YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

MİNİMUM SAĞ İDEALLERE BAĞLI SAFLIK

SELÇUK SAĞBAŞ

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. REFAİL ALİZADE

MATEMATİK BÖLÜMÜ

SUNUM TARİHİ: 14/01/2022

BORNOVA/İZMİR

OCAK 2022

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Doktora tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri: **İmza:**

Prof. Dr. Refail ALİZADE (Danışman)
Yaşar Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER
Yaşar Üniversitesi

Prof. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK
İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

Doç. Dr. Engin MERMUT
Dokuz Eylül Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Şule AYAR ÖZBAL
Yaşar Üniversitesi

Prof. Dr. Yücel Öztürkoğlu
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

ÖZ

MİNİMUM SAĞ İDEALLERE BAĞLI SAFLIK

Sağbaş, Selçuk
Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Refail ALİZADE
Ocak 2022

Tam sayılar halkası üzerinde, basit modüller ile düz, injektif ve projektif olarak üretilen öz sınıfların aynı oldukları bilinmektedir. Bu sınıflar daha genel halkalar üzerinde birbirinden farklı olmaktadır. Dolayısıyla bu öz sınıflar ve homolojik nesneleri literatürde ayrı olarak incelenmiştir.

Bu doktora tezinde temel olarak, bir R-halkası için tüm basit sağ modüller yerine, halkanın minimal sağ idealleri ile düz ve projektif olarak üretilen öz sınıflar ele alınmıştır. Bu sınıfların sırasıyla, eş-injektif ve eş-projektif nesneleri incelenmektedir. Bu nesneler sırası ile *zayıf mutlak s-saf* ve *zayıf düz-saf* olarak adlandırılmıştır. Bu modüller kullanılarak karakterize edilen bazı belirli halkalar tanımlanmıştır. Zayıf düz-saf (zayıf mutlak s-saf) modüllerin, düz-saf (mutlak s-saf), injektif, projektif, tekil olmayan veya düz modül olduğu halkalar verilmiştir. Özel olarak, bir R halkasının sağ Kasch olması için gerek ve yeter koşulun her zayıf düz-saf sağ modülün düz-saf olduğu gösterilmiştir. Her zayıf düz-saf (zayıf mutlak s-saf) sağ modülün injektif ve projektif olduğu halkaların tam olarak QF halkalar olduğu kanıtlanmıştır. Değişmeli Noether halkası için, tüm devirli zayıf düz-saf modüllerin projektif olmasının halkanın QF olmasına denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, zayıf mutlak s-saf ve zayıf düz-saf modüllerin örtü ve bürüm özellikleri çalışılmıştır. Her basit sağ idealin örten projektif bürüme sahip olduğu halkalar karakterize edilmiştir.

Ayrıca, bir halkanın basit idealleri yerine sağ temel (principal) idealleri alınarak *zayıf yalnız-injektif* ve *zayıf C-düz* modülleri tanımlanmıştır. Bu modüller yardımı ile bazı halkalar karakterize edilmiştir. Bu modüllerin bürüm ve örtü özellikleri ele alınmıştır.

Anahtar sözcükler: İnjektif modül, projektif modül, düz modül, saf-düz modül, mutlak saf modül, Kasch halkalar, QF-halkalar.

ABSTRACT

ON PURITY RELATIVE TO MINIMAL RIGHT IDEALS

Sağbaş, Selçuk
PHD, Department of Mathematics
Thesis Advisor: Prof. Dr. Refail ALİZADE
January 2022

The proper classes that are flatly, injectively and projectively generated by simple modules coincide over the ring of integers. These three classes are distinct from each other, in general. Therefore each of these classes and their homological objects are studied independently.

In this Ph.D. thesis, we investigate the proper classes that are flatly and projectively generated by minimal right ideals. We study the coinjective and coprojective objects of these classes respectively. These objects are termed as *weakly absolutely s-pure* and *weakly neat-flat*, respectively. Certain rings that are characterized via these modules are investigated. The rings whose weakly neat-flat (resp. weakly absolutely s-pure) modules satisfy certain conditions, such as being neat-flat (resp. absolutely s-pure), injective, projective, nonsingular or flat are studied. For instance, it is proved that R is a right Kasch ring if and only if every weakly neat-flat right R-module is neat-flat (moreover if R is right min-coherent) if and only if every weakly absolutely s-pure left R-module is absolutely s-pure. The rings over which every right weakly neat-flat (resp. weakly absolutely s-pure) module is injective and projective are exactly the QF rings. For a commutative Noetherian ring, we prove that, every cyclic weakly neat-flat module is projective if and only if the ring is QF. We also study enveloping and covering properties of weakly absolutely s-pure and weakly neat-flat modules. The rings over which every simple right ideal has an epic projective envelope are characterized.

In addition, we investigate *weakly singly-injective* and *weakly C-flat* modules which are obtained by considering principal right ideals instead of minimal right ideals. Certain

rings are characterized by means of these modules. We also consider enveloping and covering properties of weakly singly-injective and weakly C-flat modules.

Keywords: injective module, projective module, flat module, pure-flat module, absolutely pure module, Kasch rings, QF-rings.

TEŞEKKÜR

Akademik hayatımızda birçoğumuzun çok değerli öğretmenleri ve danışmanları olmuştur. Bu kişiler bizlere muhakkak çok şeyler öğretmişlerdir. Ancak bu yolda bize öğrettikleri yanında bizi daha zeki ve iyi yapan bunun yanında ilham veren bir öğretmen veya danışmanla karşılaşmak pek azımızın yakalayabileceği gerçekten büyük şanstır. Ben bu şansı Refail Alizade ile yakaladım ve kendisine teşekkür ederim. Yardımlarını esirgemeyen ve her ihtiyacım olduğunda bana yol gösteren değerli hocam Engin Büyükaşık'a da çok teşekkür ederim. Ayrıca desteklerinden dolayı Yusuf Alagöz'e, tezin kontrolünde ve düzeltmelerinde destek olan Damla Dede Sipahi'ye ve LaTeX dizgide yardımcı olan Zafer Acar'a teşekkürlerimi sunarım.

Selçuk SAĞBAŞ

İzmir, 2022

YEMİN METNİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "MİNİMUM SAĞ İDEALLERE BAĞLI SAFLIK" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Selçuk SAĞBAŞ

Ocak, 2022

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Semboller	**Açıklama**
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^{(p)}$	Paydası p asal sayısının kuvvetleri olan rasyonel sayılar grubu
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	$\mathbb{Q}^{(p)}$'nin $\mathbb{Z}$ ye göre bölüm grubu
$Mod-R$	Sağ R-modüller kategorisi
$R-Mod$	Sol R-modüller kategorisi
M_R	Sağ R-modül M
${}_RM$	Sol R-modül M
M/N	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\langle S\rangle$	S'nin ürettiği alt modül
xR	xr şeklindeki elemanlar kümesi; x elemanı tarafından üretilen devirli sağ R modül
$\langle a\rangle$	a elemanı tarafından üretilen devirli grup
$\mathbb{Z}_n$	1 elemanıyla üretilen ve mertebesi n olan devirli grup
$o(a)$	a elemanının mertebesi
$\lvert A\rvert$	A kümesinin kardinalitesi
$mor_{\mathcal{K}}(A,B)$	$\mathcal{K}$ kategorisinde A dan B ye morfizmler kümesi
$Hom_R(M,N)$	M'den N'ye tüm R-modül homomorfizmalarının kümesi
1_M	M modülü/abel grubu için birim homomorfizma
$Ker(f)$	$f:M\to N$ homomorfizmasının çekirdeği
$Im(f)$	$f:M\to N$ homomorfizmasının görüntüsü ($f(M)$ kümesi)
$f^{-1}(N)$	$f:M\to N$ homomorfizmasında N'nin ters görüntüsü
$M\cong N$	M ve N izomorftur
$A\times B$	A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$R\times S$	R ve S halkalarının çarpımı

$\prod_{k\in K} M_k$	M_k modüllerinin direk çarpımı
$\bigoplus_{k\in K} M_k$	M_k modüllerinin direk toplamı
$p_n : \prod_{k\in K} M_k \longrightarrow M_n$	p_n, n. projeksiyon homomorfizması
$i_n : M_n \longrightarrow \bigoplus_{k\in K} M_k$	i_n, gömme homomorfizması
$Hom_R(\_, M)$	M modülü ile belirlenen kontravaryant Hom funktoru
$Hom_R(M, \_)$	M modülü ile belirlenen kovaryant Hom funktoru
$Ext^n(M, \cdot) :$	$T = Hom_R(M, \_)$ kovariant funktorunun sağ türev funktoru
$Ext^n(\cdot, B) :$	$S = Hom_R(M, \_)$ kontravariant funktorunun sağ türev funktoru
$M \otimes {}_R N$	M sağ R-modül ve N sol R-modüllerinin tensör çarpımı
$M_R \otimes {}_R -$	M sağ R-modül ile belirlenen kovaryant tensör funktoru
$-_R \otimes {}_R N$	N sol R-modül ile belirlenen kovaryant tensör funktoru
$T(G)$	G grubunun burulma kısmı
$T_p(G)$	G grubunun p-primar bileşeni
$B_p(G)$	G grubunun temel alt grubu
$\Longrightarrow$	İspatta gerek partın ispatının başlangıcı
$\Longleftrightarrow$	İspatta gerek ve yeter koşulun aynı anda ispatının başlangıcı
$\oplus$	Dik toplam
$\prod$	Dik çarpım
$\cong$	İzomorfizma

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Tez boyunca aksi belirtilmedikçe R ile birimli, birleşmeli bir halka ve modüller ile R-modüller kastedilecektir.

Modül ve halka teorisi ve homoloji cebirde, kapalı (closed), eşkapalı (coclosed), düzenli (neat) ve saf (pure) gibi alt modüller ve bu alt modüllerin genellemeleri önemli bir rol oynamaktadır. Bu alt modüllerden en önemli olanı saf alt modüllerdir. Saf kısa tam dizilerden oluşan öz sınıfın sonlu sunumlu modüller ile düz ve projektif olarak üretilmiş olduğu bilinmektedir. Öte yandan, düz saf kısa tam dizilerden oluşan öz sınıf, tam sayılar halkası üzerinde basit sağ modüller ile düz, injektif ve projektif olarak üretilen öz sınıflar ile aynı olmaktadır. Ancak bu öz sınıflar genel bir halka üzerinde farklı olmaktadır. Dolayısıyla düz alt modül kavramı tam sayılar halkasından herhangi bir halkaya farklı şekillerde genelleştirilebilir. Son yıllarda bu genellemeler, karşılık gelen öz sınıflar ve bu öz sınıfların homolojik nesneleri literatürde yoğun olarak ele alınmıştır (Alagöz ve Büyükaşık, 2021; Büyükaşık ve Durğun, 2015; Büyükaşık ve Durğun, 2016; Crivei, 2014; Mermut ve Türkoğlu, 2019).

$\varepsilon : 0 \to B \xrightarrow{f} A \to C \to 0$ sağ R-modüllerin bir tam dizisi olsun. Her sonlu sunumlu F sağ R-modülü ε dizisine göre projektif ise ε dizisi (Cohn) saf tam dizi olarak adlandırılır (Sklyarenko, 1978). Denk olarak ε dizisi saftır ancak ve ancak her X sol R-modülü için, $f \otimes 1_X : B \otimes_R X \to A \otimes_R X$ doğal grup homomorfizması monomorfizmadır. Her basit sağ R-modül ε dizisine göre projektif ise ε dizisi düzenli olarak adlandırılır. Alt modüller için, düzenli ve saf olmak genelde denk değildir, yani hiçbiri diğerini gerektirmez.

$\varepsilon : 0 \to B \xrightarrow{f} A \to C \to 0$ sağ R-modüllerin bir tam dizisi olsun. Her basit S sağ (sırasıyla sol) R-modülü için $\mathrm{Hom}_R(S, \varepsilon)$ (sırasıyla $\varepsilon \bigotimes_R S$) dizisi tam dizi ise ε kısa tam dizisi düzenli (sırasıyla s-saf) olarak adlandırılır (bkz. sırasıyla (Hiremath ve

Gramopadhye, 2009) ve (Crivei, 2014)). Düzenli ve s-saf biri diğerini gerektirmediğinden genelde denk değillerdir. Düzenlilik ve s-saflığın çakıştığı tamlık bölgelerinin karakterizasyonu Fuchs tarafından şöyle verilmiştir: Bu bölgeler her maksimal idealin projektif (sonuç olarak, aynı zamanda sonlu üretilmiş) olduğu tamlık bölgeleridir. Bu özelliği sağlayan değişmeli halkalar (Crivei, 2005) de maksimal ideallerin sonlu üretildiği ve yerel asal olarak karakterize edilmiştir.

Tüm basit sağ modüller yerine, belirli bir basit sağ modüller sınıfı ile üretilen öz sınıflar ve homolojik nesnelerinin ne olabileceği doğal bir soru olarak ortaya çıkmaktadır. Bu tezde, tüm basit sağ modüller yerine, halkanın minimal sağ idealleri ile üretilen öz sınıflar ve bu sınıfların bazı homolojik nesneleri incelenmektedir.

$\varepsilon : 0 \to B \xrightarrow{f} A \to C \to 0$ sağ R-modüllerin bir tam dizisi olsun. Her minimal S sağ (sırasıyla sol) ideal için $\mathrm{Hom}_R(S, \varepsilon)$ (sırasıyla $\varepsilon \bigotimes_R S$) dizisi tam dizi ise ε kısa tam dizisi zayıf düzenli (sırasıyla zayıf s-saf) olarak adlandırılır. Bunlara karşılık gelen ve bu tezde incelenecek olan bazı homolojik nesnelerin tanımı aşağıdaki gibidir. M bir modül olsun. Her $N \to M$ modül epimorfizması ve S basit sağ ideali için $\mathrm{Hom}(S, N) \to \mathrm{Hom}(S, M)$ örten ise M sağ R-modülüne zayıf düzenli-düz modül denir. Öte yandan, her $M \to N$ monomorfizması ve S basit sağ ideali için $S \otimes M \to S \otimes N$ monomorfizma ise M sol R-modülü zayıf mutlak s-saf olarak adlandırılacaktır.

Düzenli-düz modüller zayıf düzenli-düz modüllerdir. Mutlak s-saf modüller zayıf mutlak s-saf modüllerdir. Bölüm 3.1'de, düzenli-düz modüller ve mutlak s-saf modüller sınıfının bahsi geçen sınıfların kesin genelleştirmeleri olduğu gösterilmiştir. Modüllerin bu yeni sınıflarının hem düzenli-düz hem de minimum-injektif (sırasıyla mutlak s-saf ve minimum-düz) modüllerin önemli özelliklerinin bazılarını paylaştığını gösteren birkaç sonuç verilmiştir. Buradan, R bir sağ PS halkalar ancak ve ancak her (basit ya da devirli) sağ modül zayıf düzenli-düzdür ve R bir sol FS halkadır ancak ve ancak her sol R modül zayıf mutlak s-saftır denklikleri gözlemlenmektedir. Artin cebirlerin sunum teorisinden, sonlu sunumlu M R-modülünün $Tr(M)$ Auslander Bridger transpozu kullanılır (Mao ve Ding, 2008). Sağ minimum uyumlu (coherent) halka üzerinde her minimal sağ S ideali ve onun $Tr(S)$ transpozu sonlu sunumludur. Bu ifade, minimum uyumlu halka üzerinde, aşağıdaki sonuçları verir ve devamında ağırlıklı olarak kullanılacaklardır:

(1) M zayıf mutlak s-saf sol R-modüldür ancak ve ancak M^+ zayıf düzenli-düzdür.
(2) M zayıf düzenli-düz sağ R-modüldür ancak ve ancak M^+ zayıf mutlak s-saftır. R bir sağ Kasch halkadır ancak ve ancak (ek olarak R sağ minimum-uyumlu ise) her zayıf düzenli-düz sağ R-modül düzenli-düzdür ancak ve ancak her zayıf mutlak s-saf sol R modül mutlak s-saftır karakterizasyonu ispatlanmıştır. Ek olarak, bir R halkası Von Neumann regülerdir ancak ve ancak R_R tekil olmayandır ve her zayıf düzenli-düz sağ modül düzdür karakterizasyonu ispatlanmıştır. İlaveten, bir R halkası yarı basittir ancak ve ancak her zayıf düzenli-düz sağ R-modül tekil olmayan modüldür ancak ve ancak R_R tekil olmayandır ve her zayıf mutlak s-saf sol R-modül injektiftir.

Bölüm 3.2'de, zayıf düzenli-düz ve zayıf mutlak s-saf modüller sırasıyla minimum-injektif ve minimum-düz modüllerin genelleştirilmesi olarak ele alınır. Her minimum-injektif sağ modülün zayıf düzenli-düz olduğu gözlemlenir. Özel olarak her serbest F sağ modül için, F^+ zayıf düzenli-düzdür. Ek olarak, R sağ minimum uyumlu halka ise her minimum-düz sol R-modül zayıf mutlak s-saftır ve özel olarak sol R-modül olarak ${}_RR$ halkası zayıf mutlak s-saftır. Her minimum-injektif sağ modülün düzenli-düz olmasının zorunlu olmadığını (örneğin, herhangi bir p asal tam sayısı için $M = \mathbb{Z}_0$ minimum-injektif $\mathbb{Z}$-modül iken düzenli-düz değildir) görmek zor değildir. Doğal olarak, her minimum-injektif sağ R-modül düzenli-düzdür ancak ve ancak R sağ Kasch halkadır karakterizasyonu ispatlanmıştır. Bir R halkası QF halkadır ancak ve ancak her projektif (sırasıyla injektif) sağ R-modül injektiftir (sırasıyla projektiftir). Bu ifadenin bir benzeri olarak aşağıdakilerin denk olduğu gösterilmiştir:

(1) R halkası QF halkadır; (2) Her zayıf düzenli-düz sağ modül injektiftir (sırasıyla, projektiftir); (3) Her zayıf mutlak s-saf sol modül projektiftir; (4) R sağ minimum uyumlu halka ve her zayıf mutlak s-saf sol modül injektiftir.

Bölüm 3.3'de, zayıf düzenli-düz ve zayıf mutlak s-saf modüllerin bürülüş ve örtülüş özellikleri ele alınmıştır. Sağ minimum-uyumlu R halkası için aşağıdakiler ispatlanmıştır: (1) Her sağ R-modül zayıf düzenli-düz örtü ve monik zayıf düzenli-düz ön bürüme sahiptir. (2) Her sol R modül zayıf mutlak s-saf ön bürüm ve epimorfizma zayıf mutlak s-saf örtüye sahiptir. Ek olarak, sağ minimum-uyumlu R halkası için aşağıdakilerin denk olduğu gösterilmiştir: (1) R halkası sağ PS halkadır; (2) Her sağ R-modül epimorfizma zayıf düzenli-düz bürüme sahiptir; (3) Her basit sağ ideal epimorfizma projektif bürüme sahiptir; (4) Herhangi bir zayıf düzenli-düz sağ R-modülün her alt modülü zayfi düzenli-düzdür; (5) Herhangi bir zayıf mutlak s-saf sol R-modülün her bölümü zayıf mutlak s-saftır.

Bölüm 3.4'de, bir halkanın basit idealleri yerine sağ temel (principal) idealleri alınarak *zayıf yalnız-injektif* ve *zayıf C-düz* modülleri tanımlanmıştır. Bu modüller yardımı ile bazı halkalar karakterize edilmiştir. Bu modüllerin bürüm ve örtü özellikleri ele alınmıştır.

BÖLÜM 2
ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı tanım ve ön bilgiler verilecektir. Homolojik Cebir hakkında detaylı bilgi için (Rotman, 1979), (Enochs ve Jenda, 2000) ve (Mac Lane, 1995), (Alizade ve Pancar, 1999) kitaplarına bakılmalıdır. Modüller ve halkalar için (Anderson ve Fuller, 1992), (Lam, 2001) kitaplarına bakılmalıdır. Abel grupları için (Fuchs, 1970) bakılmalıdır. Bağıl homolojik cebir için (Mac Lane, 1995), (Enochs ve Jenda, 2000) kitapları ve (Sklyarenko, 1978) makalesi temel referans kaynaklarıdır. Burada gerekli olan bilgi ve özetlere değinilecektir.

Modüller, halkalar ve homolojik cebirdeki tüm terim tanımlarına derinlemesine değinilmemektedir. Özellikle modül teorisi, kategoriler, ileri itme ve geri çekme, Hom ve tensör ($\otimes$) funktorları, projektif modüller, injektif modüller, düz modüller projektif ve injektif çözümlemeler ile $\mathrm{Ext}_R = \mathrm{Ext}_R^1 = R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to \mathcal{A}b$ funktorunun temelleri bilindiği kabul edilecektir.

2.1 Öz Sınıflar

Bu bölümde bu çalışmanın ana konusu olan Öz Sınıflar konusu tanımlanacaktır. Öz Sınıflar (Buchsbaum, 1959) de Buchsbaum tarafından tanımlanmıştır. Bu sınıflar farklı içeriklerde yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Tüm araştırmalar ve okumalar için (Mac Lane, 1995), (Mišina ve Skornjakov, 1969), (Sklyarenko, 1978), (Mermut, 2004) atıf yapılmıştır.

$\mathcal{P}$, R-modüllerin kısa tam dizilerin ve R-modül homomorfizmalarının bir sınıfı olsun.

$$O \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to O \tag{2.1}$$

kısa tam dizisi $\mathcal{P}$'ye ait ise f homomorfizması $\mathcal{P}$-monomorfizma ve g homomorfizması $\mathcal{P}$-epimorfizma (her ikisi $\mathcal{P}$-öz ve kısa tam dizi ise $\mathcal{P}$-öz kısa tam dizi) olarak adlandırılır.

P-1) $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi $\mathcal{P}$ sınıfında ise $\mathbb{E}$'ye izomorfik olan her kısa tam diziyi içerir.

P-2) $\mathcal{P}$ tüm parçalanan kısa tam dizleri içerir.

P-3) Bileşim tanımlı ise iki $\mathcal{P}$-monoformiznanın bileşimi bir $\mathcal{P}$-monomorfizmadır.

P-3') Bileşim tanımlı ise iki $\mathcal{P}$-epimorfizmanın bileşimi bir $\mathcal{P}$-epimorfizmadır.

P-4) g ve f monomorfizmalar ve $g \circ f$ $\mathcal{P}$-monomorfizma ise f $\mathcal{P}$-monomorfizmadır.

P-4') g ve f epimorfizmalar ve $g \circ f$ $\mathcal{P}$-epimorfizma ise f $\mathcal{P}$-epimorfizmadır.

$\mathcal{P}$ sınıfı yukarıda verilen koşulları sağladığında öz olarak adlandırılır. (Buchsbaum, 1959; Mac Lane, 1995 Bölüm 12, §4; Sklyarenko, 1978).

A, B'nin alt grupları ve tüm n tam sayıları için $A \cap nB = nA$ ise A alt grubu B'de saf olarak adlandırılır (Fuchs, 1970, §26-30).

Abel gruplarda öz sınıfların en önemli örneklerinden biri $\text{Saf}_{\mathbb{Z}-\text{Mod}}$ dır. Bu $I_M(f)$'in B de saf alt grup olduğu Abel grupların tüm (2.1) kısa tam dizilerinin sınıfıdır.

R-modüllerin en küçük öz sınıfı R-modüllerin sadece parçalanan kısa tam dizilerinden oluşmaktadır. Bu sınıf Parçalı_R-Mod ile gösterilmektedir. R-modüllerin en büyük öz sınıfı R-modüllerin tüm kısa tam dizilerinden oluşmaktadır. Bu sınıf $\text{Abs}_{R\text{-Mod}}$ ile gösterilmektedir.

R-modüllerin bir $\mathcal{P}$ öz sınıfı için, bir B modülünün alt modülü A olsun. $a \in A$ olmak üzere $i_A(a) = a$ ile tznımlı $i_A : A \to B$ gömme monomorfizması $\mathcal{P}$-monomorfizm oluyor ise B'nin A alt modülü B'nin $\mathcal{P}$ alt modülü olarak adlandırılır.

2.1.1 Öz Sınıfların Homolojik Nesneleri

R-Mod içerisinde bir $\mathcal{P}$ öz sınıfında bazı $\mathcal{P}$-projektif modülden verilen bir A R-modülüne $\mathcal{P}$-epimorfizma olmak zorunda değildir. Bu sebeple genelde Hom funktorunun türev funktorunu kullanarak $\text{Ext}^1_{\mathcal{P}}$ alternatif tanımı kullanılabilir.

Bir $\mathcal{P}$ öz sınıfı ve A, C R-modülleri için, $\mathcal{P}$ içindeki A ile başlayıp C ile biten tüm kısa tam dizilerin denklik sınıfları $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}}(C, A)$ veya kısaca $\mathrm{Ext}_{\mathcal{P}}(C, A)$ ile gösterilir. Bunun $\mathrm{Ext}_R(C, A)$'nın alt grubu olduğu ortaya çıkmaktadır. Ext^1_R'nin alt funktoru olan $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{P}} : R\text{-Mod} \times R\text{-Mod} \to \mathcal{A}b$ bifunktoru elde edilir.

$$\mathbb{E} : 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

R-modüller ve R-modül homomorfizmalarının kısa tam dizisi olsun.

M bir R-modül olsun.

1) Her
$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \\ & & & M \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[ul, "\widetilde{\gamma}"] & \end{tikzcd}$$
diyagramı ilk satır $\mathbb{E}$ ve $\gamma : M \to C$ bir R-modül homomorfizması ve $\widetilde{\gamma}$: $M \to B$ bir R-modül homomorfizması seçilerek değişmeli diyagram içine gömülebilir. Diğer bir deyişle, her $\gamma : M \to C$ homomorfizması için $g\circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ olacak şekilde bir $\widetilde{\gamma}$: $M \to B$ homomorfizması vardır.

2) $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{E}) : 0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(M, B) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(M, C) \to 0$ dizisi tamdır.

Yukarıdaki denk koşulları sağlayan M R-modülüne $\mathbb{E}$ kısa tam dizisine ya da g epimorfizmasına göre projektif denir. ,

1) Her
$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} : 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\widetilde{\alpha}"] & C \arrow[r] & 0 \\ & M & & & \end{tikzcd}$$
diyagramı ilk satır $\mathbb{E}$ ve $\alpha : A \to M$ bir R-modül homomorfizması $\widetilde{\alpha}$: $B \to M$ bir R-modül homomorfizması seçilerek değişmeli diyagram içine gömülebilir. Diğer bir deyişle, her $\alpha : A \to M$ homomorfizması için $\widetilde{\alpha} \circ f = \alpha$ olacak şekilde bir $\widetilde{\alpha}$: $B \to M$ homomorfizması vardır.

2) $\mathrm{Hom}(\mathbb{E}, M) : 0 \to \mathrm{Hom}(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(A, M) \to 0$ dizisi tamdır.

Denk olarak yukarıdaki denk koşulları sağlayan M R-modülüne $\mathbb{E}$ kısa tam dizisine göre ya da f monomorfizmasına göre injektif denir.

Bir M R-modülü $\mathcal{P}$ deki tüm kısa dizilere göre projektif (sırasıyla injektif) ise M modülüne $\mathcal{P}$-projektif (sırasıyla $\mathcal{P}$-injektif) denir. M'nin relatif projektifliği (sırasıyla injektifliği) herhangi bir B için $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}(M,B)=0$ (sırasıyla herhangi bir A için $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{P}}(A,M)=0$) olması gerektiğine denktir. Tüm $\mathcal{P}$-projektif (sırasıyla $\mathcal{P}$-injektif) modüller $\pi(\mathcal{P})$ (sırasıyla $i(\mathcal{P})$) ile gösterilmektedir.

R-modüllerin kısa tam dizilerinin bir $\mathcal{P}$ sınıfı bir A modülü için $\mathcal{P}$-projektif olan bazı P modülünden A'ya $\mathcal{P}$-epimorfizma bulunabiliyor ise yeterli projektife sahip sınıf olarak adlandırılır. R-modüllerin kısa tam dizilerinin bir $\mathcal{P}$ sınıfı her B modülü için B modülünden $\mathcal{P}$-injektif olan bir J modülüne $\mathcal{P}$-monomorfizma bulunabiliyor ise yeterli injektife sahip sınıf olarak adlandırılır. Yeterli projektif (sırasıyla yeterli injektif) olan bir $\mathcal{P}$ öz sınıf projektif öz sınıf (sırasıyla injektif öz sınıf) olarak adlandırılır.

Tanım 2.1. C bir R-modül olsun. C ile biten

$$\mathbb{E}: 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

formundaki her R-modül homomorfizması ve R-modüllerin kısa tam dizisi $\mathcal{P}$ öz sınıfında ise A bir R-modülü olsun. C modülü $\mathcal{P}$-düz olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. A ile başlayan

$$\mathbb{E}: 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

formundaki her R-modül homomorfizması ve R-modüllerin kısa tam dizisi $\mathcal{P}$ öz sınıfında ise bir A R-modülü $\mathcal{P}$-bölünebilir olarak adlandırılır.

$\operatorname{Ext}_{\mathcal{P}}$ funktoru kullanılarak, $\operatorname{Ext}_{\mathcal{P}}(C,A) \leq \operatorname{Ext}_R(C,A)$ alt grubunun 0 veya tüm $\operatorname{Ext}_R(C,A)$ olmasına dayanarak $\mathcal{P}$-projektif, $\mathcal{P}$-injektif, $\mathcal{P}$-düz, $\mathcal{P}$-bölünebilir kolayca tanımlanır:

1) Bir C R-modülü $\mathcal{P}$-projektiftir ancak ve ancak tüm A R-modülleri için $\operatorname{Ext}_{\mathcal{P}}(C,A)=0$ dır.

2) Bir C R-modülü $\mathcal{P}$-düzdür ancak ve ancak tüm A R-modülleri için $\operatorname{Ext}_{\mathcal{P}}(C,A)=\operatorname{Ext}_R(C,A)$ dır.

3) Bir A R-modülü $\mathcal{P}$-injektiftir ancak ve ancak tüm C R-modülleri için

$\text{Ext}_{\mathcal{P}}(C, A) = 0$ dır.

4) Bir A R-modülü $\mathcal{P}$-bölünebilirdir ancak ve ancak tüm C R-modülleri için $\text{Ext}_{\mathcal{P}}(C, A) = \text{Ext}_R(C, A)$ dır.

Önerme 2.3. *(Mišina ve Skornjakov, 1968, Önerme 1.9 ve 1.14) $0 \to M \to N \to K \to 0$ R-modüllerin bir kısa tam dizisi olsun. M ve K $\mathcal{P}$-düz (sırasıyla $\mathcal{P}$-bölünebilir) ise N de $\mathcal{P}$-düz (sırasıyla $\mathcal{P}$-bölünebilir) modüldür.*

Önerme 2.4. *(Mišina ve Skornjakov, 1968, Önerme 1.12) M R-modülü $\mathcal{P}$-düzdür ancak ve ancak $\mathcal{P}$ projektif R-modülden M'ye $\mathcal{P}$-epimorfizma vardır.*

Sonuç 2.5. *(Mišina ve Skornjakov, 1968, Önerme 1.13) B modülü $\mathcal{P}$-düz ve $0 \to A \to B \to C \to 0$ kısa tam dizisi $\mathcal{P}$ öz sınıfında ise C modülü de $\mathcal{P}$-düzdür.*

Eş olarak, $\mathcal{P}$-bölünebilir modüller için aşağıdaki ifadeler mevcuttur.

Önerme 2.6. *(Mišina ve Skornjakov, 1968, Önerme 1.7) N R-modülü $\mathcal{P}$-bölünebilirdir ancak ve ancak N'den I injektif modülüne $\mathcal{P}$-monomorfizma vardır.*

Sonuç 2.7. *(Mišina ve Skornjakov, 1968, Önerme 1.8) B modülü $\mathcal{P}$-bölünebilir ve $0 \to A \to B \to C \to 0$ kısa tam dizisi $\mathcal{P}$ öz sınıfında ise A modülü de $\mathcal{P}$-bölünebilirdir.*

2.1.2 Projektif olarak üretilmiş öz sınıflar

Modüllerin $\mathcal{M}$ sınıfı verildiğinde, $\mathcal{M}$ her $M \in \mathcal{M}$ için $\text{Hom}(M, \mathbb{E})$'nin tam olduğu R-modüllerin tüm $\mathbb{E}$ kısa tam dizilerinin sınıfı $\pi^{-1}(\mathcal{M})$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$\pi^{-1}(\mathcal{M}) = \{\mathbb{E} \in \mathcal{A}bs_{R\text{-mod}} | \text{her } M \in \mathcal{M} \text{ için } \text{Hom}(M, \mathbb{E}) \text{ tamdır.}\}$$

olduğu görülebilir.

$\pi^{-1}(\mathcal{M})$, her $M \in \mathcal{M}$'nin $\mathcal{P}$-projektif olduğu en büyük $\mathcal{P}$ öz sınıftır. Bu öz sınıf $\mathcal{M}$ tarafından projektif olarak üretilmiş öz sınıf olarak adlandırılır.

$\mathcal{P}$ öz sınıfı için, $\mathcal{P}$'nin projektif kapanışı $\mathcal{P}$'yi içeren $\pi^{-1}(\pi(\mathcal{P}))$ öz sınıfıdır. $\mathcal{P}$'nin projektif kapanışı kendisine eşit ise o zaman $\mathcal{P}$'ye projektif olarak kapalı denir.

Önerme 2.8. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 1.1) Her projektif öz sınıf projektif olarak üretilmiştir.*

$\mathcal{P}$, R-modüllerin kısa tam dizilerinin bir öz sınıfı olsun. $\mathcal{P}$-projektif modüllerin dik toplamı
$\mathcal{P}$-projektiftir. Bir $\mathcal{P}$-projektif modülün dik bileşeni $\mathcal{P}$-projektiftir.

Bir $\mathcal{P}$ öz sınıfındaki her $\{\mathbb{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ koleksiyonu için $\mathbb{E} = \pi_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{E}_\lambda$ de $\mathcal{P}$ de ise $\mathcal{P}$ öz sınıfı π-kapalı olarak adlandırılır.

Önerme 2.9. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 1.2) Her projektif olarak üretilmiş öz sınıf π-kapalıdır.*

Modüllerin $\overline{\mathcal{M}}$ sınıfının bir alt sınıfı $\mathcal{M}$ olsun. $\overline{\mathcal{M}}$ de ki her modül $\mathcal{M}$ de ki modüllerin ve serbest modüllerin dik toplamının dik bileşeni ise $\mathcal{M}$ alt sınıfı $\overline{\mathcal{M}}$ için projektif baz olarak adlandırılır.

Önerme 2.10. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 2.1) M bir küme ise $\pi^{-1}(\mathcal{M})$ öz sınıfı projektiftir ve $\mathcal{M}$, tüm $\mathcal{P}$-projektif modüllerin sınıfı için projektif bazdır.*

$\mathcal{M}$ bir küme olmadığında bile:

Önerme 2.11. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 2.3) Modüllerin bir $\mathcal{M}$ öz sınıfı bölüm modüller altında kapalı ise $\pi^{-1}(\mathcal{M})$ öz sınıfı projektiftir ve $\mathcal{M}$, $\mathcal{P}$-projektif modüllerin sınıfı için projektif bazdır.*

2.1.3 İnjektif olarak üretilmiş öz sınıflar

Modüllerin $\mathcal{M}$ sınıfı verildiğinde, ve her $M \in \mathcal{M}$ için $\mathrm{Hom}(\mathbb{E}, M)$'nin tam olduğu R-modüllerin tüm $\mathbb{E}$ kısa tam dizilerinin sınıfı $i^{-1}(\mathcal{M})$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$i^{-1}(\mathcal{M}) = \{\mathbb{E} \in \mathcal{A}bs_{R\text{-mod}} | \text{her } M \in \mathcal{M} \text{ için } \mathrm{Hom}(M, \mathbb{E}) \text{ tamdır.}\}$$

olduğu görülebilir.

$i^{-1}(\mathcal{M})$, her $M \in \mathcal{M}$'nin $\mathcal{P}$-injektif olduğu en büyük $\mathcal{P}$ öz sınıftır. Bu öz sınıf M tarafından injektif olarak üretilmiş öz sınıf olarak adlandırılır. $\mathcal{P}$ öz sınıf için, $\mathcal{P}$'nin injektif kapanışı $\mathcal{P}$'yi içeren $i(i(\mathcal{P}))$ öz sınıfıdır. $\mathcal{P}$'nin injektif kapanışı kendisine eşit ise o zaman $\mathcal{P}$'ye projektif olarak kapalı denir.

Önerme 2.12. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 3.1) Her injektif öz sınıf injektif olarak üretilmiştir.*

$\mathcal{P}$, R-modüllerin kısa tam dizilerinin bir öz sınıfı olsun. $\mathcal{P}$-injektif modüllerin dik çarpımı
$\mathcal{P}$-injektiftir. Bir $\mathcal{P}$-injektif modülün dik bileşeni $\mathcal{P}$-injektiftir.

Bir $\mathcal{P}$ öz sınıfındaki her $\{\mathbb{E}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ koleksiyonu için $\mathbb{E} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{E}_\lambda$ de $\mathcal{P}$ de ise $\mathcal{P}$ öz sınıfı $\bigoplus$-kapalı olarak adlandırılır.

Önerme 2.13. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 1.2) Her injektif olarak üretilmiş öz sınıf $\bigoplus$-kapalıdır.*

Bir injektif modül bazı devirli alt modüllerin injektif bölümü ile çakışır ise injektif modül ilkel olarak adlandırılır. Bu tür modüller bir küme oluşturur ve her injektif modül ilkel injektif modüllerin dik çarpımı içerisine gömülebilir (bkz. Sklyarenko, 1978, Lemma 3.1).

Modüllerin $\overline{\mathcal{M}}$ sınıfının bir alt sınıfı $\mathcal{M}$ olsun. $\overline{\mathcal{M}}$ deki her modül $\mathcal{M}$ deki modüllerin ve belirli ilkel injektif modüllerin dik çarpımının dik bileşeni ise $\mathcal{M}$ alt sınıf $\overline{\mathcal{M}}$ için injektif baz olarak adlandırılır.

Önerme 2.14. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 3.3) $\mathcal{M}$ bir küme ise $i^{-1}(\mathcal{M})$ öz sınıfı injektiftir ve $\mathcal{M}$, tüm $\mathcal{P}$-injektif modüllerin sınıfı için injektif bazdır.*

$\mathcal{M}$ bir küme olmadığında bile:

Önerme 2.15. *(Sklyarenko, 1978, Önerme 3.4) Modüllerin bir $\mathcal{M}$ öz sınıfı alt modüller altında kapalı ise $i^{-1}(\mathcal{M})$ öz sınıfı injektiftir ve $\mathcal{M}$, tüm $\mathcal{P}$-injektif modüllerin sınıfı için injektif bazdır.*

2.1.4 Düz olarak üretilmiş öz sınıflar

R halkası değişmeli olmadığı durumda bir öz sınıfa göre projektif ve injektiflerin tensör çarpım analogları için yönlere dikkat edilmelidir. Bir R-modül denildiğinde bir sol R-modül kastedildiği unutulmamalıdır.

R modül homomorfizmalarının ve R-modüllerin bir

$$\mathbb{E} : 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

kısa tam dizisi alınsın.

$$M \otimes \mathbb{E} : 0 \to M \otimes A \overset{1_M \otimes f}{\to} M \otimes B \overset{1_M \otimes g}{\to} M \otimes C \to 0$$

dizisi tam ise bir M sağ R-modül $\mathbb{E}$ kısa tam dizisine veya g monomorfizmasına göre düz denir.

Sağ R-modüllerin bir $\mathcal{M}$ sınıfı verildiğinde, R-modüllerin tüm $\mathbb{E}$ kısa tam dizilerinin ve her $M \in \mathcal{M}$ için $M \otimes \mathbb{E}$'nin tam olduğu R-homomorfizmalarının sınıfı $\tau^{-1}(\mathcal{M})$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$\tau^{-1}(M) = \{\mathbb{E} \in \mathcal{A}bs_{R\text{-mod}} | \text{her } M \in \mathcal{M} \text{ için } M \otimes \mathbb{E} \text{ tamdır.}\}$$

olduğu görülebilir.

$\tau^{-1}(\mathcal{M})$, sağ R-modüllerin $\mathcal{M}$ sınıfı tarafından düz olarak üretilen öz sınıf olarak adlandırılır.

R halkası değişmeli olduğunda bir sağ R-modül sol R-modül olarak ya da tam tersi olarak düşünülebileceğinden R için yönü belirtecek bir ifadeye ihtiyaç yoktur.

Teorem 2.16. *(Lam, 2001, Teorem 4.89) Sol R-modüllerin kısa tam dizisi*

$$\mathbb{E} : 0 \to A \to B \to C \to 0$$

olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) C_i modülleri sonlu sunumlu sol R-modüller olmak üzere

$0 \to A_i \to B_i \to C_i \to 0 (i \in I)$ parçalanan tam dizilerin dik sisteminin dik limiti E'dir.

(2) Herhangi bir M (sonlu sunumlu) sağ R-modül için

$$0 \to M \otimes A \to M \otimes B \to M \otimes C \to 0$$

dizisi tamdır.

(3) Herhangi bir M (sonlu sunumlu) sol R-modül için

$$0 \to \mathrm{Hom}(M, A) \to \mathrm{Hom}(M, B) \to \mathrm{Hom}(M, C) \to 0$$

dizisi tamdır.

Teorem 2.16'in denk koşullarından birini sağlayan tüm $\mathbb{E}$ kısa tam dizilerin sınıfı Cohn-saflığı olarak adlandırılır ve $\mathcal{P}ure$ ile gösterilir.

$\mathcal{FP}_R$ (sırasıyla $_R\mathcal{FP}$), tüm sonlu sunumlu sağ (sırasıyla sol) R-modüllerin sınıfı olmak üzere Teorem 2.16 yardımıyla

$$\mathcal{P}ure = \pi^{-1}(_R\mathcal{FP}) = \tau^{-1}(\mathcal{FP}_R) = \tau^{-1}(\text{Mod-}R)$$

olduğu kolayca görülebilir.

2.1.5 Auslander-Bridger Transpoz

Bir M R-modülü için, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ karakter modülü M^+ ile gösterilir. $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ eş modülü M^* ile gösterilir. $\delta_M : M \to M^{**}$ değer dönüşümü anlamına gelir. δ_M monomorfizma ise M burulmasız olarak adlandırılır.

M sonlu sunumlu R-modül olsun. Yani bu, bazı sonlu üretilmişi F serbest R-modül ve F'nin sonlu üretilmiş G alt modülü için $M \cong F/G$ olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak

$$0 \to G \to F \to M \to 0$$

kısa tam dizisi elde edilir.

F' sonlu üretilmiş serbest modül ve H sonlu üretilmiş modül olmak üzere herhangi bir

$$0 \to H \to F' \to M \to 0$$

kısa tam dizi M'nin serbest sunumu olarak adlandırılır.

F_0 ve F_1 sonlu üretilmiş serbest modüller olmak üzere

$$F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

tam dizisi M'nin serbest sunumu olarak adlandırılır. Bu sunuma $\mathrm{Hom}_R(\cdot, R)$ funktoru uygulanırsa, $Tr(M)$ ile $F_0^* \to F_1^*$ eş dönüşümünün eş çekirdeği gösterilmek üzere

$$0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to Tr(M) \to 0$$

dizisi elde edilir. $Tr(M)$'nin sonlusunumlu sağ R-modül olduğu unutulmamalıdır. $Tr(M)$ sağ R-modülü M sol R-modülünün Auslander-Bridger transpozu olarak adlandırılır.

$M \mapsto Tr(M)$ eşlemesi M'nin sunumuna bağlı olduğundan bire bir değildir. M aynı zamanda F'nin serbest sunumu alınarak $Tr(Tr(M))$ olarak yorumlanabilir (Sklyarenko, 1978, §5).

Önerme 2.17. *(Sklyarenko, 1978, sonuç 5.1) Herhangi bir sonlu sunumlu M R-modülü ve $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi için* $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{E})$ *dizisi tamdır ancak ve ancak $Tr(M) \otimes \mathbb{E}$ dizisi tamdır.*

Teorem 2.18. *(Sklyarenko, 1978, Teorem 8.3) M sonlu sunumlu R-modüllerin bir kümesi olsun. Her $F \in M$, $Tr(F)$ sağ modülle ilişkilendirilsin. $Tr(M)$ tüm bu $Tr(F)$'lerin bir kümesi olsun. $Tr(Tr(M)) = M$ olduğu varsayılabilir. O zaman*

$$\pi^{-1}(M) = \tau^{-1}(Tr(M)) \quad \textit{ve} \quad \tau^{-1}(M) = \pi^{-1}(Tr(M))$$

olur.

Önerme 2.19. *(Sklyarenko, 1978, Lemma 5.1) Herhangi bir R-modüllerin $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi ve M sağ R-modülü için $M \otimes \mathbb{E}$ dizisi tamdır ancak ve ancak* $\mathrm{Hom}(M, \mathbb{E}^+)$ *dizisi tamdır.*

$\mathcal{P}$ öz sınıfında olan her $\{\mathbb{E}_i(i \in I); \pi^j(i \leq j)\}$ dik sistem için $\mathbb{E} = \lim_{\rightarrow} \mathbb{E}_i$ de $\mathcal{P}$ de ise $\mathcal{P}$ öz sınıfı endüktif olarak kapalı adlandırılır (Fedin, 1983) ve (Sklyarenko, 1978, §8). (Fedin, 1983) de $\mathcal{P}$'yi içeren en küçük endüktif olarak kapalı öz sınıf $\widetilde{\mathcal{P}}$ ile gösterilmiştir. Bu sınıf $\mathcal{P}$'nin endüktif olarak kapanışı adlandırılır.

Tensör çarpım ve dik limit değişmeli olduğundan düz olarak üretilmiş ön sınıf endüktif olarak kapalıdır. Dahası:

Teorem 2.20. *(Sklyarenko, 1978, Teorem 8.1) Sağ R-modüllerin M sınıfı için $\tau^{-1}(M)$ öz sınıfı endüktif olarak kapalıdır. İnjektif olarak üretilmiştir ve M bir küme ise o zaman bu öz sınıf injektiftir. $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi $\tau^{-1}(M)$ ye aittir ancak ve ancak $\mathbb{E}^+ \in \pi^{-1}(M)$ dir.*

2.2 Örtüler ve Bürümler

$\mathcal{A}b$ Abel kategoride nesnelerin $\mathcal{F}$ sınıfı verilsin. Bir C nesnesinin $\mathcal{F}$-ön örtüsü her $F' \in \mathcal{F}$ için $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(F', F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(F', C) \to 0$ tam olacak şekilde $F \in \mathcal{F}$ ile bir $\varphi : F \to C$ epimorfizmasıdır (Enochs, 1981). Diğer bir deyişle

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[dl, dotted] \arrow[d] & \\ F \arrow[r, "\varphi"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir.

Daha fazlası, $f\varphi = \varphi$ olacak şekilde her $f.F \to F$ endomorfizması otomorfizma ise φ $\mathcal{F}$-bürüm olarak adlandırılır.

Sonuç olarak, örneğin tüm düz modüllerin sınıfı $\mathcal{F}$ alınırsa bir modülün düz örtüsü $\mathcal{F}$-örtü olacaktır.

Örtüler ve bürümler hakkındaki çalışmalar (Eckmann ve Schopf, 1953) de birleşmeli bir halka üzerindeki her bir modülün injektif bürüme sahip olduğunun gösterildiği 1953 yılında başladı. Diğer taraftan Bass her modülün projektif örtüye sahip olduğu mükemmel halkayı (Bass, 1960) da karakterize etmiştir. Enochs burulmasız örtüler üzerinde çalışmalar yapmıştır ve (Enochs, 1963) de değişmeli bölge üzerinde modüllerin burulmasız örtülerinin varlığını kanıtlamıştır. (Enochs ve Jenda, 2000, Tanım 5.1.1) den sonraki argümanlarda $\mathcal{F}$ burulmasız R-modüllerin sınıfı olmak üzere değişmeli R bölgesi üzerinde burulmasız örtüler ile $\mathcal{F}$-örtülerin çakıştığı ortaya çıkmıştır. Ek olarak, 1981 de Enochs birleşmeli bir halka üzerinde her modülün düz örtüye sahip olacağı sanısını ortaya atmıştır (Enochs, 1981). Bu "düz örtü sanısı" olarak bilinir. Aynı yayında , injektif örtülerin kategorik versiyonlarına dikkat çekilmiştir. Daha sonra modüllerin verilen bir sınıfı için değişmeli diyagramlar açısından örtüler ve bürümlerin genel tanımları verilmiştir. Bağımsız olarak, örtüler ve bürümlerin tanımı minimal sağ ve sol yaklaşımlar açısından Auslander ve Smal tarafından verilmiştir (Auslander ve Smal, 1980). Auslander ve Smal sonlu boyutlu cebirler üzerinde sonlu üretilmiş modüller düşünürken Enochs herhangi bir halka üzerinde modüllerin bir sınıfı için genel bir tanım vermiştir. Örtüler ve bürümler çalışmanın ana fikri modüllerin özel sınıfının bazı yönlerini veya genellikle tüm kategoriyi incelemek için nesneleri kullanmaktır. Çünkü nesnelerin sınıfının yapısı bir kez anlaşıldığında bu sınıftaki nesneler tarafından rastgele nesnelere yaklaşım yapılabilir. 2001 yılında "düz örtü sanısı" (Bican ve diğerleri, 2001) de kanıtlanmıştır. Doğal olarak, düz örtüler ve örtüler daha genel nesne sınıfları tarafından modüllerinkinden daha geniş olarak çalışılmıştır.

$\mathcal{F}$-örtüler ve $\mathcal{F}$-bürümlerin devamındaki temel özelliklerin ispatları örneğin modül kategoriler için (Xu, 1996, §1.2)'de bulunabilir. Fakat ispatların benzer argümanları Abel kategoriye taşınır. $\mathcal{F}$'nin izomorfizmalar, sonlu dik toplamlar ve dik bileşenler altında kapalı olduğu varsayılsın.

$\mathcal{F}$-örtü mevcut ise izomorfizma altında tektir:

Önerme 2.21. *$\varphi_1 : F_1 \to M$ ve $\varphi_2 : F_2 \to M$ bir M nesnesinin iki farklı $\mathcal{F}$-örtüsü ise $\mathcal{F}_1 \cong F_2$ dir.*

Ek olarak, $\mathcal{F}$-örtüler $\mathcal{F}$-ön örtülerin dik bileşenleridir:

Önerme 2.22. *Bir M nesnesinin $\mathcal{F}$-örtüsü olduğu ve $\varphi : F \to M$ nin $\mathcal{F}$-ön örtü olduğu varsayılsın. F'nin F_1 ve K alt nesneleri için $\varphi|_{F_1} : F_1 \to M$ kısıtlaması M'nin $\mathcal{F}$-örtüsü ve $K \subseteq$ Çek(φ) olmak üzere $F = F_1 \oplus K$ dır.*

$\mathcal{F}$-bürümler için eş sonuçlar mevcuttur. Yani, $\mathcal{F}$-bürüm mevcut ise izomorfizma altında tektir. Ek olarak, $\mathcal{F}$-bürümler $\mathcal{F}$-ön bürümlerin dik bileşenleridir.

Aşağıdaki sonuç modülün sınıfının (ön) büren ya da (ön) örten olup olmadığını kanıtlamada kullanışlıdır.

Lemma 2.23. *(1) (Rada ve Saorin, 1998, Sonu. 3.5 (c)) Bir halka üzerinde modüllerin bir M sınıfı saf alt modüller altında kapalı ise M ön bürendir ancak ve ancak M dik çarpım altında kapalıdır.*

(2) (Halm ve Jorgensen, 2008, Teorem 2.5) Bir halka üzerinde modüllerin M sınıfı saf bölümler altında kapalı ise M ön örtendir ancak ve ancak M örtendir ancak ve ancak M dik toplam altında kapalıdır.

2.3 Kapalı Alt Modüller

Bu bölümde farklı yollardan kapalı alt modüllerin genellemeleri olan basit modüller tarafından üretilen öz sınıfların tanımları ve bazı özellikleri verilecektir.

2.3.1 Tümleyen alt modüller

B bir R-modül ve A, B'nin bir alt modülü olsun. $K \cap A = 0$ ve A bu özelliğe göre maksimal (yani, $K\cap \widetilde{A}= 0$ iken $\widetilde{A}\supsetneqq A$ olacak şekilde B'nin $\widetilde{A}$ alt modülü yok) ise K, B'de bir tümleyene sahiptir denir ve A alt modülü B'de K'nın bir tümleyeni olarak adlandırılır. Zorn's Lemma yardımıyla K'nın her zaman B'de bir tümleyeni olduğu görülmektedir. Gerçekten, Zorn's Lemma yardımıyla $A' \cap K = 0$ olacak şekilde B'nin bir A' alt modülü var ise $A \geq A'$ olacak şekilde B'de K'nın bir A tümleyeninin varlığı bilinmektedir. İlgili kavramlardaki sonuçların bir araştırması için (Dung ve Wisbauer, 1994) bakılmaktadır. Bir B modülünün A alt modülü B'de bazı alt modüllerin tümleyeni ise A alt modülü B'de bir tümleyen olarak adlandırılır. Kısaca, A'ya B'nin tümleyen alt modülü denir ve $A \leq_{C} B$ ile gösterilir.

2.3.2 Kapalı ve düzenli alt modüller

Bir B modülünün A alt modülü B'de uygun bir büyük genişlemeye sahip değilse kapalı olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, $A \subsetneq \widetilde{A}$ olacak şekilde B'nin $\widetilde{A}$ alt modülü yoktur ve A, $\widetilde{A}$ da büyüktür ($A \trianglelefteq \widetilde{A}$) ile gösterilir ve $\widetilde{A}$'nın her sıfırdan farklı X alt modülü için $A \cap X \neq 0$'nın olduğu anlamına gelir). Bu durumda A kapalı alt modül olarak da adlandırılabilir. Bir modülde kapalı alt modüller ve tümleyen alt modüllerin çakıştığı bilinmektedir (Dung ve Wisbauer, 1994, §1).

Abel gruplarda kapalı alt grupları kategorize etmek için (Honda, 1956) da düzenli alt gruplar kavramı tanıtıldı ve saflığı hatırlatan birçok şey kanıtlandı.

Tanım 2.24. B Abel grubunun A alt grubu alındığında her p asalı için $pA = A \cap pB$ oluyor ise A düzenli alt grup olarak adlandırılır.

Aşağıdaki sonucun ispatı için referans (Mermut, 2004, Teorem 4.1.1) dir.

Teorem 2.25. *B Abel grubun A alt grubu için aşağıdakiler denktir:*

(1) A alt modülü B de kapalıdır.

(2) A alt modülü B de düzenlidir.

(3) Tüm p asalları için
$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, A) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, B) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, B/A) \to 0$ *dizisi tamdır.*

(4) Tüm p asalları için $0 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes A \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes B \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes B/A \to 0$ dizisi tamdır.

(5) Tüm p asalları için
$0 \to \mathrm{Hom}(B/A, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0$ *dizisi tamdır.*

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ grupları basit S R-modüller ile değiştirilirse (3) yardımıyla düzenliliğin tanımı herhangi bir R halkasına genişletilebilir (bkz. Renault, 1964). Yani, M R-modülünün bir N alt modülü olsun. Her S basit R-modül için her $f : S \to M/S$ homomorfizması $g : S \to M$ homomorfizmasına yükseltilebiliyor ise N alt modülü M de düzenli olarak adlandırılır. Denk olarak, N alt modülü M de düzenlidir ancak ve ancak her S sabit R-modül için $\mathrm{Hom}(S,g) : \mathrm{Hom}(S,M) \to \mathrm{Hom}(S,M/N)$ bir epimorfizmadır. Düzenli alt modüller (Fuchs, 2012), (Crivei, 2014) de çalışılmıştır.

Kapalı sınıfı, A'nın B de kapalı alt modül olduğu R-Mod da tüm

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{2.2}$$

kısa tam dizilerden oluşur. Düzenli sınıfı, her basit modül için (S sol R-mosülü 0 ve S den başka alt modüle sahip olmuyor ise basit modül olarak adlandırılır) projektif olduğu R-Mod da ki tüm kısa tam dizilerden (2.4) oluşur.

$$\mathcal{N}eat = \pi^{-1}\left(\{S \in R\text{-Mod} | S \text{ basit modül}\}\right)$$

ile gösterilir.

Teorem 2.26. *(Stenström, 1967, Önerme 4.6) $\mathcal{A}$, her nesnenin bir injektif bürüme sahip olduğu $\mathcal{A}b$ kategori olsun. O zaman;*

(1) Kapalı$_{\mathcal{A}}$ ve Düzenli$_{\mathcal{A}}$ öz sınıfı formundadır.

(2) Kapalı$_{\mathcal{A}}$ $\subseteq$ Düzenli$_{\mathcal{A}}$ dır.

2.3.3 s-saf alt modüller

A bir B R-modülünün alt modülü olsun. Her basit S sağ R-modül için $S \otimes A \to S \otimes B$ dönüşümü monomorfizma ise A alt modülü B'nin s-saf alt modülü olarak adlandırılır. s-saf alt modüller (Mermut ve Türkoğlu, 2019)'un yanısıra (Crivei, 2005) de de tartışılmıştır. Tüm P maksimal idealler için Honda'nın $PA = A \cap PB$'e karşılık gelen tanım, (Mermut ve Türkoğlı, 2019) da P-saflık olarak adlandırılarak uyarlanmıştır.

s-$\mathcal{S}af$ sınıfı, $f(A)$'nın B'nin s-saf alt modül olduğu R-Mod da tüm

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{2.3}$$

kısa tam dizilerden oluşur. s-$\mathcal{S}af$ sınıfı, tüm temsilci basit modüllerin kümesi tarafından düz olarak üretilmiş öz sınıftır. Yani, $\mathcal{S}$'nin tüm temsilci basit modüllerin kümesi olduğu durumda s-$\mathcal{S}af = \tau^{-1}(\mathcal{S})$ dir.

Önerme 2.27. *(Sklyarenko, 1978, Lemma 6.1) A bir B R-modülün alt modülü ve $i_A : A \hookrightarrow B$ gömme dönüşümü olsun. R'nin bir sağ ideali için $A \cap IB = IA$ dır ancak ve ancak*

$$R/I \otimes A \overset{1_{R/I} \otimes i_A}{\longrightarrow} R/I \otimes B$$

moniktir.

Önerme 2.27'nın bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 2.28. *B bir R-modül ve $A \leq B$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(1) A alt modülü B'nin bir s-saf alt modülüdür.

(2) R'nin her bir I maksimal sağ ideali için $IA = A \cap IB$ dır.

2.3.4 Eş düzenli alt modüller

Düzenli alt modüllere eş olarak, bir M R-modülünün N alt modülü için her basit S sağ R-modül için $\mathrm{Hom}(M, S) \to \mathrm{Hom}(N, S) \to 0$ epimorfizma ise N alt modülü eş düzenli alt modül olarak adlandırılır. Teorem 2.25 yardımıyla düzenli s-saf ve eş düzenli alt modül kavramları tam sayılar halkası üzerinde çakışmaktadır. Düzenli ve eş düzenli alt modüllerin çakıştığı değişmeli bölgeler tam olarak sonlu üretilmiş maksimal idealli bölgelerdir (yani N-bölgelerdir). Bu sonuç Crivei tarafından 2014'te belirli değişmeli halkalara genişletilmiştir.

Eş düzenli sınıfı, $f(A)$'nın B'nin eş düzenli alt modül olduğu R-Mod da tüm

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

kısa tam dizilerinden oluşur. *Eş düzenli* sınıfı, tüm temsilci basit modüllerin kümesi tarafından injektif olarak üretilmiş öz sınıftır. Yani, $\mathcal{S}$'nin tüm temsilci basit modüllerin kümesi olduğu durumda *Eş düzenli*$= i^{-1}(\mathcal{S})$'dir.

Aşağıdaki ifadenin ispatı için referanslar (Fuchs, 2012, Önerme 3.1) ya da (Mermut ve diğerleri, 2009, Sonuç 2.5) dir.

Teorem 2.29. *R değişmeli bir halka olsun. Eş düzenli= s-Saf dır.*

Bir R tamlık bölgesi R-modüller için düzenlilik ve eş düzenlilik kavramları çakışıyor ise R bir N-bölgesi olarak adlandırılır (bkz. (Fuchs, 2012)).

Teorem 2.30. *(Fuchs, 2012, Teorem 5.2) R bir değişmeli bölge olsun. R bir N-bölgesidir. ancak ve ancak R'nin tüm maksimal idealleri (sonlu üretilmiş) projektif modüllerdir (yani, tersinir modüllerdir).*

S.Crivei R, her maksimal idealin asal olduğu değişmeli halka olduğunda bir modülün düzenli ve eş düzenli alt modüllerinin çakıştığını ispatlamıştır (bkz. (Crivei, 2014, Teorem 2.1)).

2.3.5 Eş kapalı alt modüller

M'nin bir K alt modülü olsun. M'nin her uygun T alt modülü için $M \neq K + T$ ise K alt modülü küçük olarak adlandırılır ve $K \ll M$ olarak gösterilir. $L \leq M$ alt modülü alındığında her $N \leq L$ için $L/N \ll M/N$ olması $L = N$ gerektiriyor ise L alt modülü M de eş kapalı olarak adlandırılır. Eş kapalı alt modüller hakkında daha detaylı bilgi için (Clark ve diğerleri, 2006, §3) bakılabilir.

Önerme 2.31. *(Clark ve diğerleri, 2006, 3.7) $K \leq L \leq M$ alt modüller olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.*

(1) L alt modülü M de eş kapalı ise L/K da M/K da eş kapalıdır.

(2) $K \ll M$ ve L/K, M/K da eş kapalı ise L alt modülü M de eş kapalıdır.

(3) $L \leq M$ eş kapalı ise $K \ll M$ olması $K \ll L$ olmasını gerektirir. Böylece $Rad(L) = L \cap Rad(M)$ olur.

(4) $f : M \to N$ bir küçük epimorfizma ve L alt modülü M de eş kapalı ise $f(L)$, N de eş kapalıdır.

(5) K alt modülü M de eş kapalı ise K alt modülü L de kapalıdır. Tersi ise L alt modülünün M de eş kapalı olması durumunda doğrudur.

Önerme 2.32. *(Zöschinger, 2006, Lemma A.4) M modülünün alt modülleri $K \leq L \leq M$ olsun. K alt modülü M de eş kapalı ve L/K, M/K da eş kapalı ise L alt modülü M de eş kapalıdır.*

Eş kapalı sınıfı, $f(A)$'nın B'nin eş kapalı alt modül olduğu R-Mod da tüm

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \tag{2.4}$$

kısa tüm dizilerden oluşur. *Eş kapalı* sınıfı, Önerme 3.2 yardımıyla Buchsbaum açısından bir öz sınıftır.

2.4 Basit Modüller Tarafından Üretilen Modüller

Bu bölümde basit modüller tarafından üretilen modüller hakkında bazı tanım ve özellikler verilecektir.

2.4.1 Zayıf-injektif modüller ve zayıf-düz modüller

Tanım 2.33. M bir sağ R-modül olsun. $M \leq X$ olacak şekilde her genişleme için M, X de eş kapalı oluyor ise M modülü zayıf injektif olarak adlandırılır.

Zayıf injektif modüller (Zöschinger, 2006) da tanımlanmıştır. Tanım 2.2 yardımıyla aşağıdaki önerme mevcuttur.

Önerme 2.34. *M bir sağ R-modül olsun. M zayıf-injektiftir ancak ve ancak M eş kapalı-bölünebilirdir.*

Zayıf-injektif modüller (Zöschinger, 2008) ve (Zöschinger, 2011) de çalışılmıştır.

Tanım 2.35. Bir M sağ R-modülü için her $Y \to M \to 0$ epimorfizmasının çekirdeği Y de kapalı ise M modülü zayıf-düz olarak adlandırılır.

Zayıf-düz modüller (Zöschinger, 2013) de tanımlanmıştır. Tanım 2.1 yardımıyla aşağıdaki önerme mevcuttur.

Önerme 2.36. *M bir sağ R-modül olsun. M zayıf-düzdür ancak ve ancak M kapalı-düzdür.*

2.4.2 m-injektif modüller

Tanım 2.37. M bir sağ R-modül olsun. R'nin herhangi bir I sağ ideali için herhangi bir $I \to M$ homomorfizması $R \to M$ homomorfizmasına genişletilebiliyor ise M modülü m-injektif olarak adlandırılır.

Önerme 2.38. *Bir M sağ R-modülü için aşağıdakiler denktir:*

(1) M sağ m-injektiftir.

(2) M bir m-injektif R-modülün düzenli alt modülüdür.

(3) M onu içeren her modülün düzenli bir alt modülüdür.

(4) Her basit S sağ R-modül için $\mathrm{Ext}_R(S, M) = 0$ dır.

İspat. (1)⇔(4) I, R'nin bir sağ ideali olsun. $0 \to I \xrightarrow{i} R \to R/I \to 0$ kısa tam dizisine $\mathrm{Hom}(-, M)$ uygulayarak $0 \to \mathrm{Hom}(R/I, M) \to \mathrm{Hom}(R, M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}(I, M) \to \mathrm{Ext}^1(R/I, M) \to \mathrm{Ext}^1(R, M) = 0$ elde edilir. i^* epimorfizmatir ancak ve ancak $\mathrm{Ext}^1(R/I, M) = 0$ dır.

(2)⇔(3) (Crivei, 2014, Teorem 3.3) yardımıyla gösterilir.

(3)⇔(4) (Crivei, 2014, Teorem 3.4) yardımıyla gösterilir. ■

Önerme 2.21 ve Tanım 2.2 yardımıyla aşağıdaki önerme mevcuttur.

Önerme 2.39. *M bir sağ R modül olsun. M zayıf-injektiftir ancak ve ancak M Düzenli-bölünebilirdir.*

(Crivei, 2014) de bir M sağ R modülü kendisini içeren her modülün düzenli alt modülü ise M mutlak düzenli olarak adlandırılır. Önerme 2.21 yardımıyla bir M sağ R-modül mutlak düzenlidir ancak ve ancak M m-injektiftir. m-injektif modüller maksimum-injektif olarak adlandırılır (Wang ve Zhao, 2015) ve (Xiang, 2010).

Teorem 2.40. *(Crivei, 1998, Teorem 3) E sıfırdan farklı bir injektif R-modül ve $0 \neq D \trianglelefteq E$ olsun. D m-injektiftir ancak ve ancak $Soc(E/D) = 0$ dır.*

Tanım 2.41. Bir R halkasının her uygun büyük E sağ ideali için R/E sıfırdan farklı temele sahipse R halkası sağ C-halka olarak adlandırılır.

Uyarı 2.42. C-halka kavramı (Renault, 1964) de tanımlanmıştır. Sol mükemmel halkalar ve sağ yarı artin halkalar sağ C-halkalar örneklerindendir. Değişmeli R bölgesinin sıfırdan farklı her bir I ideali için R/I mükemmel bir halka ise R nerdeyse mükemmel olarak adlandırılır. Nerdeyse mükemmel bölgelerin C-halkalar olduğu açıktır. (Salce, 2011) de yazarlar R nerdeyse mükemmel bir bölge ise bir M R-modül injektiftir ancak ve ancak M m-injektiftir. Aslında, sağ C-halkaların karakterizasyonlarından biri aşağıdaki gibidir:

R bir sağ C-halkadır ancak ve ancak her m-injektif sağ R-modül injektiftir (Smith, 1981, Lemma 4).

Teorem 2.43. *(Generalov, 1978, Teorem 5) Bir R halkası için $Kapalı_{R\text{-}Mod} = Düzenli_{R\text{-}Mod}$ ancak ve ancak R bir sol C-halkadır.*

BÖLÜM 3
BULGULAR

3.1 Zayıf Mutlak s-Saf ve Zayıf Düzenli-Düz Modüller

Düzenli-düz ve mutlak s-saf modüllerin bir genelleştirilmesi olarak zayıf düzenli-düz ve zayıf mutlak s-saf modül kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 3.1. (1) M bir sol R-modül olsun. Her $M \to N$ monomorfizması ve S basit sağ ideali için $S \otimes M \to S \otimes N$ monik ise bir M sol zayıf mutlak s-saf olarak adlandırılır.

(2) M bir sağ R-modül olsun. $Y \to M$ epimorfizması ve S basit sağ ideali için $\mathrm{Hom}(S, Y) \to \mathrm{Hom}(S, M)$ örten ise M zayıf düzenli-düz olarak adlandırılır.

Aşağıda sırasıyla çok çalışılan düzenli-düz ve mutlak s-saf modüllerin sınıflarının genelleştirilmesi olan zayıf düzenli-düz ve zayıf mutlak s-saf modüllerin sınıflarının birçok örneği verilecektir.

Örnek 3.2. (a) Projektif $\Rightarrow$ düzenli-düz $\Rightarrow$ zayıf düzenli-düz olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte tersleri genelde doğru değildir. Örneğin, $\mathbb{Z}$-modül olan $\prod \mathbb{Z}$ sonsuz çarpımı modülü düzenli düzdür, fakat projektif değildir. Diğer bir deyişle, R halkası sağ Kasch halka olmayan bir sağ PS- halka (örneğin $R = \mathbb{Z}$) ise Önerme 3.4 yardımıyla her sağ R-modül zayıf düzenli-düz modüldür. Bununla birlikte, Önerme 3.9 yardımıyla düzenli-düz olmayan zayıf düzenli-düz bir modül vardır.

(b) Her basit sağ idealin sonlu sunumlu olması durumunda R halkasının sağ minimum-uyumlu halka olarak adlandırıldığı bilinmektedir. Bu durumda, her düz sağ modül zayıf düzenli-düz modüldür.

(c) İnjektif $\Rightarrow$ mutlak s-saf $\Rightarrow$ zayıf mutlak s-saf olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte, tersleri genelde doğru değildir. Örneğin R bir sağ N-halka ve Kasch halka olmayan sol FS-halka (örneğin, $R = \mathbb{Z}$)) ise o zaman Sonuç 3.3 yardımıyla her sol

R-modül zayıf mutlak s-saftır. Bununla birlikte, Önerme 3.9 yardımıyla mutlak s-saf olmayan zayıf mutlak s-saf bir modül vardır.

Her minimal sol ideal düz (sırasıyla projektif), denk olarak $\mathrm{Soc}_R(R)$ düz (sırasıyla projektif) ise R halkasının FS-halka (sırasıyla PS-halka) olarak adlandırıldığı bilinmektedir (bkz. (Liu, 1995) ve (Nicholson ve Waters, 1998)). Sol PS-halkalarının örnekleri arasında yarı asal halkalar, sol tekil olmayan halkalar, sol V-halkalar, sol PP-halkalar bulunmaktadır. Aşağıdaki ifade tanımlar yardımıyla açıktır.

Sonuç 3.3. *R bir sol FS halka ise her sağ R-modül zayıf mutlak s-saftır. R değişmeli bir halka ise, yukarıdaki ifadenin tersi de doğrudur.*

Her sağ modülün zayıf düzenli düz olduğu halkalar düşünüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Önerme 3.4. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) Her sağ modül zayıf düzenli-düzdür.

(2) Her sonlu üretilmiş sağ modül zayıf düzenli-düzdür.

(3) Her devirli sağ modül zayıf düzenli-düzdür.

(4) Her basit sağ modül zayıf düzenli-düzdür.

(5) R, sağ PS halkadır.

İspat. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ Açıktır.

$(4) \Rightarrow (5)$ S, R'nin bir minimal sağ ideali ve $f : R \to S$ bir epimorfizma olsun. (4) yardımıyla, S ideali zayıf düzenli-düzdür. Böylece $1_s : S \to S$ birim homomorfizma olmak üzere $fg = 1_S$ olacak şekilde bir $g : S \to R$ homomorfizması vardır. Dolayısıyla f parçalanan ve buradan hareketle S ideali projektiftir. Böylece R, sağ PS halkadır.

$(5) \Rightarrow (1)$ Açıktır. ■

M, sonlu sunumlu bir sağ R-modül olsun. Yani, F_0 ve F_1 sonlu üretilmiş serbest modüller olmak üzere M modülü $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ şeklinde serbest gösterime sahiptir. Bu gösterime $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ funktoru uygulandığında $Tr(M)$, $F_0^* \to F_1^*$ eş dönüşümünün eş çekirdeği olmak üzere $0 \to M^* \to F_0^* \to F_1^* \to Tr(M) \to 0$ tam dizisi elde edilir. $Tr(M)$'nin sonlu sunumlu sol R-modül olduğuna dikkat edilmelidir. $Tr(M)$ sol R-modülü M sağ R-modülünün bir Auslander Bridger transpozu olarak adlandırılır (bkz: (Sklyarenko, 1978)). Bir sağ minimum-uyumlu halka üzerinde, her minimal S sağ ideali ve onun transpozu olan $Tr(S)$ sonlu sunumludur.

Lemma 3.5. *R halkası bir minimum-uyumlu halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(1) M, bir zayıf mutlak s-saf sol R-modüldür ancak ve ancak her bir basit sağ S ideali için $\mathrm{Ext}_R^1(Tr(S), M) = 0$'dır.

(2) M, bir zayıf düzenli-düz sağ R-modüldür ancak ve ancak her bir basit sağ S ideali için $\mathrm{Tor}_1^R(M, Tr(S)) = 0$'dır.

İspat. (1) $0 \to M \to E(M) \to E(M)/M \to 0$ bir kısa tam dizi olsun. $E(M)$ injektif bürüm ve M'nin zayıf mutlak s-saf sol R-modül olduğu varsayılır ise R'nin herhangi bir basit sağ S ideali için $0 \to S \otimes M \to S \otimes E(M) \to S \otimes E(M)/M \to 0$ dizisi tamdır. $\mathrm{Ext}_R^1(Tr(S), M) = 0$ olduğundan (Sklyarenko, 1978, Teorem 8.3) yardımıyla $\mathrm{Hom}\,(Tr(S), E(M)) \to \mathrm{Hom}\,(Tr(S), E(M)/M)$ epimorfizmatir. Tersine, her bir basit sağ S ideali için $\mathrm{Ext}_R^1(Tr(S), M) = 0$ olduğu varsayılsın. $\mathrm{Hom}(Tr(S), E(M)) \to \mathrm{Hom}\,(Tr(S), E(M)/M)$ epimorfizmatir. Sonuç olarak, M modülü zayıf mutlak s-saf olduğundan (Sklyarenko, 1978, Teorem 8.3) yardımıyla $0 \to S \otimes M \to S \otimes E(M)$ dizisi sol tamdır.

(2) P bir projektif modül olmak üzere $0 \to F \to P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ dizisi bir tam dizi olsun. M modülünün zayıf düzenli-düz sağ R-modül olduğu varsayılır ise R'nin herhangi bir basit sağ S sağ ideali için $0 \to \mathrm{Hom}(S, F) \to \mathrm{Hom}(S, P) \to \mathrm{Hom}(S, M) \to 0$ dizisi tamdır. R sağ minimum-uyumlu halka olduğundan S ideali sonlu sunumludur. Böylece (Sklyarenko, 1978, Teorem 8.3) yardımıyla $0 \to F \otimes Tr(S) \to P \otimes Tr(S)$ dizisi sol tamdır. Buradan $Tor_1^R(M, Tr(S)) = 0$'dır. Tersine, her bir basit sağ S ideali için $Tor_1^R(M, Tr(S)) = 0$ olduğu kabul edilsin. Böylece $0 \to F \otimes Tr(S) \to$

$P \otimes Tr(S)$ dizisi sol tamdır. Buradan hareketle tekrar (Sklyarenko, 1978, Teorem 8.3) yardımıyla $0 \to \mathrm{Hom}(S,F) \to \mathrm{Hom}(S,P) \to \mathrm{Hom}(S,M) \to 0$ dizisi tamdır. $g : S \to M$ herhangi bir homomorfizma ve $f : N \to M$ bir epimorfizma olsun. Bu $\pi\varphi = g$ olacak şekilde öyle bir $\varphi : S \to P$ nin var olduğu anlamına gelmektedir. P projektif olduğundan, $f\theta = \pi$ olacak şekilde bir $\theta : P \to N$ homomorfizması vardır. $h = \theta\varphi$ yazılırsa h, S'den N'ye bir homomorfizmadır ve $g = \pi\varphi = f(\theta\varphi) = fh$ sağlanır. Böylece M modülü zayıf düzenli-düzdür. ■

Aşağıdaki önermenin ispatı rutin olarak yapılabilir. Devamında sık kullanılacağından dolayı bütünlük adına ispatına yer verilmektedir.

Önerme 3.6. *R bir sağ minimum uyumlu halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(1) M bir zayıf düzenli-düz sağ R-modüldür ancak ve ancak M^+ bir zayıf mutlak s-saf R-modüldür.

(2) M bir zayıf mutlak s-saf sol R-modüldür ancak ve ancak M^+ bir zayıf düzenli-düz R-modüldür.

(3) M bir zayıf mutlak s-saf sol R-modüldür ancak ve ancak M^{++} bir zayıf mutlak s-saf R-modüldür.

(4) M bir zayıf düzenli-düz sağ R-modüldür ancak ve ancak M^{++} bir zayıf düzenli-düz R-modüldür.

(5) Zayıf mutlak s-saf sol R-modüllerin sınıfı dik çarpımlar, saf alt modüller ve saf bölümler altında kapalıdır.

(6) Zayıf düzenli-düz sağ R-modüllerin sınıfı dik çarpımlar, saf alt modüller ve saf bölümlere göre kapalıdır.

***İspat**.* (1) Herhangi bir basit sağ S ideali için $Tr(S)$ sonlu sunumludur. Böylece Lemma 3.5 ve $\mathrm{Ext}^1_R(Tr(S), M^+) \cong \mathrm{Tor}_1(M, Tr(S))^+$ standart izomorfizması ile istenen sonuç elde edilir.

(2) M bir sol R-modül ve S de R'nin basit sağ ideali olsun. Buradan (Rotman, 1979,

Teorem 9.51) yardımıyla $Tor_1(M^+, Tr(S)) \cong \mathrm{Ext}^1_R(Tr(S), M)^+$ olduğu görülür. Böylece istenen sonuç Lemma 3.5 yardımıyla elde edilir.

(3) ve (4) ifadeleri (1) ve (2) yardımıyla gösterilir.

(5) M modülü zayıf mutlak s-saf sol R-modül ve K da M modülünün saf alt modülü olduğu varsayılsın. O zaman $0 \to (M/K)^+ \to M^+ \to K^+ \to 0$ tam dizisi parçalanır. (2) yardımıyla, M^+ zayıf düzenli-düzdür. Buradan hareketle $(M/K)^+$ ve K^+ da zayıf düzenli-düzdür. (2) yardımıyla M/K ve K zayıf mutlak s-saftır.

S, R'nin basit sağ ideali ve $\{A_i\}_{i\in I}$, zayıf mutlak s-saf sol R-modüllerin ailesi olsun. O zaman Lemma 3.5'den $\mathrm{Ext}^1_R\left(Tr(S), \prod_{i\in I} A_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^1_R(Tr(S), A_i) = 0$ dır. Böylece Lemma 3.5 yardımıyla $\prod_{i\in I} A_i$ zayıf mutlak s-saftır.

(6) M modülü zayıf düzenli-düz sağ R-modül ve K da M'nin bir saf alt modülü varsayılsın. O halde $0 \to (M/K)^+ \to M^+ \to K^+ \to 0$ tam dizisi parçalanır. (1) yardımıyla M^+ zayıf mutlak s-saftır. Buradan hareketle $(M/K)^+$ ve K^+ da zayıf mutlak s-saftır. Böylece (1) yardımıyla K ve M/K zayıf düzenli-düzdür.

$\{A_i\}_{i\in I}$ zayıf düzenli-düz sağ R modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{i\in I} A_i$ zayıf düzenli-düzdür. Böylece (4) yardımıyla $\left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right)^{++} \cong \prod_{i\in I} \left(A_i^+\right)^+$ zayıf düzenli-düzdür. Fakat $\bigoplus_{i\in I} A_i^+$, bir saf alt modülü olduğundan $\left(\prod_{i\in I} A_i^+\right)^+ \to \left(\bigoplus_{i\in I} A_i^+\right)^+$ parçalanan bir epimorfizmadır. Böylece $\left(\bigoplus_{i\in I} A_i^+\right)^+ \cong \prod_{i\in I} A_i^{++}$ zayıf düzenli-düzdür. Sonuç olarak, $\prod_{i\in I} A_i^{++}$ içinde $\prod_{i\in I} A_i$ nin saflığı yardımıyla $\prod_{i\in I} A_i$ zayıf düzenli-düzdür. ■

M ve N sağ R-modülleri için $m \in M$, $n \in N$, $g \in \mathrm{Hom}_R(N, R)$ olmak üzere $\sigma_{M,N}(m \otimes g)(n) = m(g(n))$ ile tanımlanan

$$\sigma_{M,N} : M \otimes_R \mathrm{Hom}(N, R) \to \mathrm{Hom}_R(N, M)$$

doğal bir homomorfizma vardır.

Bir sonraki önermede bilinen düzenli-düz modüllerin benzeri olan zayıf düzenli-düz modüller için bir çok karakterizasyonlar verilecektir.

Lemma 3.7. *(Zhou, 2019, Teorem 1) M sağ R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M zayıf düzenli-düzdür.

(2) R'nin herhangi bir basit sağ S ideali için $\sigma_{M,S}$ bir epimorfizmadır.

(3) R'nin herhangi bir basit sağ S ideali ve herhangi bir $f : S \to M$ homomorfizması için, f sonlu üretilmiş serbest bir F modülü aracılığıyla parçalanır.

(4) P projektif modül olmak üzere bir $f : P \to M$ epimorfizması vardır. Öyle ki, R'nin herhangi bir basit sağ S ideali ve herhangi bir $g : S \to M$ homomorfizması için $g = fh$ olacak şekilde öyle bir $h : S \to P$ homomorfizması vardır.

Lemma 3.8. *(1) Zayıf düzenli-düz sağ R-modüllerin sınıfı genişlemeler dik toplamlar ve dik bileşenler altında kapalıdır.*

(2) Zayıf mutlak s-saf sol R-modüllerin sınıfı dik toplamlar ve dik bileşenler altında kapalıdır.

İspat. (1) (a) K ve M zayıf düzenli-düz sağ modülleriyle oluşturulan $0 \to K \to L \to M \to 0$ dizisinin tam dizi olduğu varsayılsın. S, R'nin basit bir sağ ideali olsun. O halde aşağıdaki tam satırlı değişmeli diyagram mevcuttur.

$$\begin{tikzcd}
& K \otimes_R \mathrm{Hom}_R(S,R) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{K,S}"] & L \otimes_R \mathrm{Hom}_R(S,R) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{L,S}"] & M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(S,R) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{M,S}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(S,K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(S,L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(S,M) &
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.7 yardımıyla K ve M zayıf düzenli-düz olduğundan $\sigma_{K,S}$ ve $\sigma_{M,S}$ epimorfizmalardır. Böylece (Anderson ve Fuller, 1974, Lemma 3.14) yardımıyla $\sigma_{L,S}$ bir epimorfizmadır ve bunun sonucu olarak Lemma 3.7 yardımıyla L zayıf düzenli-düzdür.

(b) S, R'nin herhangi bir basit sağ ideali ve $\{N_i\}_{i\in I}$ zayıf düzenli-düz sağ R-modüllerini herhangi bir ailesi olsun. S sonlu üretildiğinden her $f : S \to \bigoplus_{i\in I} N_i$ homomorfizması için $\mathrm{im}(f) \subseteq \bigoplus_{j\in J} N_j$ olacak şekilde sonlu $J \subseteq I$ indeks kümesi bulunur. Her $s \in S$ için $g(s) = f(s)$ ve $h : \bigoplus_{j\in J} N_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$ gömme dönüşümü yardımıyla

$g : S \to \bigoplus_{j\in J} N_j$ tanımlansın. O zaman $f = hg$ dir. Her bir N_j zayıf düzenli-düz olduğundan (a) yardımıyla $\bigoplus_{j\in J} N_j$ zayıf düzenli-düzdür. Sonuç olarak sonlu üretilmiş serbest bir F sağ R-modülü, $\beta\alpha = g$ olacak şekilde $\alpha : S \to F$ ve $\beta : F \to \bigoplus_{j\in J} N_j$ vardır. Böylece $f = hg = h(\beta\alpha) = (h\beta)\alpha$ ve buradan hareketle Lemma 3.7 yardımıyla $\bigoplus_{i\in I} N_i$ zayıf düzenli-düzdür.

(c) Tanım yardımıyla zayıf düzenli-düz sağ R-modülün dik bileşenlerinin zayıf düzenli-düz olduğunu göstermek kolaydır.

(2) Tensör çarpımının özellikleri yardımıyla zayıf mutlak s-saf sol R-modüllerin sınıfı dik toplamlar ve dik bileşenler altında kapalıdır. ■

R halkasının her maksimal sağ ideali sonlu üretilmiş ise R halkası N-halka olarak adlandırılır. Örnek 1 yardımıyla zayıf düzenli-düz (sırasıyla, zayıf mutlak s-saf) R-modüllerin düzenli-düz (sırasıyla, mutlak s-saf) olmasının zorunlu olmadığı gözlemlenmiştir. Tersi için aşağıdaki ifade elde edilmiştir.

Önerme 3.9. *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R bir sağ Kasch halkadır.

(2) Her zayıf düzenli-düz sağ R-modül düzenli-düzdür.

Ek olarak, R sağ minimum uyumlu halka ise yukarıdaki koşullar aşağıdakine denktir:

(3) Her zayıf mutlak s-saf sol R-modül mutlak s-saftır.

İspat. (1)⇒(2) ve (1)⇒(3) Açıktır.

(2)⇒(1) S basit bir sağ R-modül ve $\lambda : S \to E(S)$ gömme homomorfizması olsun. Önerme 3.13 yardımıyla $E(S)$ zayıf düzenli-düz olduğundan (2) aracılığıyla $E(S)$ düzenli-düzdür. Sonuç olarak, sonlu üretilmiş serbest bir F modülü ve $\beta\alpha = \lambda$ olacak şekilde $\alpha : S \to F$ ve $\beta : F \to E(S)$ homomorfizmaları vardır. $\beta\alpha$ monik olduğundan, α moniktir. Böylece (1) sağlanır.

(2)⇒(3) M bir zayıf mutlak s-saf sağ modül olsun. R minimum uyumlu olduğundan Önerme 3.6 yardımıyla M^+ zayıf düzenli-düzdür. Sonuç olarak (2) yardımıyla M^+

düzenli-düzdür. (Büyükaşık ve Durğun, 2015, Önerme 4.3 (1)) yardımıyla M mutlak s-saftır.

(3)⇒(2) nin ispatı (2)⇒(3)'ün ispatına benzerdir. ■

Her bir sağ N modülü için herhangi bir $f : N \to M$ epimorfizmasının çekirdeği N'nin kapalı alt modülü ise sağ M modülü sağ zayıf-düz olarak adlandırılır. Kavramlar arası aşağıdaki geçişler gerçeklenir.

Tekil olmayan ⇒ zayıf-düz ⇒ düzenli-düz ⇒ zayıf düzenli-düz

Önerme 3.10. *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R yarı basittir.

(2) Her zayıf düzenli-düz sağ R-modül tekil olmayan bir modüldür.

(3) Her zayıf mutlak s-saf sol R-modül injektiftir ve R_R tekil olmayan modüldür.

İspat. (1)⇒(2) Her modül tekil olmayan modül olduğundan sonuç açıktır.

(1)⇒(3) Her modül tekil olmayan ve injektif olduğundan sonuç açıktır.

(2)⇒(1) Projektif modüller tekil olmayan modüller olduğundan R_R tekil olmayan modüldür. Diğer bir deyişle, zayıf düzenli-düz modüller düzenli-düzdür. Böylece Önerme 3.9 yardımıyla R sağ Kasch halkadır. Bununla birlikte R_R tekil olmayan modül olduğundan her basit sağ R-modül tekil olmayandır ve böylece (basit modül ya tekil ya da projektif olduğundan) projektiftir. Sonuç olarak R yarı basittir.

(3)⇒(1) R bir sol tekil olmayan halka olduğundan R halkası sol FS-halkadır. Böylece her sol R-modülü Sonuç 3.3 yardımıyla zayıf mutlak s-saf ve sonuç olarak (3) yardımıyla injektiftir. Buradan R yarı basittir. ■

R'nin her büyük sol I ideali için $\mathrm{Soc}(R/I) \neq 0$ ise R halkası sol C-halka olarak adlandırılır. Sağ mükemmel halkalar, sol yarı Artin halkalar C-halkasının bilinen en iyi örnekleridir (bkz. (Clark ve diğerleri, 2006 10.10)). (Büyükaşık ve Durgun, 2016, Önerme 2.7) de gösterildiği üzere R halkası bir sağ C-halkadır ancak ve ancak düzenli-düz R modüller zayıf-düzdür.

Önerme 3.11. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R halkası sağ Kasch ve sağ C-halkadır.

(2) Her zayıf düzenli-düz sağ R-modüller zayıf-düzdür.

İspat. (1)⇒(2) M bir zayıf düzenli-düz sağ R-modül olsun. O halde Önerme 3.9 yardımıyla M düzenli-düzdür. R bir sağ C-halka olduğundan (Büyükaşık ve Durğun, 2016, Önerme 2.7) yardımıyla M zayıf-düz modüldür.

(2)⇒(1) Zayıf düzenli-düz, düzenli-düz ve zayıf-düz modüller çakıştığından Önerme 25 ve, (Büyükaşık ve Durğun, 2016, Önerme 2.7) yardımıyla R sağ C-halka ve sağ Kasch halkadır. ■

Önerme 3.12. *Her zayıf düzenli-düz sağ modül düz ve R_R tekil olmayan modüldür ancak ve ancak R Von Neumann regülerdir.*

İspat. (⇒) R tekil olmayan bir halka olduğundan, Önerme 3.4 yardımıyla her sağ modül zayıf düzenli-düzdür. Böylece hipotez yardımıyla R Von Neumann regülerdir.

(⇐) Tersine, R tekil olmayan bir halka olduğundan her sağ R-modül zayıf düzenli-düzdür. Sonuç olarak R Von Neumann regüler olduğundan her sağ R-modül aynı zamanda düzdür. ■

3.2 Minimum İnjektif Modüller

Bu bölümde sırasıyla (minimum) injektif ve (minimum) düz modüllerin bir genelleştirmesi olarak zayıf düzenli-düz ve zayıf mutlak s-saf modüller ele alınacaktır. Şöyle ki, R'nin herhangi bir basit sağ S ideali için her bir $f : S \to M$ homomorfizmasının bir $g : R \to M$ homomorfizmasına genişletilebildiği, yani, R'nin her basit sağ S ideali için $\mathrm{Ext}^1_R(R/S, M) = 0$ olduğu durumda bir M sağ R-modülü minimum-injektif olarak adlandırılır. Bir R halkası sağ R-modül olarak minimum-injektif oluyor ise R halkası sağ minimum-injektif olarak adlandırılır (bkz. (Harada, 1982). Bir M sol R-modülü ve

R'nin herhangi bir basit sağ S ideali için $\mathrm{Tor}_1^R(R/S, M) = 0$ ise M modülü minimum-düz olarak adlandırılır (bkz. (Mao, 2007)). Buradan bir sonraki ifadenin görülmesi kolaydır. Bir M sol R-modül minimum-düzdür ancak ve ancak R'nin herhangi bir basit sağ S ideali için $\mathrm{Ext}_R^1(R/S, M^+) \cong \mathrm{Tor}_1^R(R/S, M)^+$ izomorfizması yardımıyla M^+ minimum injektiftir.

Önerme 3.13. *Her minimum-injektif sağ modül zayıf düzenli-düzdür.*

İspat. S, R'nin minimal bir sağ ideali, E minimum-injektif sağ R-modül ve $f : S \to E$ bir homomorfizma olsun. E minimum-injektif olduğundan $i : S \hookrightarrow R$ olmak üzere $f = gi$ olacak şekilde bir $g : R \to E$ homomorfizması vardır. Üstelik $h : R^{(n)} \to E \to 0$ da vardır. R projektif olduğundan $ht = g$ olacak şekilde $t : R \to R^{(n)}$ vardır. Sonuç olarak $f = gi = hti$ ve bundan dolayı E zayıf düzenli-düzdür. ■

Uyarı 3.14. Bir R halkası için aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her minimum-düz F sağ R-modül için F^+ zayıf düzenli-düzdür. Özel olarak her serbest F sağ modülü için F^+ zayıf düzenli-düzdür.

(2) R bir sağ minimum-uyumlu halka ise her minimum-düz sol R-modül zayıf mutlak s-saftır. Gerçekten, M bir minimum-düz sol R-modül olsun. O zaman (Mao, 2007, Lemma 3.2) yardımıyla M^+ minimum-injektiftir ve böylece Önerme 3.13 yardımıyla aynı zamanda zayıf düzenli-düzdür. Buradan Önerme 3.6 yardımıyla M zayıf mutlak s-saftır.

(3) Özel olarak, R bir sağ minimum-uyumlu halka ise (2) yardımıyla R^R zayıf mutlak s-saftır.

Uyarı 3.15. Her minimum-injektif sağ modül zayıf düzenli-düz olmasına rağmen her minimum-injektif sağ modül düzenli-düz olmak zorunda değildir. Örneğin, herhangi bir p asal tam sayı için $M = \mathbb{Z}_p$ minimum-injektif $\mathbb{Z}$-modül fakat düzenli-düz değildir. Aksi taktirde M projektif olurdu.

Doğal olarak minimum-injektif sağ modüller ne zaman düzenli-düz olurlar sorusu ortaya çıkmıştır.

Sonuç 3.16. *Her minimum-injektif sağ R-modül düzenli-düzdür ancak ve ancak R halkası bir sağ Kasch halkadır.*

İspat. S bir basit sağ R-modül ve $\lambda : S \to E(S)$ gömme homomorfizması olsun. Hipotez yardımıyla $E(S)$ düzenli-düz olduğundan sonlu üretilmiş bir serbest F modülü ve $\beta\alpha = \lambda$ olacak şekilde $\alpha : S \to F$ ve $\beta : F \to E(S)$ homomorfizmaları vardır. $\beta\alpha$ monik olduğundan α moniktir ve böylece R sağ Kasch halkadır. Tersi Önerme 3.9 ve 3.13 aracılığıyla elde edilir. ■

Bir M sağ R-modül kendi injektif bürümünde saf ise M modülü FP-injektif olarak adlandırılır. Açıkça görülebilir ki, FP-injektif modüller zayıf mutlak s-saftır.

Sonuç 3.17. *Bir sağ minimum uyumlu R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) Her zayıf düzenli-düz sağ modül düzdür.

(2) Her zayıf mutlak s-saf sol modül FP-injektiftir.
Bu durumda R sağ IF-halka ve her maksimum injektif sağ R-modül FP-injektiftir.

İspat. (1)⇒(2) M bir zayıf mutlak s-saf sol R-modül olsun. O zaman Önerme 3.6 yardımıyla M^+ zayıf düzenli-düzdür. (1) yardımıyla M^+ aynı zamanda düzdür. Böylece (Rotman, 1979, Teorem 3.52) aracılığıyla M^{++} injektiftir. M modülü M^{++} injektif modülünün bir saf alt modülü olduğundan M modülü FP-injektiftir.

(2)⇒(1) M bir zayıf düzenli-düz sağ R-modül olsun. O zaman Önerme 3.6 yardımıyla M^+ zayıf mutlak s-saftır ve (2) yardımıyla M^+ aynı zamanda FP-injektiftir. Öte yandan, M^+ nın saf injektifliği injektif olmasını sağlayacaktır. Böylece (Rotman, 1979, Teorem 3.52) aracılığıyla M düzdür.

Bu durumda, düzenli-düz modüller zayıf düzenli-düz olduğundan (Büyükaşık ve Durğun, 2016, Önerme 3.5) yardımıyla her maksimum-injektif sağ R-modül FP-injektiftir. Öte yandan, Önerme 3.13 yardımıyla injektif modüller zayıf düzenli-düz olduğundan R'nin sağ IF olduğu açıktır. ■

R halkası sol Noether ve sol kendi-injektif ise R'nin QF olarak adlandırıldığına dikkat edilmelidir. (Faith, 1976) in iyi bilinen bir sonucu aracılığıyla, R halkası QF dir ancak ve ancak her projektif sağ R-modül injektiftir. (Büyükaşık ve Durğun, 2016, Teorem 2.10) da gösterildiği üzere R halkası sağ $\sum -CS$ halka ancak ve ancak her düzenli-düz R-modül projektiftir. Aşağıdaki sonuçta QF halkanın yeni bir karakterizasyonu verilmiştir.

Teorem 3.18. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R halkası QF dir.

(2) Her zayıf düzenli-düz sağ modül projektiftir.

(3) Her zayıf düzenli-düz sağ modül injektiftir.

(4) Her zayıf mutlak s-saf sol R-modül projektiftir.

Buna ek olarak, R sağ minimum-uyumlu halka ise yukarıdaki koşullar aşağıdaki koşullara denktir:

(5) Her zayıf mutlak s-saf sol R-modül injektiftir.

(6) R sol Noether ve her zayıf düzenli-düz sağ modül düzdür.

İspat. (1)⇒(2) R halkası QF halka olduğundan R halkası $\sum -CS$ ve sağ Kasch halkadır. İspatın geri kalanı Önerme 3.9 ve (Büyükaşık ve Durğun, 2019, Teorem 2.10) yardımıyla gösterilir.

(2)⇒(1) Herhangi bir zayıf düzenli-düz sağ modül (2) yardımıyla düzenli-düzdür. Böylece R sağ Kasch halkadır. Ayrıca, her düzenli-düz modül projektif olduğundan (Büyükaşık ve Durğun, 2019, Teorem 2.6] yardımıyla R sağ $\sum -CS$ halkadır. Böylece (Büyükaşık ve Durğun, 2015, Sonuç 4.12) yardımıyla R halkası QF halkadır.

(1)⇒(3) M bir zayıf düzenli-düz sağ modül olsun. (1)⇒(2) yardımıyla M projektiftir ve sonuç olarak hipotez yardımıyla M injektiftir.

(3)⇒(1) Projektif sağ modüller zayıf düzenli-düz olduklarından ispat açıktır.

(4)⇒(1) Açıktır.

(1)⇒(4) M bir zayıf mutlak s-saf sol R-modül olsun. R sağ Noether olduğundan Önerme 3.6 yardımıyla M^+ zayıf düzenli-düzdür. (1)⇒(3) ün ispatı yardımıyla M^+ injektiftir ve sonuç olarak R'nin Noetherliğinden yaralanılarak M düzdür. R sol mükemmel olduğundan M projektiftir.

(1)⇒(5) M bir zayıf mutlak s-saf sol R-modül olsun. R sağ Noether olduğundan Önerme 3.6 yardımıyla M^+ zayıf düzenli-düzdür. Böylece (1)⇒(2) nin ispatından yaralanılarak M^+ düzdür. R Noether olduğundan, (Cheatham ve Stone, 1981) yardımıyla M injektiftir.

(5)⇒(1) M bir projektif sol R-modül olsun. R sağ minimum uyumlu halka ve M minimum-düz olduğundan Sonuç (1)-(3) yardımıyla M zayıf mutlak s-saftır. Böylece (5) yardımıyla M injektiftir.

(5)⇒(6) FP-injektif sol R-modüller zayıf mutlak s-saf olduğundan (5) ve (Lam, 1999, Teorem 3) yardımıyla R sol Noether halkadır. M bir zayıf düzenli-düz sağ R-modül olsun. R sağ minimum-uyumlu olduğundan, Önerme 3.6 yardımıyla M^+ zayıf mutlak s-saftır. Böylece (5) yardımıyla M^+ injektiftir. Sonuç olarak (Rotman, 1979, Teorem 3.52) den M düzdür.

(6)⇒(5) M bir zayıf mutlak s-saf sol R-modül olsun. R sağ minimum uyumlu olduğundan Önerme 3.6 yardımıyla M^+ zayıf düzenli-düz ve böylece (6) yardımıyla düzdür. R sol Noether olduğundan, (Cheatman ve Stone, 1981, Teorem 2) kullanılarak M injektiftir. ■

Tam olarak bu noktada sonlu üretilmiş (devirli) zayıf düzenli-düz modüllerin projektif olduğu halkaları düşünmek doğaldır. Değişmeli Noether halkalar için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Önerme 3.19. *R bir değişmeli Noether bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) Her sonlu üretilmiş zayıf düzenli-düz modül projektiftir.

(2) Her devirli zayıf düzenli-düz modül projektiftir.

(3) R, QF halkadır.

İspat. (1)⇒(2) Açıktır.

(2)⇒(3) R'nin Artin tüm alt modüllerinin toplamı A olsun. Noether sanısından dolayı A sonlu üretilmiştir. Böylece sonlu çoklukta Artin alt modüllerin toplamı olarak A Artindir. Buradan $\mathrm{Soc}(R/A) = 0$ ve bunun sonucu olarak R/A zayıf düzenli-düzdür. (2) yardımıyla R/A projektiftir. O zaman $\mathrm{Soc}(B) = 0$ olacak şekilde R'nin bazı B idealleri için $R = A \bigoplus B$'dir. I ideali A'nın kapalı bir ideali olsun. O zaman A/I zayıf-düzdür. (2) yardımıyla A/I projektiftir. Buradan I ideali A'nın dik bileşenidir. Böylece A bir CS halkadır. Sonuç olarak (Faith,1976, Önerme 18.22) yardımıyla A, QF halkadır.

$\mathrm{Soc}(B) = 0$ olduğundan Önerme 2.3 yardımıyla her B-modülü zayıf düzenli-düzdür. Özel olarak her devirli B-modülü zayıf düzenli-düzdür. O zaman (2) yardımıyla her devirli B-modülü projektiftir. Buradan B yarı basittir. Böylece $\mathrm{Soc}(B) = 0$ olduğundan B sıradan bir halka olmak zorundadır.

(3)⇒(1) Teorem 3.18 yardımıyla gösterilebilir. ■

3.3 Örtü ve Bürüm

A bir sağ R-modül olsun. $C \in \zeta$ olmak üzere bir $f : C \to A$ homomorfizması alınsın. $D \in \zeta$ olmak üzere her $g : D \to A$ homomorfizması için $fh = g$ olacak şekilde bir $h : D \to C$ homomorfizması var ise f homomorfizması A'nın bir ζ-ön örtüsü (bkz. [9]) olarak adlandırılır. Ek olarak, eğer sadece böyle h'ler $C = D$ ve $g = f$ olduğunda C'nin otomorfizmaları ise ζ-ön örtüsü A'nın ζ-örtüsü olarak adlandırılır. Eş olarak, ζ-ön bürüm ve bürüm tanımları mevcuttur. ζ-bürüm (ζ-örtüler) genel olarak mevcut olmayabilir. Fakat eğer mevcut iseler bunlar izomorfizma altında tektir.

Önerme 3.20. *R minimum-uyumlu bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.*

(1) Her sol R-modül epimorfizma zayıf mutlak s-saf bir örtüye sahiptir.

(2) Her sağ R-modül monik zayıf düzenli-düz bir ön bürüme sahiptir.

(3) Her sol R-modül zayıf mutlak s-saf bir ön bürüme sahiptir.

(4) Her sağ R-modül zayıf düzenli-düz bir örtüye sahiptir.

İspat. (1) Zayıf mutlak s-saf sol R-modüller Önerme 3.6 ve Lemma 3.7 yardımıyla dik toplamlar ve saf bölümler altında kapalıdır. Böylece (Hiremath ve Gramopadhye, 2009, Teorem 2.5) yardımıyla her sol R-modül zayıf mutlak s-saf bir örtüye sahiptir. Uyarı 3.14-(3) yardımıyla R zayıf mutlak s-saf olduğundan, her projektif sol R-modül zayıf mutlak s-saf olur. P projektif modülü ile $\beta : P \to M$ bir epimorfizma ve $f : F \to M$ ise M sol R-modülünün zayıf mutlak s-saf örtüsü olsun. O zaman $fg = \beta$ olacak şekilde bir $g : P \to F$ homomorfizması vardır. Bu f'nin epimorfizma olduğu anlamına gelir.

(2) Zayıf düzenli-düz sağ R-modüller Önerme 3.6 yardımıyla dik çarpım ve saf alt modüller altında kapalıdır. (Nicholson ve Waters, 1988, Sonuç 3.5 (c)) yardımıyla her sağ modül zayıf düzenli-düz ön bürüme sahiptir. M herhangi bir sağ R-modül ve $P : M \to F$ ise M nin zayıf düzenli-düz ön bürümü olsun. Önerme 3.13 yardımıyla $E(M)$ zayıf düzenli-düz olduğundan $i : M \to E(M)$ gömme dönüşümü olmak üzere $i = gf$ olacak şekilde bir $g : F \to E(M)$ homomorfizması vardır. Bu f'nin monik olduğu anlamına gelir.

(3) Zayıf mutlak s-saf sol R-modüller Önerme 3.6 yardımıyla dik çarpımlar ve saf alt modüller altında kapalıdır. (Nicholson ve Waters, 1988, Sonuç 3.5 (c)) yardımıyla iddia ispatlanır.

(4) Zayıf düzenli-düz sağ R-modüller Önerme 3.6 yardımıyla saf bölümler, Lemma 3.7 yardımıyla dik toplamlar altında kapalıdır. Böylece, (Hiremath ve Gramopadhye, 2009, Teorem 2.5) yardımıyla her modül zayıf düzenli-düz örtüye sahiptir. ■

Teorem 3.21. *Bir sağ minimum-uyumlu R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R sağ PS dir.

(2) Herhangi bir zayıf düzenli-düz sağ R-modülün her alt modülü zayıf düzenli-düzdür.

(3) Projektif sağ R-modülün her alt modülü zayıf düzenli-düzdür.

Buna ek olarak, R sağ minimum uyumlu halka ise yukarıdaki koşullar aşağıdaki ko-

şullara denktir:

(4) Herhangi bir zayıf mutlak s-saf sol R-modülün her bölümü zayıf mutlak s-saftır.

(5) Herhangi bir injektif sol R-modülün her bölümü zayıf mutlak s-saftır.

İspat. (1)⇒(2) N zayıf düzenli-düz M modülünün bir alt modülü ve $\alpha : N \to M$ bir gömme dönüşümü olsun. M zayıf düzenli-düz olduğundan herhangi bir basit sağ S ideali ve herhangi bir $f : S \to N$ homomorfizması için Lemma 3.7 yardımıyla αf sonlu üretilmiş serbest sağ F modülü aracılığıyla çarpanlarına ayrılır. Diğer bir deyişle $\alpha f = hg$ olacak şekilde $g : S \to F$ ve $h : F \to M$ homomorfizmaları vardır. $\alpha f = hg$ nin anlamı $Ker(g) \subseteq Ker(f)$ olmasıdır. $K = Img$ yazılsın. K basit sağ S idealine izomorfik olduğundan (1) yardımıyla K projektiftir. $s \in S$ için $\Psi(g(s)) = f(s)$ ile $\Psi : K \to N$ tanımlansın. Ψ iyi tanımlı bir homomorfizmadır ve $f = \Psi g$ dir. Bu f'nin projektif basit K modülü aracılığıyla çarpanlarına ayrıldığını gösterir. Sonuç olarak Lemma 3.7 yardımıyla N zayıf düzenli-düzdür.

(2)⇒(3)⇒(1) ve (4)⇒(5) Açıktır.

(2)⇒(4) N zayıf mutlak s-saf sol M R-modülünün bir alt modülü varsayılsın. M/N nin zayıf mutlak s-saf olduğu iddia edilmektedir. Önerme 3.6 yardımıyla N zayıf mutlak s-saf olduğundan M^+ zayıf düzenli-düz olmak üzere bir $0 \to (M/N)^+ \to M^+ \to N^+ \to 0$ tam dizisi mevcuttur. Böylece (1) yardımıyla $(M/N)^+$ zayıf düzenli-düz ve Önerme 3.6 yardımıyla da M/N zayıf mutlak saftır.

(5)⇒(3) N bir projektif sağ M modülünün alt modülü varsayılsın. O zaman M^+ injektiftir. M^+ nın epimorfik görüntüsü N^+ olduğundan N^+ nın zayıf mutlak s-saf olduğu (5) yardımıyla açıktır. Böylece Önerme 3.6 yardımıyla N zayıf düzenli-düzdür. ■

Teorem 3.22. *Bir sağ minimum-uyumlu R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R sağ PS dir.

(2) Her sağ R-modül epimorfizma zayıf düzenli-düz bir bürüme sahiptir.

(3) Her basit sağ ideal epimorfizma projektif bir bürüme sahiptir.

İspat. (1)⇒(2) M herhangi bir sağ R-modül olsun. R sağ minimum uyumlu olduğundan Önerme 2.13 yardımıyla M, zayıf düzenli-düz bir $f : M \to P$ un bürümüne sahiptir. R bir sağ PS halka olduğundan Teorem 2.18 yardımıyla $Im(f)$ zayıf düzenli-düzdür. Böylece $M \to Im(f)$ epimorfizma zayıf düzenli-düz bir ön bürümdür. Sağ R-modüllerin herhangi bir $\mathcal{S}$ sınıfı için her bir epimorfizma $\mathcal{S}$-ön bürüm bir $\mathcal{S}$-bürümdür. Böylece (2) elde edilir.

(2)⇒(3) $\mathcal{S}$, R'nin basit sağ ideali olsun. O zaman (2) yardımıyla S epimorfizma zayıf düzenli-düz bir $f : S \to N$ bürümüne sahiptir. Lemma 3.7 yardımıyla f sonlu üretilmiş serbest bir F sağ R-modülü aracılığıyla çarpanlarına ayrılır. Diğer bir deyişle $f : S \to N$ için $f = gh$ olacak şekilde $g : S \to F$ ve $h : F \to N$ homomorfizmalarının varlığı mevcuttur. F zayıf düzenli-düz olduğundan $g = \Psi f$ olacak şekilde öyle bir $\Psi : N \to F$ vardır. Böylece f epimorfizma olduğundan $f = (h\Psi)f$ ve böylece $h\Psi = 1_N$ dir. Buradan N, F'nin bir dik bileşenine izomorfiktir. Sonuç olarak N projektiftir.

(3)⇒(1) N zayıf düzenli-düz bir M modülünün alt modülü ve $\alpha : N \to M$ gömme dönüşümü olsun. M zayıf düzenli-düz olduğundan herhangi bir basit sağ S ideali ve herhangi bir $f : S \to N$ homomorfizması için Lemma 3.7 yardımıyla αf sonlu üretilmiş bir serbest F sağ modülü aracılığıyla çarpanlarına ayrılır. Diğer bir deyişle $\alpha f = hg$ olacak şekilde $g : S \to F$ ve $h : F \to M$ homomorfizmaları vardır. (3) yardımıyla S epimorfizma projektif bir $\beta : S \to P$ bürümüne sahiptir. O zaman $g = \gamma\beta$ olacak şekilde $\gamma : P \to F$ homomorfizması vardır. Böylece $\alpha f = hg = (h\gamma)\beta$ ve buradan $Ker(\beta) \subseteq Ker(f)$ dir. $s \in S$ için $\Psi(\beta(s)) = f(s)$ ile tanımlı $\Psi : P \to N$ tanımlansın. O zaman Ψ iyi tanımlı bir homomorfizmadır ve $f = \Psi\beta$ dır. Bu f'nin P projektif modül yardımıyla çarpanlarına ayrıldığı anlamına gelir. Sonuç olarak Lemma 3.7 yardımıyla N zayıf düzenli-düzdür. ■

3.4 Zayıf Yalnız-İnjektif ve Zayıf C-Düz Modüller

M bir sağ R-modül olsun. Her devirli K sağ R-modülü için $\mathrm{Hom}(K, N) \to \mathrm{Hom}(K, M)$ indirgenmiş dönüşümü örten ise bir M sağ R-modülü C-düz olarak adlandırılır (bkz. (Moradzadeh ve diğerleri, 2019)). Projektif modüller C-düzdür ve (Alagöz, 2021) yardımıyla C-düz modüller zayıf-düz ve düzenli-düz modüllerdir. Her sonlu üretilmiş serbest F sol R-modülünün her devirli K alt modülü için $\mathrm{Ext}^1_R(F/K, M) = 0$ ise M sol R-modülünün yalnız-injektif olarak adlandırıldığı bilinmektedir (bkz. (Liu, 1995)). Denk olarak, her devirli C sağ R-modül ve her $M \to N$ monomorfizması için $C \otimes M \to C \otimes N$ monik ise M yalnız-injektiftir (bkz. (Crivei, 2014, Önerme 2.2)). Her sonlu üretilmiş serbest F sağ R-modülünün her devirli K alt modülü için $Tor^1_R(M, F/K) = 0$ ise M sağ R-modülü yalnız-düz olarak adlandırılır (Liu, 1995).

Tanım 3.23. (1) Bir M sol modül alınsın. Herhangi bir $M \to N$ monomorfizması ve herhangi bir asal sağ C ideali için $C \otimes M \to C \otimes N$ monik ise sol M modülü zayıf yalnız-injektif olarak adlandırılır.

(2) Bir M sağ modül alınsın. Herhangi bir $Y \to M$ epimorfizması ve herhangi bir asal sağ C ideali için $\mathrm{Hom}(C, Y) \to \mathrm{Hom}(C, M)$ örten ise sağ M modülü zayıf C-düz olarak adlandırılır.

Örnek 3.24. (a) Projektif⇒C-düz⇒Zayıf C-düz olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte tersi genelde doğru değildir. Örneğin, bir k cismi üzerinde X, Y değişkenleriyle bir polinom halkası $R = k[X, Y]$ olsun. Burada R'nin (X, Y) ideali burulmasızdır. Böylece R değişmeli bir tamlık bölgesi olduğundan (X, Y) ideali C-düzdür. Fakat (Anderson ve Fuller, 1974, Bölüm I, Alıştırma 2.3) yardımıyla R-modül olarak düz değildir. Dolayısıyla projektif de değildir. Öte yandan R halkası sağ CF halkası olmayan sağ PP-halka (örneğin, $R = \mathbb{Z}$) ise Önerme 2.14 yardımıyla her sağ R-modül zayıf C-düzdür. Bununla birlikte, Önerme 2.19 yardımıyla C-düz olmayan bir zayıf C-düz modül vardır.

(b) Her asal sağ idealin sonlu sunumlu olduğu durumda R halkası bir sağ P-uyumlu halka olarak adlandırılır. Bu durumda her düz sağ modül zayıf C-düzdür.

(c) Her yalnız-injektif sol R-modül zayıf yalnız-injektiftir. Bununla birlikte, tersi genelde doğru değildir. Örneğin, R halkası sağ P-uyumlu halka ve sağ CF olmayan sol FC-halka (örneğin, $R = \mathbb{Z}$) ise Sonuç 3.3 yardımıyla her sağ R-modül zayıf yalnız-injektiftir. Bununla birlikte, Önerme 2.19 yardımıyla yalnız-injektif olmayan zayıf yalnız-injektif-modül vardır.

Bir R halkasının her asal sağ ideali sonlu sunumlu ise R halkası sağ P-uyumlu olarak adlandırılır (bkz. (Holm ve Jorgensen, 2008)). Her asal sol ideal düz (sırasıyla projektif) ise R halkası sol FP (sırasıyla PP) olarak adlandırılır (bkz. (Faith, 1976) ve (Holm ve Jorgensen, 2008)). Aşağıdakiler tanım aracılığıyla açıktır.

Sonuç 3.25. *R bir sol FP halkadır ancak ve ancak her sol R-modül zayıf yalnız-injektiftir.*

Her sağ R-modülün zayıf C-düz olduğu halkalar ele alınsın.

Önerme 3.26. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) Her sağ modül zayıf C-düzdür.

(2) Her sonlu üretilmiş sağ modül zayıf C-düzdür.

(3) Her devirli sağ modül zayıf C-düzdür.

(4) R sağ PP halkadır.

İspat. (1)⇒(2)⇒(3) Açıktır.

(3)⇒(4) C, R'nin asal sağ ideali ve $f : R \to C$ bir epimorfizma olsun. (3) yardımıyla C zayıf C-düzdür. Böylece $1_C : C \to C$ birim homomorfizma olmak üzere $fg = 1_C$ olacak şekilde bir $g : C \to R$ homomorfizması vardır. Sonuç olarak f parçalanan ve böylece C projektiftir. Buradan R sağ PP halkadır.

(4)⇒(1) Açıktır. ■

M sonlu sunumlu sağ R-modül, yani, F_0 ve F_1 sonlu üretilmiş serbest modüller olmak üzere M modülü $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ serbest sunumuna sahip olsun. Bu sunuma $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ funktoru uygulanırsa $F_0^* \to F_1^*$ eş dönüşümünün eş çekirdeği $Tr(M)$ olmak üzere $0 \to M_0^* \to F_0^* \to F_1^* \to Tr(M) \to 0$ dizisi elde edilir. $Tr(M)$'nin sonlu sunumlu sol R-modül olduğuna dikkat edilmelidir. $Tr(M)$ sol R-modülü M sağ R-modülünün Auslander Bridger transpozu olarak adlandırılır. Sağ P-uyumlu halka üzerinde her asal C sağ ideali ve onun transpozu olan $Tr(C)$ sonlu sunumludurlar.

Lemma 3.27. *R bir sağ P-uyumlu halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(1) M bir zayıf yalnız-injektif sol R-modüldür ancak ve ancak her bir asal sağ C ideali için $\mathrm{Ext}^1_R(Tr(C), M) = 0$ dır.

(2) M bir zayıf C-düz sağ R-modüldür ancak ve ancak her bir asal sağ C ideali için $Tor^R_1(M, Tr(C)) = 0$ dır.

İspat. (1) $0 \to M \to E(M) \to E(M)/M \to 0$ bir tam dizi olsun. M'nin bir zayıf yalnız-injektif sol R-modül olduğu varsayılır ise R'nin herhangi bir asal sağ C ideali için $0 \to C \otimes M \to C \otimes E(M) \to C \otimes E(M)/M \to 0$ dizisi tamdır. (Rotman, 1979, Teorem 8.3) yardımıyla $\mathrm{Hom}(Tr(C), E(M)) \to \mathrm{Hom}(Tr(C), E(M)/M)$ epimorfizmatir. Bundan dolayı $\mathrm{Ext}^1_R(Tr(C), M) = 0$ dır. Tersine, her bir asal sağ C ideali için $\mathrm{Ext}^1_R(Tr(C), M) = 0$ olduğu varsayılır ise o zaman $\mathrm{Hom}(Tr(C), E(M)) \to \mathrm{Hom}(Tr(C), E(M)/M)$ epimorfizmatir. Böylece $0 \to C \otimes M \to C \otimes E(M)$ sol tamdır. Buradan M zayıf yalnız-injektiftir.

(2) P projektif modülüyle $0 \to F \to P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ bir tam dizi olsun. A'nın zayıf C-düz sağ R-modül olduğu varsayılır ise R'nin herhangi bir asal sağ C ideali için $0 \to \mathrm{Hom}(C, F) \to \mathrm{Hom}(C, P) \to \mathrm{Hom}(C, M) \to 0$ tamdır. R sağ P-uyumlu halka olduğundan C sonlu sunumludur. Böylece (Rotman, 1979, Teorem 8.3) yardımıyla $0 \to F \otimes Tr(C) \to P \otimes Tr(C)$ sol tamdır. Sonuç olarak $Tor^R_1(M, Tr(C)) = 0$ dır. Tersine, her bir asal sağ C ideali için $Tor^R_1(M, Tr(C)) = 0$ varsayılsın. Böylece $0 \to F \otimes Tr(C) \to P \otimes Tr(C)$ sol tamdır. Böylece (Rotman, 1979, Teorem 8.3) yardımıyla $0 \to \mathrm{Hom}(C, F) \to \mathrm{Hom}(C, P) \to \mathrm{Hom}(C, M) \to 0$ tekrar tamdır.

$g : C \to M$ herhangi bir homomorfizma ve $f : N \to M$ bir epimorfizma olsun. Bu $\pi\varphi = g$ olacak şekilde $\varphi : C \to P$ nin var olduğu anlamına gelir. P projektif olduğundan $f\theta = \pi$ olacak şekilde $\theta : P \to N$ homomorfizması vardır. $h = \theta\varphi$ yazılırsa h, C'den N'ye bir homomorfizma $g = \pi\varphi = f(\theta\varphi) = fh$ olur. Sonuç olarak M zayıf C-düzdür. ■

Aşağıdaki önerme sonraki ifadelerde sıklıkla kullanılacaktır.

Önerme 3.28. *R bir sağ P-uyumlu halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

(1) M bir zayıf C-düz R-modüldür ancak ve ancak M^+ bir zayıf yalnız-injektif R-modüldür.

(2) M bir zayıf yalnız-injektif sol R-modüldür ancak ve ancak M^+ bir zayıf C-düz R-modüldür.

(3) M zayıf yalnız-injektif sol R-modüldür ancak ve ancak M^{++} zayıf yalnız-injektif R-modüldür.

(4) M zayıf C-düz sağ R-modüldür ancak ve ancak M^{++} zayıf C-düz R-modüldür.

(5) Zayıf yalnız-injektif sol R-modüllerin sınıfı dik çarpımlar, saf altmodüller ve saf bölümler altında kapalıdır.

(6) Zayıf C-düz sağ R-modüllerin sınıfı dik çarpımlar, saf altmodüller ve saf bölümler altında kapalıdır.

İspat. (1) Herhangi bir asal sağ C ideali için $Tr(C)$ sonlu sunumludur. Lemma 4 ve $\mathrm{Ext}^1_R(Tr(C), M^+) \cong Tor_1(M, Tr(C))^+$ standart izomorfizma yardımıyla geri kalan kısım ispatlanır.

(2) M bir sol R-modül ve C, R'nin bir asal sağ ideali olsun. (Renault, 1964, Teorem 9.51) yardımıyla $Tor_1(M^+, Tr(C))^+ \cong \mathrm{Ext}^1_R(Tr(C), M)^+$ elde edilir. Lemma 4 yardımıyla geri kalan kısım ispatlanır.

(3) ve (4) İspat (1) ve (2) den dolayı açıktır.

(5) M bir zayıf yalnız-injektif sol R-modül ve K, M'nin saf alt modülü varsayılsın. O zaman $0 \to (M/K)^+ \to M^+ \to K^+$ tam dizisi parçalanandır. (2) yardımıyla M^+ zayıf C-düz ve böylece $(M/K)^+$ ile K^+ da zayıf C-düzdür. (2) yardımıyla K ve M/K zayıf yalnız-injektiftir. $\{A_i\}_{i \in I}$ zayıf yalnız-injektif sol R-modüllerinin bir ailesi ve C de R'nin asal sağ bir ideali olsun. Lemma 4 yardımıyla $\mathrm{Ext}^1_R(Tr(c), \prod_{i \in I} A_i) \cong \prod \mathrm{Ext}^1_R(Tr(C), A_i) = 0$ dır. Böyle Lemma4 yardımıyla $\prod_{i \in I} A_i$ zayıf yalnız-injektiftir.

(6) M bir zayıf C-düz sağ R-modül ve K, M'nin saf alt modülü varsayılsın. O zaman $0 \to (M/K)^+ \to M^+ \to K^+$ tam dizisi parçalanandır. (1) yardımıyla M^+ zayıf yalnız-injektif ve böylece $(M/K)^+$ ve K^+ da zayıf yalnız-injektiftir. Böylece (1) yar-

dımıyla K ve M/K zayıf C-düzdür. $\prod_{i\in I} A_i$ zayıf C-düz sağ R-modüllerinin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{i\in I} A_i$ zayıf C-düzdür. Böylece (4) yardımıyla $\left(\bigoplus_{i\in I} A_i\right)^{++} \cong \prod_{i\in I}(A_i^+)^+$ zayıf C-düzdür. Ancak $\prod_{i\in I} A_i$'nin bir saf alt modülü $\bigoplus_{i\in I} A_i$ olduğundan $\left(\prod_{i\in I} A_i^+\right)^+ \rightarrow \left(\bigoplus_{i\in I} A_i^+\right)^+$ parçalanan bir epimorfizmadır. Buradan $\left(\bigoplus_{i\in I} A_i^+\right)^+ \cong \prod_{i\in I} A_i^{++}$ zayıf C-düzdür. Sonuç olarak $\prod_{i\in I}(A_i)^{++}$ da $\prod_{i\in I} A_i$'nin saflığından yararlanılarak $\prod_{i\in I} A_i$ zayıf C-düzdür. ■

M ve N sağ R-modülleri için $m \in M$, $n \in N$, $g \in \mathrm{Hom}_R(N, R)$ olmak üzere $\sigma_{M,N}(m \otimes g)(n) = m(g(n))$ ile tanımlanan

$$\sigma_{M,N} : M \otimes_R \mathrm{Hom}(N, R) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M)$$

doğal bir homomorfizma vardır.

Lemma 3.29. *(Warfield, 1969, Teorem 1) M sağ R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) M zayıf C-düzdür.

(2) R'nin herhangi bir asal sağ C ideali için $\sigma_{M,C}$ bir epimorfizmadır.

(3) R'nin herhangi bir asal sağ C ideali ve herhangi bir $f : C \rightarrow M$ homomorfizması için f; sonlu üretilmiş serbest bir F modülü aracılığıyla parçalanır.

(4) P projektif modül olmak üzere bir $f : P \rightarrow M$ epimorfizması vardır. Burada R'nin herhangi bir asal sağ C ideali ve herhangi bir $g : C \rightarrow M$ homomorfizması için $g = fh$ olacak şekilde öyle bir $h : C \rightarrow P$ nin varlığı kullanılmıştır.

Lemma 3.30. *(1) Zayıf C-düz sağ R-modülerin sınıfı dik toplamlar, dik bileşenler ve genişlemeler altında kapalıdır.*

(2) Zayıf yalnız-injektif sol R-modüllerin sınıfı dik toplamlar ve dik bileşenler altında kapalıdır.

İspat. (1) (a) K ve M zayıf C-düz sağ modülleriyle oluşturulan $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M$ dizisinin tam dizi olduğu varsayılsın. C de R'nin basit bir sağ ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki tam satırlı değişmeli diyagram mevcuttur.

$$\begin{tikzcd}
 & K \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C,R) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{K,C}"] & L \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C,R) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{L,C}"] & M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(C,R) \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_{M,C}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C,K) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C,L) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_R(C,M) &
\end{tikzcd}$$

K ve M zayıf C-düz olduğundan Lemma 3.27 yardımıyla $\sigma_{K,C}$ ve $\sigma_{M,C}$; K epimorfizmalardır. Böylece (Anderson ve Fuller, 1974, Lemma 3.14) yardımıyla $\sigma_{L,C}$ bir epimorfizmadır ve bunun sonucu olarak Lemma 3.27 yardımıyla K zayıf C-düzdür.

(b) C, R'nin herhangi bir asal sağ ideali ve $\{N_i\}_{i\in I}$ zayıf C-düz R-modüllerin herhangi bir ailesi olsun. C sonlu üretildiğinden herhangi bir $f : C \to \bigoplus_{i\in I} N_i$ homomorfizması için $im(f) \subseteq \bigoplus_{j\in J} N_j$ olacak şekilde $J \subseteq I$ sonlu bir indeks kümesi vardır. Herhangi bir $c \in C$ için $g(c) = f(c)$ yardımıyla $g : C \to \bigoplus_{j\in J} N_j$ ve $h : \bigoplus_{j\in J} N_j \to \bigoplus_{i\in I} N_i$ gömme dönüşümü tanımlansın. O zaman $f = hg$ dir. (a) yardımıyla her N_i zayıf C-düz olduğundan $\bigoplus_{j\in J} N_j$ zayıf C-düzdür. Sonuç olarak sonlu üretilmiş serbest bir F sağ R-modülü, $\beta\alpha = g$ olacak şekilde $\alpha : C \to F$ ve $\beta : F \to \bigoplus_{j\in J} N_j$ vardır. Böylece $f = hg = h(\beta\alpha) = (h\beta)\alpha$ ve buradan hareketle Lemma 3.27 yardımıyla $\bigoplus_{i\in I} N_i$ zayıf C-düzdür.

(c) Tanım yardımıyla zayıf C-düz sağ R-modülünün bir dik bileşeninin zayıf C-düz olduğunu göstermek kolaydır.

(2) Tensör çarpımın özellikleri yardımıyla zayıf yalnız-injektif sol R-modüllerin sınıfının dik toplamlar ve dik bileşenler altında kapalı olduğu açıktır. ■

A sol R-modülünde her $a \in R$ için $\mathrm{Ext}^1_R(R/R_a, A) = 0$ sağlanıyorsa A modülü bölünebilir olarak adlandırılır. Bir R halkası sol R-modül olarak bölünebilir ise R halkası bölünebilir olarak adlandırılır. A sağ R-modülünde her $a \in R$ için $Tor^R_1(A, R/R_a)$ sağlanıyorsa A modülü burulmasız olarak adlandırılır. R'nin değişmeli bölge olması durumunda bölünebilir ve burulmasız tanımları çakışmaktadır.

Önerme 3.31. *Her bölünebilir sağ modül zayıf C-düzdür.*

İspat. E bölünebilir sağ R-modül ve C de R'nin asal sağ ideali olsun. $f : C \to E$ bir homomorfizma olsun. E bölünebilir olduğundan $i : C \hookrightarrow R$ olmak üzere $f = gi$

olacak şekilde $g : R \to E$ homomorfizması vardır. Ayrıca, $h : R^{(n)} \to E \to 0$ mevcuttur. R projektif olduğundan $hf = g$ olacak şekilde $f : R \to R^{(n)}$ vardır. Sonuç olarak $f = gi = hti$ ve bundan dolayı Lemma 3.27 yardımıyla E zayıf C-düzdür. ■

Uyarı 3.32. Bir R halkası için aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her burulmasız F sağ R-modülü için F^+ zayıf C-düzdür. Özel olarak, her serbest F sağ modülü için F^+ zayıf C-düzdür.

(2) R bir sağ P-uyumlu halka ise her burulmasız sol R-modül zayıf yalnız-injektiftir. Gerçekten, M burulmasız sol R-modül olsun. (Holm ve Jorgensen, 2008) yardımıyla M^+ bölünebilirdir ve sonuç olarak Önerme 2.17 yardımıyla zayıf C-düzdür. Buradan Önerme 2.15 yardımıyla M zayıf yalnız-injektiftir.

(3) Özel olarak, R bir sağ P-uyumlu halka ise (2) yardımıyla ${}_RR$ zayıf yalnız –injektiftir.

Uyarı 3.33. Her bölünebilir sağ modül zayıf C-düz olmasına rağmen her bölünebilir sağ modül C-düz olmak zorunda değildir. Örneğin, $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ alınsın. M her asal p tam sayısı için bölünebilir $\mathbb{Z}$-modüldür ama C-düz değildir. Aksi taktirde M düz (burulmasız) grup olmalıdır.

Bölünebilir sağ modüllerin ne zaman C-düz olduğu hakkında doğal bir soru akla gelmektedir. Her devirli sağ R-modül bir serbest modülün içine gömülebiliyor ise R halkası CF halka olarak adlandırılır.

Sonuç 3.34. *Her bölünebilir sağ R-modül C-düzdür ancak ve ancak R sağ CF dir.*

İspat. C devirli sağ bir R-modül ve $\lambda : C \to E(C))$ gömme homomorfizması olsun. Hipotez yardımıyla $E(C)$, C-düz olduğundan sonlu üretilmiş serbest F modülü ve $\beta\alpha = \lambda$ olacak şekilde$\alpha : C \to F$ ve $\beta : F \to E(C)$ homomorfizmaları vardır. $\beta\alpha$ monik olduğundan α monik ve sonuç olarak R sağ CF dir. Tersi ise Önerme 2.17 ve Önerme 2.19 yardımıyla gösterilebilir. ■

Örnek 2 yardımıyla zayıf C-düz (sırasıyla zayıf yalnız-injektif) R-modüllerin C-düz (sırasıyla yalnız-injektif) olmayabileceği gözlenmiştir. Tersi için aşağıdaki ifade mevcuttur.

Önerme 3.35. *Bir R halkası için aşağdıki ifadeler denktir.*

(1) R bir sağ CF halkadır.

(2) Her zayıf C-düz sağ R-modül C-düzdür.

Buna ek olarak, R bir sağ Noether halka ise yukarıdaki koşullar aşağıdaki koşullara denktir.

(3) Her zayıf yalnız-injektif sol R-modül yalnız-injektiftir.

İspat. (1)⇒(2) ve (1)⇒(3) Açıktır.

(2)⇒(1) C devirli sağ bir R-modül ve $\lambda : C \to E(C)$ gömme homomorfizması olsun. Önerme 2.17 yardımıyla $E(C)$ zayıf C-düz olduğundan (2) yardımıyla $E(C)$, C-düzdür. Böylece sonlu üretilmiş serbest F modülü ve $\beta\alpha = \lambda$ olacak şekilde $\alpha : C \to F$ ve $\beta : F \to E(C)$ homomorfizmaları vardır. $\beta\alpha$ monik olduğundan α monik ve sonuç olarak (1) elde edilir.

(2)⇒(3) M bir zayıf yalnız-injektif sağ modül olsun. R sağ P-uyumlu halka olduğundan Önerme 2.15 yardımıyla M^+ zayıf C-düz ve böylece (2) yardımıyla aynı zamanda C-düzdür. Sonuç olarak (Alagöz, 2021) yardımıyla M yalnız-injektiftir.

(3)⇒(2) İspat (2)⇒(3) ile benzer şekilde yapılır. ■

M sağ R-modül iken kendi injektif bürümünde saf ise M modülü FP-injektif olarak adlandırılır. FP-injektif modüllerin zayıf yalnız-injektif modül olduğu açıktır.

Sonuç 3.36. *Bir sağ P-uyumlu R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) Her zayıf C-düz sağ modül düzdür.

(2) Her zayıf yalnız-injektif sol modül FP-injektifir.

Bu durumda R halkası bir IF-halkadır.

İspat. (1)⇒(2) M yalnız-injektif sol R-modül olsun. Önerme 2.15 yardımıyla M^+ zayıf C-düzdür. (1) yardımıyla M^+ aynı zamanda düzdür. Böylece (Renault, 1964, Teorem 3.52) yardımıyla M^+ injektiftir. M^+ injektif modülünün bir saf alt modülü $+$ olduğundan M modülü FP-injektiftir.

(2)⇒(1) M bir zayıf C-düz sağ R-modül olsun. Önerme 2.15 yardımıyla M^+ zayıf yalnız-injektif ve böylece (2) yardımıyla aynı zamanda FP-injektiftir. M^+ nın saf injektifliği onun injektif olmasını sağlamaktadır. (Renault, 1964, Teorem 3.52) yardımıyla M düzdür.

Bu durumda Önerme 2.17 yardımıyla injektif modüller zayıf C-düz olduğundan R halkası açık bir şekilde sağ IF halkadır. ■

Aşağıdaki sonuç QF halkalar için yeni bir karakterizasyon vermektedir.

Teorem 3.37. *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(1) R halkası QF halkadır.

(2) Her zayıf C-düz sağ modül projektiftir.

(3) Her zayıf C-düz sağ modül injektiftir.

(4) Her zayıf yalnız-injektif sol R-modül projektiftir.

Buna ek olarak, R sağ P-uyumlu halka ise yukarıdaki koşullar aşağıdakilere denktir:

(5) Her zayıf yalnız-injektif sol R-modül injektiftir.

(6) R sol Noether ve her zayıf C-düz sağ modül düzdür.

İspat. (1)⇒(2) R halkası QF olduğundan R sağ CF halkadır. İspatın geri kalanı Önerme 2.19 ve (Alagöz, 2021, Önerme 7) aracılığıyla tamamlanır.

(2)⇒(1) Hipotez yardımıyla herhangi bir zayıf C-düz sağ modül C-düzdür. Böylece R sağ CF halkadır. Ayrıca her C-düz modül projektif olduğundan (Alagöz, 2021, Önerme 7) yardımıyla R halkası QF halkadır.

(1)⇒(3) M bir zayıf C-düz sağ modül olsun. O zaman (1)⇒(2) yardımıyla M projektif ve hipotez yardımıyla aynı zamanda injektiftir.

(3)⇒(1) Projektif sağ modüller zayıf C-düz olduğundan ispat açıktır.

(4)⇒(1) İnjektif sol modüller zayıf yalnız-injektif olduğundan ispat açıktır.

(1)⇒(4) M bir zayıf yalnız-injektif sol R-modül olsun. R sağ Noether olduğundan Önerme 2.15 yardımıyla M^+ zayıf C-düzdür. (1)⇒(3) ün ispatı yardımıyla M^+ injektiftir. Sonuç olarak R'nin Noether'liği yardımıyla M düzdür. R sol mükemmel halka olduğundan M projektiftir.

(1)⇒(5) M bir zayıf yalnız-injektif sol R-modül olsun. R sağ Noether olduğundan Önerme 2.15 yardımıyla M^+ zayıf C-düzdür. (1)⇒(2) in ispatı yardımıyla M^+ modülü düzdür. Sonuç olarak R Noether olduğundan (Chatnam ve Stone, 1981, Teorem 2) yardımıyla M injektiftir.

(5)⇒(1) M bir projektif sol R-modül olsun. R sağ P-uyumlu halka ve M burulmasız olduğundan Sonuç3-(3) yardımıyla M zayıf yalnız-injektiftir. (5) yardımıyla M injektiftir.

(5)⇒(6) FP-injektif sol R-modüller zayıf yalnız-injektif olduğundan (5) ve (Mao, 2007, Teorem 3] yardımıyla R sol Noether halkadır. M bir zayıf C-düz sağ R-modül olsun. R sağ P-uyumlu halka olduğundan Önerme 2.15 yardımıyla M^+ zayıf yalnız-injektiftir. (5) yardımıyla aynı zamanda injektiftir. (Renault, 1964, Teorem 3.52) yardımıyla M düzdür.

(6)⇒(5) M bir zayıf yalnız-injektif sol R-modül olsun. R sağ P-uyumlu halka olduğundan Önerme 2.15 yardımıyla M^+ zayıf C-düzdür. (6) yardımıyla aynı zamanda düzdür. R sol Noether olduğundan (Chatnam ve Stone, 1981, Teorem 2) yardımıyla M injektiftir. ■

Önerme 3.38. *R bir sağ P-uyumlu halka olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(1) Her sol R-modül epimorfizma zayıf yalnız-injektif örtüye sahiptir.

(2) Her sağ R-modül monik zayıf C-düz ön bürüme sahiptir.

(3) Her sol R-modül zayıf yalnız-injektif ön bürüme sahiptir.

(4) Her sağ R-modül zayıf C-düz örtüye sahiptir.

İspat. (1) Zayıf yalnız-injektif sol R-modüller Önerme 2.15 ve Lemma 3.29 yardımıyla dik toplamlar ve saf bölümler altında kapalıdır. Böylece her sol R-modül (Hiremath ve Gramopatdhye, 2009, Teorem 2.5) yardımıyla zayıf yalnız-injektif örtüye sahiptir. Uyarı 2.42-(3) yardımıyla Rzayıf yalnız-injektif olduğundan her projektif sol R-modül zayıf yalnız-injektif olurdu. $f : F \to M$, M sol R-modülün zayıf yalnız-injektif örtüsü ve P projektif olmak üzere $\beta : P \to M$ epimorfizma olsun. O zaman $fg = \beta$ olacak şekilde $g : P \to F$ homomorfizması vardır. Bu f'nin epimorfizma olduğu anlamına gelir.

(2) Zayıf C-düz sağ modüller Önerme 2.15 yardımıyla dik çarpımlar ve saf alt modüller altında kapalıdır. (Nicholson ve Waters, 1988, Sonuç 3.5-(C)) yardımıyla her sağ modül zayıf C-düz ön bürüme sahiptir. M herhangi bir sağ R-modül ve M'nin zayıf C-düz ön bürümü $f : M \to F$ olsun. Önerme 2.17 yarıdmıyla $E(M)$ zayıf C-düz olduğundan $i : M \to E(M)$ gömme dönüşümü olmak üzere $i = gf$ olacak şekilde bir $g : F \to E(M)$ homomorfizması vardır. Bu f'nin monik olduğu anlamına gelir.

(3) Zayıf yalnız-injektif sol R-modüller Önerme 2.15 yardımıyla dik çarpımlar ve saf alt modüller altında kapalıdır. (Nicholson ve Waters, 1988, Sonuç 3.5-(C)) yardımıyla iddia ispatlanır.

(4) Zayıf C-düz sağ R-modüller Önerme 2.15 yardımıyla saf bölümler altında ve Lemma 3.29 yardımıyla dik toplamlar altında kapalıdır. Böylece (Hiremath ve Gramopatdhye, 2009, Teorem 2.5) yardımıyla her modül zayıf C-düz örtüye sahiptir. ■

Teorem 3.39. *Bir sağ P-uyumlu R halkası için aşağdaıki ifadeler denktir.*

(1) R sağ PP halkadır.

(2) Her sağ R-modül epimorfizma zayıf C-düz bürüme sahiptir.

(3) Herhangi bir zayıf C-düz sağ R-modülün her alt modülü zayıf C-düzdür.

(4) Projektif sağ R-modülün her alt modülü zayıf C-düzdür.

(5) Her asal sağ ideal epimorfizma projektif bürüme sahiptir.

(6) Herhangi bir zayıf yalnız-injektif sol R-modülün her bölüm modülü zayıf yalnız-injektiftir.

(7) Herhangi bir injektif sol R-modülün her bölüm modülü zayıf yalnız-injektiftir.

İspat. Teorem 2.20'e benzerdir. ■

BÖLÜM 4
SONUÇLAR

Bir halkanın tüm basit sağ modülleri ile üretilen öz sınıflar ve bu sınıfların homolojik nesneleri son yıllarda bazı araştırmacılar tarafından yoğun olarak incelenmiştir (Büyükaşık ve Durğun, 2015; Büyükaşık ve Durğun, 2016; Crivei, 2014; Mermut ve Türkoğlu, 2019). Bu tez çalışmasında, bir R-halkasının basit sağ idealleri ile projektif olarak üretilen öz sınıfın eş-injektif (zayıf mutlak s-saf) ve eş-projektif (zayıf düz-saf) nesneleri incelenmiş, ve literatürde yer alan benzer homolojik nesneler ile ilişkileri ortaya çıkarılmıştır. Literatürde yer alan yarıbasit, Kasch, QF gibi halkalar bu modüller ile karakterize edilmiştir. Daha sonra, zayıf mutlak s-saf ve zayıf düz-saf modüllerin örtü ve bürüm özellikleri incelenmiş ve her basit sağ idealin örten projektif bürüme sahip olduğu halkalar karakterize edilmiştir.

Bunun yanında, bir halkanın sağ temel idealleri ile düz olarak ve projektif olarak üretilen öz sınıflar tanıtılmış ve bazı homolojik nesneleri incelenmiştir.

KAYNAKÇA

Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). *Homoloji Cebire Giriş*. Samsun.

Alagöz, Y. ve Büyükaşık, E. (2021). *On max-flat and max-cotorsion modules*. AAECC, 32, 195-215.

Alagöz, Y. (2021). *C-pure submodules and C-flat modules*. Journal of Universal Mathematics. 4(2), 222-229.

Anderson, F. W. ve Fuller, K. R. (1974). *Rings and categories of modules*. Springer-Verlag, New York.

Büyükaşık, E. ve Durğun, Y. (2015). *Absolutely s-pure modules and neat-flat modules*. Comm. Algebra, 43 (2), 384-399.

Büyükaşık, E. ve Durğun, Y. (2016). *neat-flat modules*. Comm. Algebra, 44 (1), 416-428.

Cheatham, T. J. ve Stone, D. R. (1981). *Flat and projective character modules*. Proc. Amer. Math. Soc., 81 (2), 175-177.

Clark, J., Lomp, C., Vanaja N. ve Wisbauer, R. (2006). *Lifting modules*. Frontiers in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel.

Crivei, S. (2014). *Neat and coneat submodules of modules over commutative rings*. Bull. Aust. Math. Soc. 89(2), 343-352.

Dung, N.V., Huynh, D. V., Smith, P. F. ve Wisbauer, R. (1994). *Extending modules*. Harlow. Longman Scientific-Technical.

Durğun, Y. (2014). *Homological Objects Of Proper Classes Generated By Simple Modules*. [Yayınlanmış Doktora Tezi, İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü].

Enochs, E.E. ve Jenda, O. M. G. (2000). *Relative homological algebra*. Berlin. Walter de

Gruyter.

Faith, C. (1976). *Algebra II*. Springer-Verlag, Berlin-New York. Ring theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 191.

Glaz, S. (2003). *Controlling the zero divisors of a commutative ring*. In Commutative ring theory and applications, Lecture Notes Pure Appl. Math. 231, Dekker, New York 191212.

Harada, M. (1982). *Self mini-injective rings*. Osaka J. Math. 19(2), 587-597.

Mao, L. (2007). *Min-flat modules and min-coherent rings*. Comm. Algebra, 35 (2), 635650.

Megibben C. (1970). *Absolutely pure modules*. Proc. Amer. Math. Soc., 26 (4), 561-566.

Lam, T. Y. (1999). *Lectures on modules and rings*. Springer-Verlag, New York.

Rotman, J. J. (1979). *An Introduction to Homological Algebra*, in Pure Appl.Math., Vol. 85, Academic Press, New York.

Crivei, I. (2005). *s-pure submodules*. Int. J. Math. Math. Sci. 4, 491-497.

Crivei, S. (2014). *Neat and coneat submodules of modules over commutative rings*. Bull. Aust. Math. Soc. 89 (2), 343-352.

Moradzadeh-Dehkordi A. and Shojaee ve S. H. (2019). *Singly injective modules*, J. Algebra Appl. 18(1), 1950007, 20.

Hiremath, V. A. ve Gramopadhye, S. S. (2009). *Cyclic Pure Submodules*. Int. J. Alg., 3(3), 125-135.

Holm, H. ve Jorgensen, P. (2008). *Covers, precovers, and purity*. Illinois J. Math. 52 (2), 691-703.

Mao, L. ve Ding N. (2008). *On divisible and torsionfree modules*. Comm. Algebra, 36, 708731.

Liu, Z. K. (1995). *Rings with flat left socle*. Comm. Algebra 23, 1645-1656 .

Mao L. ve Ding, N. (2010). *New characterizations of pseudo-coherent rings*. Forum Math. 22, 9931008 .

Mermut, E. ve Türkoglu, Z. (2020). *Neat submodules over commutative rings*. Comm. Algebra 48(3), 1231-1248.

Nicholson, W. K. ve Watters, J.F. (1988). *Rings with projective socle*. Proc. Amer. Math. Soc. 102, 443450.

Rada, J. ve Saorin, M. (1998). *Rings characterized by (pre)envelopes and (pre)covers of their modules*. Comm. Algebra, 26 (3), 899-912.

Renault, G. (1964). *Étude de certains anneaux a liés aux sous-modules compléments dun a-module*. C. R. Acad. Sci. Paris, 259, 4203-4205.

Rotman, J. J. (1979). *An Introduction to Homological Algebra*. in Pure Appl.Math., Vol. 85, Academic Press, New York.

Sklyarenko, E. G. (1978). *Relative Homological Algebra in Categories of Modules*. Russian Math. Surveys 33(3). 97-137. Translated from Russian from Uspehi Mat. Nauk 33(201).85-120.

Warfield Jr., R. B. (1969). *Purity and algebraic compactness for modules*. Pacific J. Math. 28, 699-719.

Zhu, Z. (2019). *Rings related to $\mathcal{S}$-projective modules*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 62(110), No. 4,439-449.

Zöschinger, H. (2013). *Schwach-Flache moduln*. Comm. Algebra, 41 (12), 4393-4407.