ reel sayılar, $[t_0, t_1]$ aralığında $t_0 \leq j \leq t_1$,n. mertebeden sabit katsayılı, lineer ve homojen fark denklemi ve başlangıç koşulları ile oluşturulan

$$\begin{gathered} y(m+n) + a_1 y(m+n-1) + \cdots + a_{n-1} y(m+1) + a_n y(m) = 0 \\ y(j) = \alpha_1, y(j+1) = \alpha_2, \dots, y(j+n-1) = \alpha_n \end{gathered} \tag{2.4}$$

problemine fark Cauchy fark problemi denir [4].

Teorem 2.10. (Varlık-Teklik Teoremi) I reel sayılardaki herhangi bir alt aralık, $f: I \times I \to I$ diferansiyellenebilen sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.5}$$

denkleminin $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ çözümü vardır ve tektir [2, 6, 21].

Teorem 2.11. $[t_0, t_1]$ aralığında $t_0 \leq j \leq t_1$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$'ler reel sayılar olmak üzere;

$$y(m-n) + \alpha_1 y(m+n-1) + \cdots + \alpha_{n-1} y(m+1) + \alpha_n y(m) = 0$$

ve

$$y(j) = \alpha_1, y(j+1) = \alpha_2, \dots, y(j+n-1) = \alpha_n$$

fark Cauchy probleminin çözümü vardır ve tektir [4].

Tanım 2.12. $y(m) = \lambda^m$ $(\lambda \in \mathbb{R}, \lambda^m \neq 0)$ $n.$ mertebeden homojen, sabit katsayılı bir fark denkleminin çözümü olsun. Bu çözüm (2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

biçiminde elde edilen denkleme (2.4) homojen denkleminin karakteristik denklemi denir [6].

Tanım 2.13. $c_n \neq 0$ olmak üzere $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, c_n$ keyfi sabitler, $y^{(1)}(m), y^{(2)}(m), \ldots, y^{(n)}(m)$'ler ise (3.4) denkleminin n tane çözümü olsun. Bu durumda

$$y(m) = c_1 y^{(1)}(m) + c_2\, y^{(2)}(m) + \cdots + c_n y^{(n)}(m)$$

ifadesi de (2.4) denkleminin bir çözümüdür. Bu çözüme üst üste ekleme ya da süper pozisyon kuralı denir [6].

Tanım 2.14. $y_1(m), y_2(m), \ldots, y_n(m)$'ler $n.$ mertebeden bir fark denkleminin çözümleri olmak üzere;

$$C(m) = det\begin{bmatrix} y_1(m) & y_2(m) & \cdots & y_n(m) \\ y_1(m+1) & y_2(m+1) & \cdots & y_n(m+1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1(m+n-1) & y_2(m+n-1) & \cdots & y_n(m+n-1) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $C(m)$ determinantına bu çözümlere ait Casoration denir [6]. Eğer, $C(m) \neq 0$ ise fark denkleminin $y_1(m), y_2(m), \ldots, y_n(m)$ çözümlerine lineer bağımsızdır denir [17].

2.2 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemlerinin Çözümleri

(2.4) denklemi ile verilen $n.$ mertebeden sabit katsayılı lineer homojen fark denklemini ele alalım. Bu denklemin genel çözümü karakteristik denkleminin köklerinin durumlarına göre aşağıdaki şekillerde verilir.

2.2.1 Birbirinden farklı reel köklerin olması durumu

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (2.4) denkleminin karakteristik denkleminin kökleri ve $c_1, c_2, \ldots, c_n$ reel sabitler olmak üzere (2.4) homojen denkleminin genel çözümü,

$$y(m) = c_1\lambda_1^m + c_2\lambda_2^m + \cdots + c_n\lambda_n^m$$

formundadır [4].

2.2.2 Köklerin Birbirine Eşit Olması Durumu

(2.4) denklemine ait karakteristik denkleminin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$ ise $c_1, c_2, \ldots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere (2.4) denklemi,

$$y(m) = c_1\lambda^m + c_2 m\lambda^m + \cdots + c_n m^{n-1}\lambda^m$$

biçiminde genel çözüme sahiptir [6].

2.2.3 Köklerin Karmaşık Sayı Olması Durumu

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$'ler reel sabitler olmak üzere (2.4) denklemine ait karakteristik denkleminin kökleri karmaşık $a_j + i\gamma_j$ $\quad j = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ ise kökler ikişerli eşleniktir. Yani $a_j + i\gamma_j$ karakteristik denklemin bir kökü ise $a_j - i\gamma_j$ de karakteristik denklemin bir köküdür. Bu durumda $r^2 = a_j^2 + \gamma_j^2$ ve $\tan\theta = \frac{\gamma_j^2}{a_j^2}$ olmak üzere $\lambda = re^{\mp i\theta} = r(\cos\theta \mp i\sin\theta)$ şeklinde yazılır. O halde $a_j \mp i\gamma_j$ karakteristik köküne karşılık gelen çözümler $r^t\cos\theta t$ ve $r^t\sin\theta t$'tir. Eğer karmaşık kökler katlı ise çözümler bir önceki duruma benzer şekilde bulunur [12].

3 DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜLEBİLİRLİĞİ

Bu bölümün temel amacı

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n} \qquad n \in N_0 \tag{3.1}$$

fark denklem sistemininden p_n, q_n, r_n ve s_n dizilerinin farklı durumları için elde edilen 16 farklı denklem sisteminin 14 tanesinin çözülebilirliğini göstermektir. Bu 14 durum tek tek incelenmiştir[29].

Bu durumların incelenmesinde Ricatti fark denklemi ve çözümlerinden faydalanılmıştır.

3.1 Ricatti Fark Denklemi

Diferansiyel denklemlerde olduğu gibi fark denklemlerinde de Ricatti denklemi en ilgi çekici denklemlerden biridir ve birçok problemin çözümünde yaygın olarak kullanılır.

Tanım 3.1. a, b, c, d parametreler olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a+bx_n}{c+dx_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.2}$$

ile verilen denkleme Ricatti fark denklemi denir.

Bu denklem $a = 0,\ b = c = d = 1$ için

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}, n \in N_0$$

halini alır ve yaygın kullanımda genel çözüm

$$x_{n+1} = \frac{x_0}{x_0 n+1}, \qquad n \in N_0 \tag{3.3}$$

formundadır.

x_0 ve y_0 gerçel başlangıç değerleri için

$$x_{n+1} = \frac{p_n}{1+q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{r_n}{1+s_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.4}$$

denklem sisteminin 16 olası durumunun 14 tanesinin çözülebildiği Stevic [22] tarafindan gösterilmiştir. p_n, q_n, r_n ve $s_n$dizilerinin x_n veya y_n ile değiştirilmesi ile elde edilen 16 olası durum (16 farklı denklem sistemi) vardır. Bu sistemleri çözmek için (3.2) Ricatti denkleminin yanısıra çeşitli yöntemler kullanılır.

Biz bu tezde aynı mantıkla

$$x_{n+1} = \frac{1+p_n}{q_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+r_n}{s_n}, \qquad n \in N_0$$

fark denklem sistemlerini ele alacağız. p_n, q_n, r_n ve s_n dizileri benzer şekilde başlangıç değerleri sıfır olmayan x_n ve y_n dizilerini temsil eder. Böylece türetilen olası 16 sistem varlığını kurarak esas olarak 14 sistemin daha detaylı çözülebilir olduğunu göstereceğiz. Burada bazı çözümlerde Fibonacci sayıları kullanacaktır [13]. O halde aşağıdaki ön bilgilere bakalım.

Tanım 3.2. $F_0 = 0, F_1 = 1$ ve

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \qquad n \geq 1$$

rekürsif denklemi ile tanımlanan $\{F_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine Fibonacci sayı dizisi denir. Bu sayı dizisinin elemanlarına Fibonacci sayıları denir.

$\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n. Fibonacci sayısı

$$F_n = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-} \tag{3.5}$$

şeklinde bir formülle ifade edilmektedir ve Binet formülü olarak adlandırılmaktadır. Binet formülünden hareketle

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lambda_+$$

olduğu görülmektedir. Burada $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran olarak adlandırılmaktadır.

Fibonacci sayılarının kısmi toplamları içinde

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

formülleri vardır [5].

Eğer $d \neq 0$ ise

$$x_n = \left(\frac{b+c}{d}\right) y_n - \frac{c}{d}$$

dönüşümünü kullanırsak (3.2) Ricatti denklemi

$$y_{n+1} = \frac{bc - ad}{(b+c)^2 y_n} + 1$$

halini alır.

$$R = \frac{bc - ad}{(b+c)^2}$$

Ricatti sayısı olarak adlandırılırsa bu durumda

$$y_{n+1} = \frac{-R + y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.6}$$

denklemi elde edilir.

$R=-1$ için $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü için (3.6) denklemi

$$z_{n+2} - z_{n+1} - z_n = 0 \qquad n \in N_0 \tag{3.7}$$

$z_0,\ z_1 \in R\backslash\{0\}$ başlangıç değerlerine sahip sabit katsayılı lineer homojen fark denklemine dönüşür ve karakteristik denklem $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ olarak bulunur. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ve } \lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir. O halde (3.7) denkleminin çözümü

$$z_n = \frac{(z_1 - \lambda_- z_0)\lambda_+^n - (z_1 - \lambda_+ z_0)\lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-}$$

olur. Bu denklemi daha basit bir formda

$$z_n = F_n z_1 + F_{n-1} z_0 \qquad n \in N_0 \tag{3.8}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada F_n n. Fibonacci sayısı olarak $F_n = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-}$ şeklindedir. $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ olduğundan (3.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$y_n = \frac{F_{n+1} y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}} \tag{3.9}$$

genel çözümü bulunur.

Ayrıca t_0 ve t_1 başlangıç değerine sahip

$$t_{n+2} + t_{n+1} - t_n = 0 \qquad n \in N_0 \tag{3.10}$$

denklemin karakteristik denklemi $\mu^2 + \mu - 1 = 0$ olarak bulunur. Kökleri ise

$\mu_\pm = -\lambda_\mp$ formundadır. O halde bu denklemin çözümü de

$$t_n = (-1)^{n-1}(F_n t_1 - F_{n-1} t_0), \qquad n \in N_0 \tag{3.11}$$

şeklindedir ve F_n n. Fibonacci sayısı olarak tanımlanmıştır.

3.2 Ana Sonuçlar

Bu bölümde yukarıda verilen ön bilgiler yardımı ile . p_n, q_n, r_n ve s_n dizilerinin farklı durumları için (3.4) denklem sistemlerinin çözülebilirliğini inceleyeceğiz.

Durum 1. $p_n = x_n, q_n = x_n, r_n = y_n, s_n = y_n$ olsun. Bu durumda sistem

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.12}$$

$$y_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.13}$$

şeklindedir. $x_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü yapılıp (3.12)'te yerine yazılırsa

$$z_{n+2} - z_{n+1} - z_n = 0 \tag{3.14}$$

fark denklemi elde edilir. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

şeklindedir ve kökleri $\lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir.

O halde (3.14)'in genel çözümü

$$z_n = c_1\lambda_+^n + c_2\lambda_-^n \tag{3.15}$$

ile verilir. c_1, c_2 keyfi sabitlerini elde etmek için $n = 0$ ve $n = 1$ değerleri (3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$z_0 = c_1 + c_2$$

$$z_1 = c_1\lambda_+ + c_2\lambda_-$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$c_1 = \frac{z_1 - \lambda_- z_0}{\lambda_- - \lambda_+} \tag{3.16}$$

$$c_2 = \frac{z_1 - \lambda_+ z_0}{\lambda_- - \lambda_+} \tag{3.17}$$

bulunur. Bulunan c_1 ve c_2 keyfi sabitleri (3.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$z_n = \frac{z_1 - \lambda_- z_0}{\lambda_+ - \lambda_-} . \lambda_+^n - \frac{z_1 - \lambda_+ z_0}{\lambda_+ - \lambda_-} . \lambda_-^n \tag{3.18}$$

bulunur. Denklem düzenlendiğinde Binet formülü ile (3.5)

$$z_n = F_n z_1 + F_{n-1} z_0 \tag{3.19}$$

genel çözümü elde edilir.

$x_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ ve $x_0 = \frac{z_1}{z_0}$ olduğu için

$$x_n = \frac{F_{n+1} x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}}, \qquad n \in N_0 \tag{3.20}$$

$$y_n = \frac{F_{n+1} y_0 + F_n}{F_n y + F_{n-1}}, \qquad n \in N_0 \tag{3.21}$$

bulunur.

Sonuç 3.1. $\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = \lambda_+$

İspat.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1} x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}\left(x_0 + \frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}{F_n\left(x_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)} = \lambda_+ \tag{3.22}$$

Durum 2. $p_n = x_n, q_n = x_n, r_n = x_n, s_n = x_n$ durumunu inceleyeceğiz. Bu durumda sistem

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{x_n}, \; y_{n+1} = \frac{1 + y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.23}$$

elde ederiz ki $n \in N$ için 1. durumla benzerlik taşımaktadır. 1. durumdaki x_{n+1} için yapılan çözüm burada da tekrarlanacaktır. $n \in N$ için $x_n = y_n$ olduğundan

$$x_n = y_n = \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}}, \qquad n \in N_0 \tag{3.24}$$

bulunur.

Sonuç 3.2. Burada bulacağımız sonuçta (3.22) deki gibidir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} = \lambda_+ \tag{3.25}$$

Durum 3. $p_n = y_n, q_n = y_n, r_n = y_n, s_n = y_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, \; y_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.26}$$

halini alacaktır. Bu durumda x_n ve y_n yer değiştirmiştir. O halde bu sistemi çözmek için bu kez $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü yapılıp (3.26)'da yerine yazılırsa (3.14) fark denklemi elde edilir. Bu denklem Durum 1.'de olduğu gibi çözüldüğünde

$$x_n = y_n = \frac{F_{n+1}y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}}, \qquad n \in N_0 \tag{3.27}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3. $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} = \lambda_+$

Durum 4. $p_n = x_n, q_n = x_n, r_n = y_n, s_n = x_n$ durumunda sistem

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \; y_{n+1} = \frac{1+y_n}{x_n}, \qquad n \in N_0$$

haline dönüşür. x_n çözümü (3.24) ile verilir. Bunu ikinci denklemde yerine yazarsak

$$y_{n+1} = \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} + \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} . y_n \tag{3.28}$$

şeklinde oluşur.Burada $n = 0, 1, 2, \dots, n$ değerleri yazılırsa

$n = 0$ için

$$y_1 = \frac{F_0 x_0 + F_{-1}}{F_1 x_0 + F_0} + \frac{F_0 x_0 + F_{-1}}{F_1 x_0 + F_0} . y_0 \tag{3.29}$$

$n = 1$ için

$$y_1 = \frac{F_1 x_0 + F_0}{F_2 x_0 + F_1} + \frac{F_1 x_0 + F_0}{F_2 x_0 + F_1} . y_1$$

olur. Burada y_1 yerine (3.29)'deki değeri yazılırsa

$$y_2 = \frac{F_1 x_0 + F_0}{F_2 x_0 + F_1} + \prod_{i=0}^{1} \frac{F_i x_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} x_0 + F_i} . (1 + y_0)$$

halini alır ve n'nin devam eden değerleri için

$$y_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{F_i x_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} x_0 + F_i}\right) y_0 + \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{F_i x_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} x_0 + F_i}\right) . \sum_{j=0}^{n-1} (F_j x_0 + F_{j-1}) \tag{3.30}$$

olur. $i = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ değerleri için

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{F_i x_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} x_0 + F_i} = \frac{F_0 x_0 + F_{-1}}{F_n x_0 + F_{n-1}} \tag{3.31}$$

şeklini alır.

F_{-1} ve F_0 değerleri (3.5)'den yararlanılarak $F_{-1} = 1$ ve $F_0 = 0$ olarak bulunur. (3.31)'de bu değerleri yazarsak

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{F_i x_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} x_0 + F_i} = \frac{1}{F_n x_0 + F_{n-1}} \tag{3.32}$$

elde edilir.Ayrıca (3.30) daki kısmi toplamda

$$\sum_{j=0}^{n-1} F_j x_0 + F_{j-1} = F_0 x_0 + F_{-1} + F_1 x_0 + F_0 + F_2 x_0 + F_1 + \cdots + F_{n-1} x_0 + F_{n-2}$$

$$= 1 + (F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n+1}) x_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-2}$$

$$= 1 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^{n-2} F_i$$

$$= 1 + (F_{n+1} - 1)x_0 + F_n - 1$$

$$= (F_{n+1} - 1)x_0 + F_n \quad (3.33)$$

şeklindedir.

O halde (3.30) denklemi (3.32) ve (3.33) kullanılarak

$$y_n = \frac{y_0 + (F_{n+1} - 1)x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}}, \qquad n \in N_0 \qquad (3.34)$$

olarak bulunur.

Sonuç 3.4. $n \to \infty$ için x_n ve y_n limitlerine bakarsak

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}\left(x_0 + \frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}{F_n\left(x_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)} = \lambda_+$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + (F_{n+1} - 1)x_0 + F_n}{F_n x_0 + F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}\left(\frac{y_0}{F_{n+1}} + x_0 - \frac{x_0}{F_{n+1}} + \frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}{F_n\left(x_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}\left(x_0 + \frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}{F_n\left(x_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)} = \lambda_+ \qquad (3.35)$$

olduğu görülmektedir.

Durum 5. $p_n = x_n, q_n = y_n, r_n = y_n, s_n = y_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1 + y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0$$

şeklini alır. Bu sistemde tıpkı 4. duruma benzemektedir. x_n ve y_n'in yer değiştirmiş halidir. 3. durumdan $y_n = \frac{F_{n+1}y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}}$ olduğunu biliyoruz. Bunu x_{n+1}'de yerine yazarsak

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+1}y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}} + \frac{F_{n+1}y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}} . x_n \tag{3.36}$$

olur. $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ değerleri için

$$x_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{F_i y_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} y_0 + F_i}\right) x_0 + \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{F_i y_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} y_0 + F_i}\right) . \sum_{j=0}^{n-1} (F_j y_0 + F_{j-1}) \tag{3.37}$$

şeklini alır. Burada 4. durumda olduğu gibi

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{F_i y_0 + F_{i-1}}{F_{i+1} y_0 + F_i} = \frac{F_0 y_0 + F_{-1}}{F_n y_0 + F_{n-1}} = \frac{1}{F_n y_0 + F_{n-1}}$$

ve kısmi toplamda

$$\sum_{j=0}^{n-1} (F_j y_0 + F_{j-1}) = (F_{n+1} - 1) y_0 + F_n$$

şeklindedir.

O halde x_n ve y_n için

$$x_n = \frac{x_0 + (F_{n+1} - 1) y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}}, \quad y_n = \frac{F_{n+1} y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}} \qquad n \in N_0 \tag{3.38}$$

sonuçlarına ulaşılır.

Sonuç 3.5. $n \to \infty$ için x_n ve y_n limitlerine bakarsak 4. duruma benzerlik taşıdığından

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1} y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}\left(y_0 + \frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}{F_n\left(y_0 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right)} = \lambda_+$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0+(F_{n+1}-1)y_0+F_n}{F_n y_0+F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}\left(\frac{x_0}{F_{n+1}}+y_0-\frac{y_0}{F_{n+1}}+\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}{F_n\left(y_0+\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}\left(y_0+\frac{F_n}{F_{n+1}}\right)}{F_n\left(y_0+\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)} = \lambda_+ \qquad (3.39)$$

olduğu görülmektedir.

Durum 6. $p_n = x_n, q_n = x_n, r_n = x_n, s_n = y_n$ olsun. Sistemimiz,

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}, \qquad n \in N_0$$

halindedir.. x_{n+2} ve y_{n+2}'yi oluşturalım.

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_{n+1}}$$

ve

$$y_{n+2} = \frac{(1+x_{n+1})y_n}{1+x_n} = \frac{x_{n+2}}{x_n}.y_n \qquad (3.40)$$

olur. Burada n'in tek ve çift değerlerinde durumu görmek için

$$y_{2n+2} = \frac{x_{2n+2}}{x_{2n}}.y_{2n}$$

oluşturulur ve

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$ değerleri yazılırsa

$$y_{2n} = \frac{y_0}{x_0}.x_{2n} = \frac{y_0}{x_0}.\frac{F_{2n+1}x_0+F_{2n}}{F_{2n}x_0+F_{2n-1}}, \qquad n \in N_0 \qquad (3.41)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$y_{2n+3} = \frac{x_{2n+3}}{x_{2n+1}}.y_{2n+1}$$

oluşturulur ve $n = 0,1,2,3,\dots,n-1$ değerleri yazılırsa

$$y_{2n+1} = \frac{x_{2n+1}}{x_{2n-1}}.y_{2n-1} = \frac{y_1}{x_1}.x_{2n+1} = \frac{y_1}{x_1}.\frac{F_{2n+2}x_0+F_{2n+1}}{F_{2n+1}x_0+F_{2n}}, \qquad n \in N_0 \qquad (3.42)$$

elde edilir . (3.41) ve (3.42) yi birleştirirsek

$$x_n = \frac{F_{n+1}x_0+F_n}{F_n x_0+F_{n-1}}, \text{ ve } y_n = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{(-1)^n}.\frac{F_{n+1}x_0+F_n}{F_n x_0+F_{n-1}}, \quad n \in N_0 \qquad (3.43)$$

sonucuna ulaşırız.

Sonuç 3.6. $n \to \infty$ için x_{2n} ve y_{2n} limitlerine bakarsak

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}\left(x_0+\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)}{F_{2n}\left(x_0+\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \lambda_+ \qquad (3.44)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{(-1)^{2n}}.\frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_0}{x_0}.\frac{F_{2n+1}\left(x_0+\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)}{F_{2n}\left(x_0+\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_0}{x_0}.\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \frac{y_0}{x_0}.\lambda_+ \qquad (3.45)$$

bulunur.

Şimdi yine $n \to \infty$ için x_{2n+1} ve y_{2n+1}'e bakalım.

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{2n+2}x_0+F_{2n+1}}{F_{2n+1}x_0+F_{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_{2n+2}\left(x_0+\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}\right)}{F_{2n+1}\left(x_0+\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)} = \lambda_+ \qquad (3.46)$$

bulunur ve yine benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^{(-1)^n} . \frac{F_{2n+2}x_0+F_{2n+1}}{F_{2n+1}x_0+F_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0}{x_0} . \frac{F_{2n+2}\left(x_0+\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}\right)}{F_{2n+1}\left(x_0+\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)} = \frac{y_0}{x_0} . \lambda_+ \quad (3.47)$$

şeklinde bulunur.

Durum 7. $p_n = y_n, q_n = x_n, r_n = y_n, s_n = y_n$ Sistemimiz,

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{x_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0$$

6. duruma benzer şekilde x_{n+2}'yi oluşturursak

$$x_{n+2} = \frac{y_{n+2}}{y_n} . x_n$$

olur.

n'in tek ve çift değerlerinde durumu görmek için

$$x_{2n+2} = \frac{y_{2n+2}}{y_{2n}} . x_{2n}$$

ve

$$x_{2n+3} = \frac{y_{2n+3}}{y_{2n+1}} . x_{2n+1}$$

ifadelerinde $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$ değerleri verildiğinde

$$x_{2n} = \frac{x_0}{y_0} . \frac{F_{2n+1}y_0+F_{2n}}{F_{2n}y_0+F_{2n-1}}, \qquad n \in N_0 \qquad (3.48)$$

olduğu ve

$$x_{2n+1} = \frac{x_1}{y_1} . \frac{F_{2n+2}y_0+F_{2n+1}}{F_{2n+1}y_0+F_{n-1}}, \qquad n \in N_0 \qquad (3.49)$$

olduğu görülür. O halde

$$y_n = \frac{F_{n+1}y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}}\ ,\ \ x_n = \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{(-1)^n} . \frac{F_{n+1}y_0 + F_n}{F_n y_0 + F_{n-1}}\ ,\quad n \in N_0 \tag{3.50}$$

sonucu yazılabilir.

Sonuç 3.7. $n \to \infty$ için x_{2n} ve y_{2n} limitlerine bakarsak

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{(-1)^{2n}} . \frac{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{y_0} . \frac{F_{2n+1}\left(y_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)}{F_{2n}\left(y_0 + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x_0}{y_0} . \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \frac{x_0}{y_0} . \lambda_+ \tag{3.51}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}\left(y_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)}{F_{2n}\left(y_0 + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right)} = \lambda_+ \tag{3.52}$$

olur.

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{(-1)^{2n+1}} . \frac{F_{2n+2}y_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{y_0}{x_0} . \frac{F_{2n+2}\left(y_0 + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}\right)}{F_{2n+1}\left(y_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)} = \frac{y_0}{x_0} . \lambda_+ \tag{3.53}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+2}y_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+2}\left(y_0+\frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}\right)}{F_{2n+1}\left(y_0+\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)} = \lambda_+ \tag{3.54}$$

Durum 8. $p_n = y_n, q_n = y_n, r_n = x_n, s_n = x_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \qquad n \in N_0$$

olur. x_{n+2} ve y_{n+2}'yi oluşturduğumuzda

$$x_{n+2} = \frac{1+2x_n}{1+x_n}, \qquad y_{n+2} = \frac{1+2y_n}{1+y_n}$$

olur. Bu denklem sistemini çözmek için $x_n = \frac{z_{n+2}}{z_n} - 1$ değişkenini

$$(z_n.z_{n+2} \neq 0 \text{ ve } z_n \neq z_{n+2}\,, \qquad n \in N_0)$$

tanımlarsak ve x_{n+2}'de yerine yazarsak

$$\frac{z_{n+4}}{z_{n+2}} - 1 = \frac{1+2\left(\frac{z_{n+2}}{z_n}-1\right)}{1+\frac{z_{n+2}}{z_n}-1} \Rightarrow z_{n+4} - 3z_{n+2} + z_n = 0 \tag{3.55}$$

denklemi elde edilir. (3.7) ve (3.10) fark denkleminin çözümünü bildiğimizden (3.55) denklemini

$$(z_{n+4} + z_{n+3} - z_{n+2}) - (z_{n+3} + z_{n+2} - z_{n+1}) - (z_{n+2} + z_{n+1} - z_n) = 0$$

yazabiliriz. Buradan

$$t_m = z_{n+2} + z_{n+1} - z_n$$

şeklinde tanımlarsak

$$t_{m+2} - t_{m+1} - t_m = 0$$

yazılabilir ki bu fark denkleminin çözümü

$$t_m = F_n t_1 + F_{n-1} t_0$$

(3.8) formunda oluşacaktır.

O halde

$$z_{n+2} + z_{n+1} - z_n = F_n(z_3 + z_2 - z_1) + F_{n-1}(z_2 + z_1 - z_0) \qquad (3.56)$$

fark denklemi elde edilir. Benzer şekilde (3.55) denklemi

$$(z_{n+4} - z_{n+3} - z_{n+2}) + (z_{n+3} - z_{n+2} - z_{n+1}) - (z_{n+2} - z_{n+1} - z_n) = 0$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu durumda

$$k_m = z_{n+2} - z_{n+1} - z_n$$

olarak tanımlarsak

$$k_{m+2} + k_{m+1} - k_m = 0$$

fark denklemi bulunur. bu denklemin çözümü

$$k_m = (-1)^{n-1}.(F_n k_1 + F_{n-1} k_0)$$

(3.11) formunda oluşacaktır. O halde çözümümüz

$$z_{n+2} - z_{n+1} - z_n = (-1)^{n-1}.\left(F_n(z_3 - z_2 - z_1) + F_{n-1}(z_2 - z_1 - z_0)\right) \qquad (3.57)$$

olur. (3.56) ve (3.57) denklemlerinde n yerine $2n$ ve $2n+1$ değerlerini yazarsak

$$z_{2n+2} + z_{2n+1} - z_{2n} = \left(F_{2n}(z_3 + z_2 - z_1) + F_{2n-1}(z_2 + z_1 - z_0)\right) \qquad (3.58)$$

$$z_{2n+2} - z_{2n+1} - z_{2n} = (-1)^{2n-1}.\left(F_{2n}(z_3 - z_2 - z_1) - F_{2n-1}(z_2 - z_1 - z_0)\right) \qquad (3.59)$$

$$z_{2n+3} + z_{2n+2} - z_{2n+1} = F_{2n+1}(z_3 + z_2 - z_1) + F_{2n}(z_2 + z_1 - z_0) \qquad (3.60)$$

$$z_{2n+3} - z_{2n+2} - z_{2n+1} = (-1)^{2n}.\left(F_{2n+1}(z_3 - z_2 - z_1) - F_{2n}(z_2 - z_1 - z_0)\right) \quad (3.61)$$

denklemini elde ederiz. (3.59) ve (3.58)'i taraf tarafa çıkarırsak.

$$z_{2n+1} = F_{2n} z_3 + F_{2n-2} z_1 \quad (3.62)$$

(3.61)'den de (3.60) denklemini çıkarırsak

$$z_{2n+2} = F_{2n+2} z_2 - F_{2n} z_0 \quad (3.63)$$

denklemi bulunur. $x_n = \frac{z_{n+2}}{z_n} - 1$ yerine yazar ve düzenlersek

$$x_{2n} = \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}}, \; x_{2n+1} = \frac{F_{2n+2}y_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}, \qquad n \in N_0 \quad (3.64)$$

ve

$$y_{2n} = \frac{F_{2n+1}y_0 + F_n}{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}}, \; y_{2n+1} = \frac{F_{2n+2}x_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}, \qquad n \in N_0 \quad (3.65)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.8. $n \to \infty$ için x_{2n} x_{2n+1}, y_{2n} ve y_{2n+1} limitlerine bakarsak

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}}{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}\left(x_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)}{F_{2n}\left(x_0 + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right)} = \lambda_+$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+2}y_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+2}\left(y_0 + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}\right)}{F_{2n+1}\left(y_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)} = \lambda_+ \quad (3.66)$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}}{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}\left(y_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)}{F_{2n}\left(y_0 + \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}\right)} = \lambda_+$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+2}x_0 + F_{2n+1}}{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+2}\left(x_0 + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+2}}\right)}{F_{2n+1}\left(x_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}\right)} = \lambda_+ \quad (3.67)$$

şeklinde bulunur.

Durum 9. $p_n = y_n, q_n = y_n, r_n = x_n, s_n = y_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.68}$$

ve

$$y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.69}$$

şeklindedir. Çözüm için $x_{n+1} = y_{n+2}.y_{n+1} - 1$ ifadesini (3.68)'de yazarsak

$$y_{n+2}.y_{n+1}.y_n. = 1 + 2y_n \tag{3.70}$$

elde edilir. Bu denklemde $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü yaparsak ve düzenlersek

$$z_{n+3} - 2z_{n+1} - z_n = 0$$

fark denklemini elde edilir. çözüm için denklemi

$$(z_{n+3} + z_{n+2}) - (z_{n+2} - z_{n+1}) - (z_{n+1} + z_n) = 0$$

formunda yazarsak ve $t_n = z_{n+1} + z_n$ değer dönüşümü tanımlarsak denklemimiz

$$t_{n+2} - t_{n+1} - t_n = 0$$

halini alır ve çözüm

$$t_n = F_n t_1 + F_{n-1} t_0$$

şeklinde yazılır ve denklem

$$z_{n+1} + z_n = F_n(z_2 - z_1) + F_{n-1}(z_1 - z_0)$$

halini alır. Burada n'e $n \in N_0$ değerleri verilir ve genelleştirilince

$$z_{2n} = F_{2n-2}(z_2 - z_1) + F_{2n-3}(z_1 - z_0) + z_2 - z_1 - z_0$$

$$z_{2n+1} = F_{2n-1}(z_2 - z_1) + F_{2n-2}(z_1 - z_0) - (z_2 - z_1 - z_0)$$

$$z_{2n+2} = F_{2n}(z_2 - z_1) + F_{2n-1}(z_1 - z_0) + z_2 - z_1 - z_0$$

değerlerini buluruz. $y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ olduğundan y_{2n} ve y_{2n+1}'i oluşturup düzenlersek

$$y_{2n} = \frac{(F_{2n}+1)y_0 + (F_{2n-1}-1)x_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)y_0 + (F_{2n-2}+1)x_0 + F_{2n-1}} \tag{3.71}$$

$$y_{2n+1} = \frac{(F_{2n+1}-1)y_0 + (F_{2n-1}-1)x_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n-1}-1)y_0 + (F_{2n-2}-1)x_0 + F_{2n}} \tag{3.72}$$

$n \in N_0$ çözümü elde edilir. (3.68)'de n yerine $2n$ ve $2n+1$ değeri verilip düzenlendiğinde ise x_n çözümlerin

$$x_{2n} = \frac{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}x_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)y_0 + (F_{2n-2}+1)x_0 + F_{2n-1}} \tag{3.73}$$

$$x_{2n+1} = \frac{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}x_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n}-1)y_0 + (F_{2n-1}-1)x_0 + F_{2n}} \tag{3.74}$$

$n \in N_0$ için oluştuğu görülür.

Sonuç 3.9. $n \to \infty$ için y_{2n}, y_{2n+1}, x_{2n} ve x_{2n+1} limitin değerlerine baktığımızda

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(F_{2n}+1)y_0 + (F_{2n-1}-1)x_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)y_0 + (F_{2n-2}+1)x_0 + F_{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}\left[\left(1+\frac{1}{F_{2n}}\right)y_0 + \left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n}}\right)x_0 + 1\right]}{F_{2n-1}\left[\left(1-\frac{1}{F_{2n-1}}\right)y_0 + \left(\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}} - \frac{1}{F_{2n-1}}\right)x_0 + 1\right]} = \lambda_+$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(F_{2n+1}-1)y_0 + (F_{2n}-1)x_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n}+1)y_0 + (F_{2n-1}-1)x_0 + F_{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}\left[\left(1-\frac{1}{F_{2n+1}}\right)y_0 + \left(\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}+\frac{1}{F_{2n+1}}\right)x_0 + 1\right]}{F_{2n}\left[\left(1+\frac{1}{F_{2n}}\right)y_0 + \left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}-\frac{1}{F_{2n}}\right)x_0 + 1\right]} = \lambda_+$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \lambda_+ \tag{3.75}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}y_0 + F_{2n-1}x_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)y_0 + (F_{2n-2}+1)x_0 + F_{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}(y_0 + x_0 + 1)}{F_{2n-1}\left[\left(1-\frac{1}{F_{2n-1}}\right)y_0 + \left(\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}}-\frac{1}{F_{2n-1}}\right)x_0 + 1\right]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}}{F_{2n}-1} = \lambda_+$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}y_0 + F_{2n}x_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n}-1)y_0 + (F_{2n-1}-1)x_0 + F_{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}(y_0 + x_0 + 1)}{F_{2n}\left[\left(1+\frac{1}{F_{2n}}\right)y_0 + \left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}-\frac{1}{F_{2n}}\right)x_0 + 1\right]} = \lambda_+$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = \lambda_+ \tag{3.76}$$

olarak bulunur.

Durum 10. $p_n = y_n, q_n = x_n, r_n = x_n, s_n = x_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{x_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.77}$$

ve

$$y_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.78}$$

halindedir. Çözüm için (3.77)'da x_{n+2}'yi oluşturup (3.78)'de $z_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü yaparsak

$$z_{n+3} - 2z_{n+1} - z_n = 0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklem 9. durumda bulduğumuz fark denklemi ile aynıdır ve çözümünde

$$z_{n+1} + z_n = F_n(z_2 - z_1) + F_{n-1}(z_1 - z_0)$$

bulunur. Fibonacci sayı dizisinden yararlanarak

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$$

ve

$$F_{n-1} = F_{n-3} + F_{n-2}$$

değerleri yazılır ve düzenlenir. Genelleştirilirse

$$z_n = (-1)^n(z_2 - z_1 - z_0) + [F_{n-2}(z_2 - z_1) + F_{n-1}(z_1 - z_0)]$$

bulunur. x_{2n}, x_{2n+1}, y ve y_{2n+1}'i oluşturursak

$$x_{2n} = \frac{(F_{2n}+1)x_0 + (F_{2n-1}-1)y_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)x_0 + (F_{2n-2}+1)y_0 + F_{2n-1}}$$

$$x_{2n+1} = \frac{(F_{2n+1}-1)x_0 + (F_{2n-1}-1)y_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n-1}-1)x_0 + (F_{2n-2}-1)y_0 + F_{2n}} \tag{3.79}$$

ve

$$y_{2n} = \frac{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}y_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)x_0 + (F_{2n-2}+1)y_0 + F_{2n-1}}$$

$$y_{2n+1} = \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}y_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n}-1)x_0 + (F_{2n-1}-1)y_0 + F_{2n}} \qquad n \in N_0 \tag{3.80}$$

şeklinde bulunur ki bu durum 9. durumdaki x_0 ve y_0'ın yer değiştirmiş halidir.

Sonuç 3.10. $n \to \infty$ için x_{2n}, x_{2n+1}, y_{2n} ve y_{2n+1} limitin değerlerine baktığımızda

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(F_{2n}+1)x_0 + (F_{2n-1}-1)y_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)x_0 + (F_{2n-2}+1)y_0 + F_{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}\left[\left(1+\frac{1}{F_{2n}}\right)x_0 + \left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n}}\right)y_0 + 1\right]}{F_{2n-1}\left[\left(1-\frac{1}{F_{2n-1}}\right)x_0 + \left(\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}} - \frac{1}{F_{2n-1}}\right)y_0 + 1\right]} = \lambda_+$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(F_{2n+1}-1)x_0 + (F_{2n}-1)y_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n}+1)x_0 + (F_{2n-1}-1)y_0 + F_{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}\left[\left(1-\frac{1}{F_{2n+1}}\right)x_0 + \left(\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} + \frac{1}{F_{2n+1}}\right)y_0 + 1\right]}{F_{2n}\left[\left(1+\frac{1}{F_{2n}}\right)x_0 + \left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n}}\right)y_0 + 1\right]} = \lambda_+ \qquad (3.81)$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}x_0 + F_{2n-1}y_0 + F_{2n}}{(F_{2n-1}-1)x_0 + (F_{2n-2}+1)y_0 + F_{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}\left(x_0 + \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}y_0 + 1\right)}{F_{2n-1}\left[\left(1-\frac{1}{F_{2n-1}}\right)x_0 + \left(\frac{F_{2n-2}}{F_{2n-1}} - \frac{1}{F_{2n-1}}\right)y_0 + 1\right]} = \lambda_+$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n+1}x_0 + F_{2n}y_0 + F_{2n+1}}{(F_{2n}-1)x_0 + (F_{2n-1}-1)y_0 + F_{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{2n}\left(x_0 + \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}y_0 + 1\right)}{F_{2n}\left[\left(1+\frac{1}{F_{2n}}\right)x_0 + \left(\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} - \frac{1}{F_{2n}}\right)y_0 + 1\right]} = \lambda_+ \qquad (3.82)$$

şeklinde olduğunu görürüz.

Durum 11. $p_n = y_n, q_n = x_n, r_n = y_n, s_n = x_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1}=\frac{1+y_n}{x_n},\quad y_{n+1}=\frac{1+y_n}{x_n},\qquad n\in N_0$$

şeklindedir ve $x_{n+1}=y_{n+1}$ açıkça görülmektedir.

$$x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_{n+1}},\qquad n\in N_0 \tag{3.83}$$

dır.

$x_n=\frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü yapıp (3.83) denkleminde yerine yazarsak

$$z_{n+3}-z_{n+2}-z_{n+1}=0$$

olur ki bu denklemin çözümü (3.8)'den

$$z_{n+1}=F_nz_2+F_{n-1}z_1$$

şeklindedir ve (3.83)'den

$$x_{n+1}=y_{n+1}=\frac{F_{n+1}(1+y_0)+F_nx_0}{F_n(1+y_0)+F_{n-1}x_0},\qquad n\in N_0$$

ve dolayısıyla

$$x_n=y_n=\frac{F_n(1+y_0)+F_{n-1}x_0}{F_{n-1}(1+y_0)+F_{n-2}x_0},\qquad n\in N_0 \tag{3.84}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.11.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(1+y_0)+F_{n-1}x_0}{F_{n-1}(1+y_0)+F_{n-2}x_0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{F_n(1+y_0)+\frac{F_{n-1}}{F_n}x_0}{F_{n-1}(1+y_0)+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}x_0}=\lambda_+ \tag{3.85}$$

şeklindedir.

Durum 12. $p_n = x_n, q_n = y_n, r_n = x_n, s_n = y_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}, \qquad n \in N_0$$

şeklindedir ve $x_{n+1} = y_{n+1}$ olduğu açıktır. $x_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü yaparsak

$$z_{n+3} - z_{n+2} - z_{n+1} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü (3.8)'den

$$z_{n+1} = F_n z_2 + F_{n-1} z_1$$

olur. O halde

$$x_{n+1} = y_{n+1} = \frac{F_{n+1}(1+x_0)+F_n y_0}{F_n(1+x_0)+F_{n-1}y_0}, \qquad n \in N_0$$

ve dolayısıyla

$$x_n = y_n = \frac{F_n(1+x_0)+F_{n-1}y_0}{F_{n-1}(1+x_0)+F_{n-2}y_0}, \qquad n \in N \tag{3.86}$$

şeklinde bulunur.

Sonuç 3.12.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n(1+x_0)+F_{n-1}y_0}{F_{n-1}(1+x_0)+F_{n-2}y_0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F_n\left[(1+x_0)+\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}y_0\right]}{F_{n-1}\left[(1+x_0)+\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}y_0\right]} = \lambda_+ \tag{3.87}$$

Durum 13. $p_n = y_n, q_n = y_n, r_n = y_n, s_n = x_n$ bu durumda ise sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1+y_n}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+y_n}{x_n}, \qquad n \in N_0$$

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n}{y_n} \tag{3.88}$$

dir.

(3.88)'de $n \in N_0$ için değeri için $y_n = \frac{y_0}{x_0}.x_n$ olduğu görülür. Buradan

$$x_{n+1} = \frac{\frac{y_0}{x_0}+x_n}{x_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.89}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde

$$y_{n+1} = \frac{y_0}{x_0}.\frac{1+y_n}{y_n}, \qquad n \in N_0 \tag{3.90}$$

Yine $x_n = \frac{z_{n+1}}{z_n}$ dönüşümü yapılırsa

$$z_{n+2} - z_{n+1} - \frac{x_0}{y_0}.z_n = 0 \tag{3.91}$$

Bu fark denkleminin karakteristik denklemi

$$\alpha^2 - \alpha - \frac{x_0}{y_0} = 0 \tag{3.92}$$

ve denklemin karakteristik kökleri

$$\alpha_{\mp} = \frac{1 \mp \sqrt{1 + \frac{4x_0}{y_0}}}{2}$$

şeklindedir.

Genel çözüm için $\frac{x_0}{y_0}$'ın durumu belirleyici olacaktır.

Eğer $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{4}$ ise $\alpha_{\mp} = \frac{1}{2}$ olur ki bu durumda çözüm

$$z_n = \frac{n}{2^{n-1}}z_1 - \frac{1}{4}.\frac{n-1}{2^{n-1}}z_0, \qquad n \in N_0$$

şeklinde bulunur.

Eğer $\frac{x_0}{y_0} > -\frac{1}{4}$ ise çözüm

$$z_n = \frac{\alpha_+^n - \alpha_-^n}{\alpha_+ - \alpha_-} z_1 + \frac{x_0}{y_0} . \frac{\alpha_+^n - \alpha_-^n}{\alpha_+ - \alpha_-} z_0, \qquad n \in N_0$$

Eğer $\frac{x_0}{y_0} < -\frac{1}{4}$ ise kökler

$$\alpha_+ = \frac{1+i\sqrt{-1-4\frac{x_0}{y_0}}}{2} \qquad \text{ve} \qquad \alpha_- = \frac{1-i\sqrt{-1-4\frac{x_0}{y_0}}}{2}$$

şeklindedir ve genel çözüm

$$z_n = \left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} z_1 + \frac{x_0}{y_0}\left(-\frac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{n-2}{2}} \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)} z_0$$

olarak yazılır. Buradan

$$\theta = \arctan\left(\sqrt{-1-4\frac{x_0}{y_0}}\right)$$

ve $n \in N_0$ ve A_n'de aşağıdaki gibi

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{\left(1+\sqrt{1+4\frac{x_0}{y_0}}\right)^n - \left(1-\sqrt{1+4\frac{x_0}{y_0}}\right)^n}{2^n\sqrt{1+4\frac{x_0}{y_0}}}, & \dfrac{x_0}{y_0} > -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{n}{2^{n-1}}, & \dfrac{x_0}{y_0} = -\dfrac{1}{4} \qquad n \in N_0 \\ \left(-\dfrac{x_0}{y_0}\right)^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{\sin\left(n \arctan\left(\sqrt{-1-4\frac{x_0}{y_0}}\right)\right)}{\sin\left(\arctan\left(\sqrt{-1-4\frac{x_0}{y_0}}\right)\right)}, & \dfrac{x_0}{y_0} < -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa x_n genel çözümü

$$x_n = \frac{A_{n+1}x_0 + \frac{x_0}{y_0}A_n}{A_n x_0 + \frac{x_0}{y_0}A_{n-1}} \qquad (3.93)$$

oluşur.

$$x_n = \frac{A_{n+1}y_0 + A_n}{A_n y_0 + A_{n-1}}$$

yazılabilir. $y_n = \frac{y_0}{x_0}.x_n$ olduğu için

$$y_n = \frac{y_0}{x_0}.\frac{A_{n+1}y_0 + A_n}{A_n y_0 + A_{n-1}}, \qquad n \in N_0 \qquad (3.94)$$

Sonuç 3.13. $\{x_n, y_n\}_{n=0}^{\infty}$, (3.88) sisteminin çözümü olsun. Bu durumda

i. $\frac{x_0}{y_0} > -\frac{1}{4}$ ise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{x_0}{y_0}}}{2}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{y_0}{x_0}.\frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{x_0}{y_0}}}{2}$$

dir.

ii. $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{4}$ ise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{x_0}{y_0}}}{2}$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{y_0}{x_0}.\frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{x_0}{y_0}}}{2}$$

dir.

iii. $\frac{x_0}{y_0} < -\frac{1}{4}$ ise bu durumda iki farklı durum vardır.

a. $\frac{\arctan\left(\sqrt{-1-4\frac{x_0}{y_0}}\right)}{\pi} \in Q$ ise sistemin çözümleri periyodiktir. Ve periyodu $p > 2$ dir.

b. $\dfrac{\arctan\left(\sqrt{-1-4\frac{x_0}{y_0}}\right)}{\pi} \in Q^c$ ise sistemin çözümlerinin yörüngeleri $\mathbb{R}^2$ içinde yoğundur. Yani $\frac{x_0}{y_0} < -\frac{1}{4}$ ise (3.88) sistemi tek bir limit noktasına yakınsamazlar.

İspat.

i. Kolaylık için $1 + \sqrt{1 + 4\frac{x_0}{y_0}} = A$ olsun. Bu durumda $A > 0$ ve $\frac{1-A}{1+A} < 1$ olduğu görülebilir.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}y_0 + A_n}{A_n y_0 + A_{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}\left(y_0 + \frac{A_n}{A_{n+1}}\right)}{A_n\left(y_0 + \frac{A_{n-1}}{A_n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1+A)^{n+1} - (1-A)^{n+1}}{2^{n+1}} . \frac{2^n A}{(1+A)^n - (1-A)^n}$$

$$= \frac{1}{2} . \lim_{n\to\infty} \frac{(1+A)^{n+1}\left[1 - \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^{n+1}\right]}{(1+A)^n\left[1 - \left(\frac{1-A}{1+A}\right)^n\right]}$$

$$= \frac{1+A}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{x_0}{y_0}}}{2}$$

Benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{y_0}{x_0} . \frac{1 + \sqrt{1 + 4\frac{x_0}{y_0}}}{2}$$

olduğu görülebilir.

ii. $\frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{4}$ ise $A_n = \frac{n}{2^{n+1}}$ dir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}y_0 + A_n}{A_n y_0 + A_{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}\left(y_0 + \frac{A_n}{A_{n+1}}\right)}{A_n\left(y_0 + \frac{A_{n-1}}{A_n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{A_{n-1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + \frac{A_n}{A_{n+1}}}{y_0 + \frac{A_{n-1}}{A_n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^{n+1}}} . \lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + \frac{n}{2^{n+1}} . \frac{2^{n+2}}{n+1}}{y_0 + \frac{n-1}{2^{n+1}} . \frac{2^{n+1}}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} . \lim_{n\to\infty} \frac{y_0 + \frac{2n}{n+1}}{y_0 + \frac{2(n-1)}{n}} = \frac{1}{2}$$

benzer şekilde

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y_0}{x_0} . \frac{A_{n+1}y_0 + A_n}{A_n y_0 + A_{n-1}} = -4.\frac{1}{2} = -2$$

olduğu görülür.

Durum 14. $p_n = x_n, q_n = y_n, r_n = x_n, s_n = x_n$ olduğunda sistemimiz

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_n}, \qquad n \in N_0$$

olur. x_n ve y_n yer değiştirdiği için çözüm durum 13 ile aynıdır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

[1] Abramov S.A., "Rational Solutions of of Linear Differantial and Difference Equations with Polynomial Coefficients", Zh.Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 29, no.11, 1611-1620, 1787, 1989.

[2] Agarwal, R.P., Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekleer, 970, New York, 2000.

[3] Artzrouni, M., "Conditions for Asymptotically Exponential Solutions of Linear Difference Equations with Variable Coefficients", J. Math. Anal. Appl. 121, no.1, 160-172, 1987.

[4] Akın, Ö., Bulgak, H., Lineer Fark Denklemleri ve Kararlılık Teorisi, Selçuk, Üniversitesi Basımevi, Konya, 1998.

[5] Becker, P. G., K-Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations, J. Number Theory, 49 (3), 269-286, 1994.

[6] Elaydi, S., An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, 428, New York, 1999.

[7] Elaydi, S. and Peterson, A., Stability Of Difference Equations. Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Differential Equations, edited by Aftabizadeh R.; 417-422, 1988.

[8] Goldberg, S., Introduction to Differenc Equations With Illustrative Examples From Economies, Psychology and Sociology. Dover, 260, New York, 1986.

[9] Gordon, S., Stability And Summability Of Solutions Of Difference Equations. Math. Syst. Theory , 5 ;56-75, 1971.

[10] Hooker, J.W., "Oscillatory Second Order Linear Difference Equations and Riccati Equations", Siam J. Math. Anal., 18, no.1, 54-63, 1987.

[11] Kaczorek, T., "Extension of the Method of Continuants for n-order Linear Difference Equations with Variable Coefficients", Bull.Polish.Acad.Sci.Tech.Sci. 33, no.7-8, 395-400, 1985.

[12] Kelly, W.G. and Peterson, A.C., Difference Equations An Introduction With Applications, Academic, 403, New York, 1991.

[13] Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley, New York, 2001.

[14] Lakshmikantham, V. And Trigiante, D., Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications, Academic, 242, New York, 1988.

[15] LaSalle, J. P., Stability Theory For Difference Equations. MAA Studies in Mathematics, 14 ; 1-31, 1977.

[16] LaSalle, J. P., The Stability and Control of Discrete Processes. App. Math. Sci., 82, 1986.

[17] Mickens, R., Difference Equations, Van Nostrand, Reinhold, 448, New York, 1990.

[18] Miller, K. S., Linear Difference Equations . W. A Benjamin , New York, 1968.

[19] Popenda, J., "Oscilation and Nonoscilation Theorems for Second Order Difference Equations", J.Math.Anal.Appl. 123, no.1, 34-38, 1987a.

[20] Popenda, J., "One Expression for The Solutions of Second Order Difference Equations", Proc.Amer.Math.Soc. 100, no.1, 87-93, 1987b.

[21] Rugh, J. Wilson, Linear System Theory, Prentice Hall, 1996.

[22] Stevic´, S., On Some Solvable Systems Of Difference Equations, Appl. Math. Comput. 218 5010–5018, 2012.

[23] Stevic´, S., On A Solvable System Of Difference Equations Of Kth Order, Appl. Math. Comput. 219 7765–7771, 2013.

[24] Stevic´, S., On The Difference Equation $x_n = x_{n-k}/(b + cx_{n-1} \dots x_{n-k})$, Appl. Math. Comput. 218 6291–6296, 2012.

[25] Stevic´, S., On A System Of Difference Equations, Appl. Math. Comput. 218 (2011) 3372–3378.

[26] Sugiyama, S., On The Stability Problems On Difference Equations . Bull. Sci. Eng. Research Lab. Waseda Univ. , 45 ; 140-144, 1969.

[27] Sugiyama, S., On Periodic Solutions Of Difference Equations. Bull Sci. Eng. Res. Lab. Wasenda Univ. 52 ; 87-94, 1971.

[28] Tuzik, A.I., "Solvability of a Discrete Equations of Convolution Type with Variable Coefficients", Differentsial'nye Urauneniya 25, no.8, 1462-1464, 1472, 1989.

[29] Tollu, D. T., Yazlik, Y., Taskara, N., On Fourteen Solvable Systems of Difference Equations, Applied Mathematics and Computation, Elsevier, 310-319, 2014.

[30] Uçar, Z., Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri ve Global Davranışları, Yüksek Lisans Tezi, Niğde Ünivesitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Niğde, 2013.

ÖZGEÇMİŞ

Elif BALIKÇI, 1974 yılında Eskişehir'de doğmuştur. İlk, orta ve lise tahsilini Eskişehir'de tamamlamıştır. 1996 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü bitirmiştir. 13.09.1996 tarihinde Milli Eğitim Bakanlığında göreve başlamış ve halen görevine devam etmektedir.