T.C.
YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SAF PROJEKTİF FAKİR MODÜLLER

DAMLA DEDE SİPAHİ

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. REFAİL ALİZADE

MATEMATİK BÖLÜMÜ

SAVUNMA TARİHİ: 01/07/2019

BORNOVA/İZMİR
TEMMUZ 2019

TEZ KABUL VE ONAYI

Damla DEDE SİPAHİ tarafından Doktora tezi olarak sunulan "Saf Projektif Fakir Modüller" başlıklı bu çalışma / Y.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 01/07/2019 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri: **İmza:**

Prof. Dr. Refail ALİZADE (Danışman)

Yaşar Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Yaşar Üniversitesi

Prof. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

Doç. Dr. Engin MERMUT

İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü

Dr. Öğr. Üyesi Şule Ayar ÖZBAL

Yaşar Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

SAF PROJEKTİF FAKİR MODÜLLER

DEDE SİPAHİ, Damla
Doktora Tezi, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Refail ALİZADE
Temmuz 2019, 43 Sayfa

Bu tez çalışmasında (saf-) projektif fakir modüller ve p-muhtaç modüller çalışılmıştır. Saf projektiflik bölgesi saf parçalanabilir modüllerin sınıfına karşılık gelen modüller saf-projektif fakir modüller (pp-fakir); projektiflik bölgesi yarı basit modüllerin sınıfına karşılık gelen modüller projektif fakir modüller (p-fakir); projektiflik bölgesi tüm saf parçalanabilir modüllerin sınıfı tarafından kapsanan modüller p-muhtaç modüller olarak adlandırılır. Fakir abel gruplar ve p-fakir abel grupların çakıştığı gösterilmiştir. Von Neumann regüler halka üzerinde, p-fakir modüller, pp-fakir modüller ve p-muhtaç modüllerin sınıfı aynıdır. Tüm sağ R-modülleri p-muhtaç olan halkalar tanımlanmıştır. A abel grubu p-muhtaçtır ancak ve ancak her p asal sayısı için $T_p(A) \neq 0$ olduğu gösterilmiştir. Tüm sağ R-modülleri pp-fakir olan halkalar tanımlanmıştır. Mod-R tüm modüllerin sınıfı, $\mathcal{I}$ tüm injektif modüllerin sınıfı, $\mathcal{AP}$ tüm tamamen saf modüllerin sınıfı ve $\mathcal{X}=\{X|\ Ext^1(X,A)=0 \text{ her } A\in\mathcal{AP}\}$ olsun. $\mathcal{X}$'de pp-fakir modül olacak şekilde X modülü varsa, o zaman R halkasının Noether halka ve tüm modüllerinin de $\mathcal{X}$ içinde olduğu gösterilmiştir. $\{R_i\}_{i\in I}$ tüm rasyonel grupların kümesi ile $\bigoplus_{i\in I} R_i$'nin pp-fakir abel grup olduğu ve saf-parçalanabilir pp-fakir grubun olmadığı ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: (saf-) projektif fakir modüller (kısaca pp-poor ve p-fakir modüller), (saf-) projektif fakir abel gruplar, p-muhtaç modüller, p-muhtaç abel gruplar.

ABSTRACT

PURE PROJECTIVE POOR MODULES

DEDE SİPAHİ, Damla
Phd in Department of Mathematics
Thesis Advisor: Prof. Dr. Refail ALİZADE
Temmuz 2019, 43 Pages

In this thesis, (pure-) projective poor modules and p-impecunious modules are studied. Modules with pure projectivity domain equal to the class of pure split modules are called pure-projective poor modules (pp-poor); modules whose projectivity domain is equal to the class of semisimple modules are called projective poor modules (p-poor); modules whose projectivity domain is contained in the class of all pure split modules are called p-impecunious modules. It is shown that poor abelian groups and p-poor abelian groups coincide. Over Von Neumann regular ring, class of p-poor modules, pp-poor modules and p-impecunious modules are the same. The rings over which every right R-modules is p-impecunious are described. It is shown that abelian group A is p-impecunious if and only if $T_p(A) \neq 0$ for every prime number p. The rings over which every right R-modules is pp-poor rings are described. Let Mod-R be the class of all modules, $\mathcal{I}$ be the class of all injective modules, $\mathcal{AP}$ be the class of all absolutely pure modules and $\mathcal{X}$=$\{X \mid Ext^1(X, A) = 0$ for every $A \in \mathcal{AP}\}$. It is shown that if there is a pp-poor module X from $\mathcal{X}$, then R is noetherian and all modules are in $\mathcal{X}$. It is proved that $M = \bigoplus_{i\in I} R_i$, where $\{R_i\}_{i\in I}$ is the set of all rational group is pp-poor group and there is no pp-poor group.

Keywords: (pure-) projective poor modules (shortly pp-poor and p-poor modules), (pure-) projective poor abelian groups, p-impecunious modules, p-impecunious abelian groups.

TEŞEKKÜR

İlk olarak bu tez çalışmasının belirlenme ve hazırlanma sürecinde gerekli verilerin sağlanmasında kıymetli görüşlerinden yararlandığım ve tezin biçimlenmesinde değerli katkılarını esirgemeyen, kusursuz rehberliğiyle ve öğrenciye yaklaşımıyla kendisine hayran olduğum danışmanım Sayın Prof. Dr. Refail ALİZADE'ye teşekkür ederim.

"2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs programı" ile lisansüstü eğitim hayatıma destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a büyük bir minnetle teşekkürlerimi sunarım.

Yıllarca her koşulda maddi-manevi desteğini esirgemeyen annem Ayşe DEDE; babam Mehmet Emin DEDE; kardeşlerim Zeliha, Tuğba, Gamze'ye; bana doğduğu günden bu yana hayat enerjisi veren oğlum Mustafa Ediz SİPAHİ'ye; her daim bu amaç doğrultusunda pes etmeden devam etmeme teşvik eden hayat arkadaşım, yoldaşım, eşim Yüksel SİPAHİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Damla DEDE SİPAHİ

İzmir, 2019

YEMİN METNİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Saf Projektif Fakir Modüller" adlı çalışmanın Yaşar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, tarafımdan akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Damla DEDE SİPAHİ

İzmir, 2019

İmza

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}^{(p)}$	Paydası p asal sayısının kuvvetleri olan rasyonel sayılar grubu
$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	$\mathbb{Q}^{(p)}$'nin $\mathbb{Z}$'ye göre bölüm grubu
$Mod\text{-}R$	Sağ R-modüller kategorisi
$R\text{-}Mod$	Sol R-modüller kategorisi
M_R	Sağ R-modül M
${}_RM$	Sol R-modül M
M/N	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\langle S \rangle$	S'nin ürettiği alt modül
xR	$xR = \{xr \mid r \in R\}$
$\langle a \rangle$	a elemanı tarafından üretilen devirli grup
$\mathbb{Z}_n$	n moduna göre kalan sınıflar kümesi
$o(a)$	a elemanının mertebesi

$\|A\|$	A kümesinin kardinalitesi
$Hom_R(M, N)$	M'den N'ye tüm R-modül homomorfizmalarının kümesi
1_M	M modülü / abel grubu için birim homomorfizma
$Ker(f)$	$f : M \to N$ homomorfizmasının çekirdeği
$Im(f)$	$f : M \to N$ homomorfizmasının görüntüsü ($f(M)$ kümesi)
$f^{-1}(N)$	$f : M \to N$ homomorfizmasında N'nin ters görüntüsü
$M \cong N$	M ve N izomorftur
$A \times B$	A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$R \times S$	R ve S halkalarının çarpımı
$\prod_{k \in K} M_k$	M_k modüllerinin direk çarpımı
$\bigoplus_{k \in K} M_k$	M_k modüllerinin direk toplamı
$p_n : \prod_{k \in K} M_k \longrightarrow M_n$	p_n, n. projeksiyon homomorfizması
$i_n : M_n \longrightarrow \bigoplus_{k \in K} M_k$	i_n, Gömme homomorfizması
$Hom_R(\_, M)$	M modülü ile belirlenen kontravaryant Hom funktoru
$Hom_R(M, \_)$	M modülü ile belirlenen kovaryant Hom funktoru
$Ext^n(M,)$	$T = Hom_R(M, \_)$ kovariant funktorunun sağ türev funktoru
$Ext^n(, M)$	$S = Hom_R(M, \_)$ kontravariant funktorunun sağ türev funktoru

$M \otimes_R N$	M sağ R-modül ve N sol R-modüllerinin tensör çarpımı
$M_R \otimes_R -$	M sağ R-modül ile belirlenen kovaryant tensör funktoru
$-_R \otimes_R N$	N sol R-modül ile belirlenen kovaryant tensör funktoru
$T(G)$	G abel grubunun burulma kısmı
$T_p(G)$	G abel grubunun, mertebesi sabit bir p asal sayısının kuvveti olan elemanlardan oluşan alt grubu
$B_p(G)$	G abel grubunun p-temel alt grubu

1. GİRİŞ

1.1. Giriş

Tez boyunca aksi belirtilmediği sürece grup ile Abel grup, R ile birleşmeli, birimli bir halka ve modül ile sağ R-modül kastedilecektir. R_R ve $_RR$ sırasıyla R halkasının kendi üzerinde sağ ve sol modülünü temsil etmektedir. Mod-R ve R-Mod ile sırasıyla sağ ve sol R-modüllerin sınıfı gösterilecektir. Abel gruplara, halka ve modüllere ait tez içerisinde belirtilmeyen tüm tanımlar gruplar için (Fuchs, 2015), halka ve modüller için (Lambek, 1966), (Kasch, 1982), (Wisbauer, 1991), (Anderson and Fuller, 1992), (Facchini, 1998), (Lam, 2001), (Hazewinkel et. al., 2004) kaynakları incelenebilir.

Bölüm 2 de, bir sonraki bölüm için gerekli alt yapı bilgilerine yer verilmiştir. M ve N modüller olsun. Her $f : K \to N$ monomorfizması ve her $g : K \to M$ homomorfizması verildiğinde bir $h : N \to M$ homomorfizması, $h \circ f = g$ ile bulunuyorsa M modülüne N-injektif denir. Benzer şekilde, her $f : N \to L$ epimorfizması ve her $g : M \to L$ homomorfizması verildiğinde bir $h : M \to N$ homomorfizması, $g = f \circ h$ ile bulunuyorsa M modülüne N-projektif denir. M modülü için $\mathfrak{In}^{-1}(M) = \{N \in Mod{-}R \mid M$ modülü N-injektiftir.$\}$ ile tanımlı sınıfa M'nin *injektiflik bölgesi* denir. $\mathfrak{Pr}^{-1}(M) = \{N \in Mod - R \mid M$ modülü N-projektiftir.$\}$ ile tanımlı sınıfa M'nin *projektiflik bölgesi* denir. Buradan sırasıyla injektif ve projektif modülün olası en büyük injektiflik ve projektiflik bölgesine (yani, tüm modüllerin sınıfına) eşit olduğu görülebilir. Bir modülde her alt modül bir dik toplam terimi ise o modüle yarı basit modül denir. Bu tanımlamadan dolayı M modü-lü hem L-injektif hem de L-projektiftir. Böylelikle tüm modüllerin injektiflik ve projektiflik bölgesi yarı basit modülleri içerir. (Alahmadi et al., 2010)'da injektif modüllerin tam zıttı olarak injektiflik bölgesi açısından olası en küçük injektiflik bölgesine (yani, tüm yarı basit modüllerin sınıfına) sahip modüller *fakir modüller* olarak adlandırılmıştır. Yine aynı makalede fakir modüllerin özellikleri ve bazı özel halkalar üzerinde varlığı tartışılmıştır. (Er et. al., 2011)'de ise herhangi bir halka üzerinde fakir modüllerin varlığı gösterilmiştir. Benzer bir tanımlama (Holston et. al, 2012)'de projektif modüllerin tam zıttı olarak projektiflik bölgesi açısından olası en küçük projektiflik bölgesine (yani, tüm yarı basit modüllerin sınıfına) sahip modüller *p-fakir modüller* olarak adlandırılmıştır. Yine aynı makalede herhangi bir halka için p-fakir modüllerin varlığı açıklanmıştır. (López-Permouth and Simental, 2012)'de bir R halkası ve $\mathcal{A}$ modüller sınıfı alındığında bu sınıf uygun bir M modülünün injektiflik bölgesine eşit oluyor ise o modüller sınıfına injektiflik portfolyosu (kısaca i-portfolyo) denir. Bir R halkası için tüm i-portfolyo olan sınıfların kümesi R halkasının injektiflik profili (kısaca i-profil) olarak adlandırılır. Aynı makalede, projektiflik portfolyosu (p-portfolyo) ve bir halkanın projektiflik profilinin tanımına ve her iki tanımlama için sağlanan özelliklere yer verilmiştir. Bunun yanı sıra, (Cohn, 1959)'da M bir sağ R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. $i : N \to M$ gömme dönüşümü ve 1_K, her K sol R-modülünün birim homomorfizması ile $i \otimes 1_K : N \otimes K \to M \otimes K$ doğal dönüşümü monomorfizma ise N alt modülüne M modülünün *saf alt modülü* denir. Bir M modülü için her saf alt modül M'de bir dik toplam terimi ise M modülü saf-parçalanabilir modül olarak adlandırılır. (Wisbauer, 1991)'de K ve N modüller, $f : K \to N$ monomorfizma iken $Im(f)$, N'de saf alt modül ise f'ye saf modül monomorfizması denir. $f : K \to N$ saf modül monomorfizmasına karşılık $Hom_R(f, M)$: $Hom_R(N, M) \to Hom_R(K, M)$ epimorfizma ise M modülüne N-*saf-injektif* denir. M modülü her N modülü için N-*saf-injektif* ise M modülüne *saf-injektif* denir. (Harmancı et. al., 2015)'de M sağ R-modülü için, $\mathfrak{P}\mathfrak{I}^{-1}(M) = \{N \in Mod - R \mid M$, N-saf-injektiftir.$\}$ sınıfı M'nin *saf-injektiflik bölgesi* olarak adlandırılır. M modülünün N-saf-injektif olduğu her N modülü saf parçalanabilir ise M modülüne *saf-injektivel fakir* (kısaca *pi-fakir modül*) denir. Yani, pi-fakir modüller, minimal saf-injektiflik bölgesi saf-parçalanabilir modüllerin sınıfına karşılık gelen modüllerdir. Ek olarak, (Alizade and Büyükaşık, 2017)'de grupların fakir olmasına ilişkin bir karakterizasyona ve pi-fakir grupların varlığına yer verilmiştir. Bir G grubu ($\mathbb{Z}$-modül) fakirdir ancak ve ancak P tüm asal sayılar kümesi olmak üzere G'nin burulma kısmı $\bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_p$'ye izomorf bir dik toplam terimine sahiptir. $\{A_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ indirgenmiş üniform abel grupların (herhangi iki alt grubun kesişimi sıfırdan farklı olan gruplar) izormofizma sınıflarının temsillerinin kümesi olmak üzere $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^{\mathbb{N}}$'nın pi-fakir abel grup olduğu ve böylece pi-fakir abel grupların varlığı gösterilmiştir.

Bölüm 3'te, elde edilen tüm sonuçlara yer verilecektir. R bir halka ve M sağ R-modül olsun. M/N modülü p-fakir olacak şekilde N saf alt modülünü içeren her M modülünün kendisi de p-fakir ise R halkasına *sağ saf p-jenerik halka* denir. Her değişmeli Artin halkanın saf p-jenerik halka olduğu gösterilmiştir. Fakir grup ve p-fakir grubun çakıştığı ispatlanmıştır. M ve N modülleri için, her $g : N \to L$ saf epimorfizmasına karşılık $Hom_R(M, g)$: $Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, L)$ epimorfizma ise M modülüne N-*saf-projektif* denir. M modülü her N modülü için N-*saf-projektif* ise M modülüne *saf-projektif* denir. Bir M_R modülünün *saf-projektiflik bölgesi* $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1}(M) = \{N \in Mod - R \mid M$ modülü N-saf-projektiftir.$\}$

ile tanımlanan sınıftır. Dolayısıyla saf-projektif modüllerin olası en büyük saf-projektiflik bölgesine sahip olduğu görülebilmektedir. R bir halka ve $\mathcal{A}$, R-modüllerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A}$ sınıfı bir M modülünün saf-projektiflik bölgesine eşit oluyor ise o modüller sınıfına saf-projektiflik portfolyosu (kısaca pp-portfolyo) denir. Bir R halkası için tüm pp-portfolyo sınıflarının kümesi R halkasının saf-projektiflik profili (kısaca pp-profil) olarak adlandırılır. $R \times S$ halkasının pp-profili ile R ve S halkalarının pp-profillerinin kartezyen çarpımı arasında birebir ve sıralamayı koruyan bir dönüşümün varlığı açıklanmıştır. Bir M modülü N-saf-projektif olduğu her N modülü saf-parçalanabilir ise M modülüne *saf-projektivel fakir modül* (kısaca *pp-fakir modül*) denir. Her sağ R-modül, sonlu üretilmiş modüllerin bir dik toplamı ise R halkasına *sağ saf yarı basit halka* denir. R halkası sağ saf yarı basit halka ise her modülün pp-fakir olduğu ve buna denk ifadeler elde edilmiştir. $\mathcal{I}$ tüm injektif modüllerin sınıfı, $\mathcal{AP}$ tüm tamamen saf modüllerin sınıfı ve $\mathcal{X}$=$\{X \in Mod-R \mid$ her $A \in \mathcal{AP}$ için $Ext^1(X,A)=0\}$ olsun. $\mathcal{X}$'de pp-fakir modül olacak şekilde X modülü varsa, o zaman R halkasının sağ Noether halka ve tüm modüllerinin de $\mathcal{X}$ içinde olduğu ve buna denk olarak tüm injektif modüllerin sınıfıyla tüm tamamen saf modüllerinin sınıfının çakıştığı gösterilmiştir. Ek olarak, $\{R_i\}_{i\in I}$ tüm rasyonel grupların kümesi ile $\bigoplus_{i\in I} R_i$'nin pp-fakir abel grup olduğu gösterilmiştir. Saf-parçalanabilir pp-fakir grubununun varlığının mevcut olmadığı da ispatlanmıştır. M'nin $\mathfrak{Pr}^{-1}(M)$ projektiflik bölgesi tüm saf-parçalanabilir modüllerin sınıfı tarafından kapsanıyorsa M modülüne *p-muhtaç* denir. Von Neumann regüler halka üzerinde p-fakir modüller, pp-fakir modüller ve p-muhtaç modüllerin sınıfının aynı olduğu gösterilmiştir. Bir A grubu p-muhtaçtır ancak ve ancak her p asal sayısı için, $T_p(A)=\{a \in G \mid$ bazı $k \in \mathbb{Z}^+$ için $p^k a = 0\} \neq 0$ ispatlanmıştır.

2. ÖN HAZIRLIKLAR

Bu bölümde grup, halka, modül tanımı verilmeyecektir. Fakat yalnızca bir sonraki bölüm için gerekli olan bilgilere değinilecektir.

Tanım 2.1 *((Kasch, 1982), Tanım 2.2.3-(2)) Sıfırdan faklı bir M modülünün alt modülleri sadece* 0 *ve kendisi ise M modülüne* basit modül *denir.*

Önerme 2.2 *((Facchini, 1998), Önerme 1.1.) R bir halka olsun. R halkası üzerindeki bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *M modülü yarı basit modüldür;*
2. *M modülü basit alt modüller ailesinin toplamıdır;*
3. *M'nin her alt modülü M'nin dik toplam terimidir.*

Sonuç 2.3 *((Kasch, 1982), Sonuç 8.2.2-(a)) R bir halka olsun. R halkası yarı basit bir halkadır ancak ve ancak her sağ ve sol R-modül yarı basittir.*

Tanım 2.4 *((Kasch, 1982), Tanım 2.2.3-(1)) Bir M modülü $x \in M$ varlığı ile $M = xR$ ise* devirli modül *olarak adlandırılır.*

Not 2.5 *((Kasch, 1982), Sayfa 24, Örnek (1)) Her M modülünün aşikar bir üreteç kümesi (her $m \in M$ elemanı $m = m.1$, $1 \in R$ formunda sonlu lineer kombinasyondur.) kendisidir. Böylece $M = \sum_{m \in M} mR$ ile ifade edilir.*

Tanım 2.6 *((Rotman, 2009), Sayfa 106, Tanım) R bir halka ve M sağ R-modül olsun. $R^m \to R^n \to M \to 0$ tam dizisi öyle bir $m, n \in \mathbb{N}$ için var ise M modülüne* sonlu gösterimli modül *denir. Burada R^m ile m defa R halkasının dik çarpımı kastedilecektir.*

Teorem 2.7 *((Kasch, 1982), Sonuç 4.4.4.) R bir halka olsun. Her M_R modülü, serbest (tabana sahip) sağ R-modülün epimorfik görüntüsüdür.*

Tanım 2.8 *((Anderson and Fuller, 1992), Sayfa 72) M bir modül ve N, M'nin bir alt modülü olsun. M'nin sıfırdan farklı her L alt modülü için $N \cap L = 0$ olması $L = 0$ gerektiriyor ise N'ye M'nin* büyük alt modülü *denir.*

Tanım 2.9 *((Anderson and Fuller, 1992), Sayfa 73) $f : M \to N$ bir monomorfizma olsun. $Im(f)$ alt modülü N'de büyük alt modül ise f'ye* büyük monomorfizma *denir.*

Modüllerde kesişimin toplam üzerine dağılması genelde geçerli değildir. Aşağıda bu dağılmanın gerçeklenmesi için gereken koşula yer verilmiştir.

Lemma 2.10 *((Kasch, 1982), Lemma 2.3.15.) (Modüler Yasa) Bir M modülünün $B \subseteq C$ ile A, B ve C alt modülleri olsun.*

$$(A+B)\cap C = (A\cap C)+(B\cap C) = (A\cap C)+B$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem 2.11 *((Kasch, 1982), Teorem 3.4.7.) (Çarpan Teoremi) A, B ve C birer modül olsun. $\alpha : A \to B$ bir homomorfizma ve $\varphi : A \to C$, $Ker(\varphi) \subseteq Ker(\alpha)$ ile bir epimorfizma olsun. O halde bir $\lambda : C \to B$ homomorfizması*

1. *$\alpha = \lambda\varphi$.*
2. *$Im(\lambda) = Im(\alpha)$.*
3. *λ bir monomorfizmadır ancak ve ancak $Ker(\varphi) = Ker(\alpha)$ dır.*

koşullarını sağlayacak şekilde vardır.

Tanım 2.12 *((Kasch, 1982), Tanım 4.7.1.) $\alpha : A \to B$ ve $\varphi : A \to M$ homomorfizmalar aynı özellikte olmak kaydıyla*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\psi"'] & N \end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı verildiğinde $\varphi' : Y \to M$, $\alpha' : Y \to B$ ve $\psi\varphi' = \beta\alpha'$ sağlayan her (φ', α') çifti için $\varphi' = \varphi\tau$, $\alpha' = \alpha\tau$ ile tam bir adet $\tau : Y \to A$ var ise (φ, α) çiftine (ψ, β)'nın geri çekilimi *denir.*

Lemma 2.13 *((Wisbauer, 1991), Lemma 7.16-(4)) (Homotopi Lemma) R-modüllerin tam satırlı ve değişmeli diyagramında*

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] \arrow[dl, dashed, "\beta"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_3"] \arrow[dl, dashed, "\alpha"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

aşağıdaki ifadeler denktir.

1. *$g_2\alpha = \varphi_3$ ile $\alpha : M_3 \to N_2$ vardır;*

2. *$\beta f_1 = \varphi_1$ ile $\beta : M_2 \to N_1$ vardır.*

Tanım 2.14 *((Wisbauer, 1991), Sayfa 39, Bölüm 6.4.) M ve N birer R-modül olsun. M'den N'ye tüm R-modül homomorfizmaların kümesi $Hom_R(M, N)$ ile gösterilsin. Bu küme bir abel gruptur ve* homomorfizmalar grubu *olarak adlandırılır.*

Funktorlar ((Kasch, 1982), Bölüm 1.3.)'de belirtildiği üzere iki kategori arasında bir yapı koruyucu işlemdir. Aşağıda $Hom_R(M, N)$'den yola çıkarak elde edilen funktorlar verilecektir.

Teorem 2.15 *((Anderson and Fuller, 1992), Teorem 16.1.) A ve B, R-modül olsun.*

1. *$f : A \to B$ homomorfizmasına $Hom_R(M, f) : Hom_R(M, A) \to Hom_R(M, B)$ fonksiyonunu karşılık getiren funktor M modülü ile belirlenen* kovaryant Hom funktor *olarak adlandırılır ve $Hom_R(M, \_)$ ile gösterilir. $Hom_R(M, \_)$ soldan tam kovaryant funktordur.*

2. *$f : A \to B$ homomorfizmasına $Hom_R(f, M) : Hom_R(B, M) \to Hom_R(A, M)$ fonksiyonunu karşılık getiren funktor M modülü ile belirlenen* kontravaryant Hom funktor *olarak adlandırılır ve $Hom_R(\_, M)$ ile gösterilir. $Hom_R(\_, M)$ soldan tam kontravaryant funktordur.*

Aşağıda bir sonraki bölümde kullanılacağı için birbirinden farklı Ext ifadelerine yer verilmiştir. İlk tanımlama grup yapısı ile ilgilenirken diğeri türev funktoru olarak adlandırılan kullanımını ele almıştır.

Tanım 2.16 *((Maclane, 1963), Sayfa 64) A ve C sabitlenmiş iki R-modül olsun. Bir $0 \to A \to B \to C \to 0$ tam dizisi A modülünün C ile genişlemesi olarak adlandırılır. A modülünün C ile genişlemesi olan tam dizilerin oluşturduğu küme denklik sınıfıdır. $Ext^1(C, A)$ ile gösterilir.*

Teorem 2.17 *((Hazewinkel et. al., 2004), Teorem 6.4.4.) A, B ve C birer modülleri için $0 \to A \to B \to C \to 0$ kısa tam dizi ise $0 \to Hom_R(K, A) \to Hom_R(K, B) \to Hom_R(K, C) \to Ext^1(K, A) \cdots \to Ext^n(K, A) \to Ext^1(K, B) \to Ext^n(K, C) \to Ext^{n+1}(K, A) \ldots$ uzun tam dizi vardır.*

Tanım 2.18 ((*Azumaya et al., 1957), Tanım 1.1.*) *Tam satırlı bir dizi ile R-modüllerin dönüşümlerinin*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı verildiğinde bir $h : N \to M$, $h \circ f = g$ *ile var ise* M *modülüne* N*-injektif denir. Benzer şekilde, tam satırlı bir dizi ile R-modüllerin dönüşümlerinin*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "g"] & \\ N \arrow[r, "f"'] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı verildiğinde bir $h : M \to N$, $g = f \circ h$ *ile var ise* M *modülüne* N*-projektif denir.*

Tanım 2.19 ((*Anderson and Fuller, 1992), Sayfa 186*) *Bir* M *modülü için* $\mathfrak{In}^{-1}(M) = \{N \in Mod - R \mid M$ *modülü* N*-injektiftir.*$\}$ *ile tanımlı sınıfa* M*'nin* injektiflik bölgesi *denir. Benzer şekilde,* $\mathfrak{Pr}^{-1}(M) = \{N \in Mod - R \mid M$ *modülü* N*-projektiftir.*$\}$ *ile tanımlı sınıfa* M*'nin* projektiflik bölgesi *denir.*

Önerme 2.20 ((*Azumaya et. al., 1957), Önerme 2.3.*) M *modülü* N*-injektiftir ancak ve ancak* M *modülü her* $n \in N$ *ile* nR*-injektiftir.*

Tanım 2.21 ((*Kasch, 1982), Teorem 5.3.1-(a)-(2)*) *Her* $f : M \to N$ *monomorfizması ve her* $g : M \to I$ *homomorfizması için bir* $h : N \to I$, $h \circ f = g$ *ile var ise* I *modülü* injektif modül *olarak adlandırılır.*

Tanım 2.22 ((*Anderson and Fuller, 1992), Sayfa 207*) I *injektif modül ve* $f : M \to I$ *büyük monomorfizma ise* (I, f) *ikilisine* M *modülünün* injektif bürümü *denir.*

Tanım 2.23 ((*Kasch, 1982), Teorem 5.3.1-(b)-(2)*) *Her* $f : N \to L$ *epimorfizması ve her* $g : P \to L$ *homomorfizması için bir* $h : P \to N$, $g = f \circ h$ *ile var ise* P *modülü* projektif modül *olarak adlandırılır.*

Teorem 2.24 ((*Kasch, 1982), Teorem 5.5.3.*) *Her modül için, o modülden injektif modülün içine bir monomorfizma vardır.*

Teorem 2.25 ((*Kasch, 1982), Teorem 5.4.1.*) *Bir* M *modülü projektiftir ancak ve ancak* M *modülü bir serbest modülün dik toplam terimine izomorftur.*

Not 2.26 *Teorem 2.25 dan yola çıkarak her serbest modülün projektif olduğu görülmektedir. Teorem 2.7 yardımıyla her modül için, bir projektif modülden o modülün içine bir epimorfizma mevcuttur.*

Önerme 2.27 $\big($*(Hazewinkel et. al., 2004), Önerme 6.4.10.*$\big)$ *R bir halka ve A bir R-modül olsun. B modülü injektiftir ancak ve ancak her A için $Ext^1(A, B) = 0$ dır.*

Önerme 2.28 $\big($*(Hazewinkel et. al., 2004), Önerme 6.4.9.*$\big)$ *R bir halka ve B bir R-modül olsun. A modülü projektiftir ancak ve ancak her B için $Ext^1(A, B) = 0$ dır.*

Aşağıda bir R halkasının sağ yarı basit halka olmasına denk koşullar verilecektir.

Teorem 2.29 $\big($*(Facchini, 1998), Teorem 1.2.*$\big)$ *R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *R halkası sağ yarı basit halkadır;*
2. *Her sağ R-modül yarı basit modüldür;*
3. *Her sağ R-modül injektiftir;*
4. *Her sağ R-modül projektiftir.*

Tanım 2.30 $\big($*(Hazewinkel, 2004), Sayfa 102, Bölüm 4.7.*$\big)$ *S bir kısmi sıralı küme olsun. Herhangi bir $a, b \in S$ çifti için bir $c \in S$ elemanı $a \leq c$ ve $b \leq c$ ile var ise S'ye* yönlendirilmiş kısmi sıralı küme *denir. I yönlendirilmiş kısmi sıralı bir küme ve $\{M_i \,|\, i \in I\}$, R-modüllerin kümesi olsun. Herhangi bir $i \leq j$ ile $i, j \in I$ indeks çifti için $\varphi_{ij} : M_i \to M_j$, $i \leq j \leq k$ ve $n \in I$ verildiğinde*

1. *$\varphi_{nn} : M_n \to M_n$, M_n üzerinde birim dönüşümdür.*
2. *$\varphi_{ik} = \varphi_{jk}\varphi_{ij}$ dir. Yani, aşağıdaki diyagram değişmelidir.*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\varphi_{ik}"'] & & M_j \arrow[dl, "\varphi_{jk}"] \\ & M_k & \end{tikzcd}$$

özelliklerinin gerçeklendiği varsayılsın. $\mathbf{M} = \big\{\{I, \leq\}\,;\, \{M_i \,|\, i \in I\}; \{\varphi_{ij} \,|\, i \leq j;\, i, j \in I\}\big\}$ *üçlüsüne sağ R-modüllerin yönlendirilmiş sistemi denir.*

Tanım 2.31 $\big($*(Hazewinkel, 2004), Sayfa 102, Bölüm 4.7.*$\big)$ M *yönlendirilmiş bir sistem iken* $M_i \in \mathbf{M}$ *ile* $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ *olsun.* N, $i \leq j$ *için tüm* $m_i - \varphi_{ij} m_i$ *elemanları tarafından üretilen alt modül olarak ele alındığında* M/N *bölüm modülü* M yönlendirilmiş sisteminin direk limiti *(injektif limiti) olarak adlandırılır.*

İnjektiflik bölgesi incelendiği zaman *injektif modüller*, olası en büyük injektiflik bölgesine sahip modüllerdir. N yarı basit modül ise her M modülü için M, N-injektif ve N-projektiftir. Dolayısıyla $\mathfrak{In}^{-1}(M)$ ve $\mathfrak{Pr}^{-1}(M)$ tüm yarı basit modüllerin sınıfını içerir. Aşağıda kapsamanın tersinin gerçeklendiği durum, injektif modüllerin tam zıttı olarak tanımlanacaktır.

Tanım 2.32 $\big($*(Alahmadi et al., 2010), Giriş Bölümü*$\big)$ *Bir M modülünün N-injektif olduğu her N modülü için N yarı basit ise M modülüne* fakir modül *denir.*

İnjektiflik bölgesi yarı basit olan modüllerin sınıfına karşılık gelerek olası en küçük injektiflik bölgesine sahip modüller olan *fakir modüller* (Alahmadi et al., 2010)'da tanıtılmış ve sonra (Er et al., 2011)'de çalışılmıştır. Devamında fakir abel gruplar kavramı araştırılmış ve (Alizade and Büyükaşık, 2015)'de bir karakterizasyon elde edilmiştir.

Uyarı 2.33 $\big($*(Alizade and Büyükaşık, 2015), Teorem 3.1.*$\big)$ *Bir G grubu ($\mathbb{Z}$-modül) fakirdir ancak ve ancak P tüm asal sayılar kümesi olmak üzere G'nin burulma kısmı $\bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_p$'ye izomorf bir dik toplam terimine sahiptir.*

Tanım 2.34 $\big($*(Holston et al., 2012), Giriş Bölümü*$\big)$ *Bir M modülünün N-projektif olduğu her N modülü için N yarı basit ise M modülüne* projektivel fakir *ya da kısaca* p-fakir modül *denir.*

Benzer şekilde, projektiflik bölgesi incelendiği zaman *projektif modüller* olası en büyük projektiflik bölgesine sahip modüllerdir. Projektiflik bölgesi yarı basit olan modüllerin sınıfına karşılık gelerek olası en küçük projektiflik bölgesine sahip modüller olan *p-fakir modüller* (Holston et al., 2012) ve (Lopéz-Permouth and Simental, 2012)'de tanımlanmış ve çalışılmıştır.

Önerme 2.35 $\big($*(Holston et al., 2012), Önerme 2.5.*$\big)$ *Her halka bir p-fakir modüle sahiptir.*

Aşağıdaki karakterizayonda bir modülün sırasıyla fakir (p-fakir) olarak belirlenmesinde devirli alt modüllere göre injektiflik (projektiflik) bölgesinin incelenmesinin yeterli olduğu ifade edilmiştir.

Not 2.36 $\big($*(Alahmadi et al., 2010), Giriş Bölümü*$\big)$ *ve* $\big($*(Holston et al., 2012), Giriş Bölümü*$\big)$ *Bir M modülü sırasıyla fakirdir (p-fakirdir) ancak ve ancak M'nin xR-injektif* $\big($*xR-projektif*$\big)$ *olduğu her devirli xR modülü yarı basittir.*

Tanım 2.37 $\big($*(Kasch, 1982), Sayfa 242*$\big)$ *R bir halka ve M_R, ${}_RN$ modül olsun. M ve N'nin kartezyen çarpım kümesini ($M \times N$) taban olarak kabul eden serbest $\mathbb{Z}$-modül* $\big($*yani, serbest abel grup*$\big)$

$$F = \left\{ \sum_{i \in I} t_i(m_i, n_i) \mid t_i \in \mathbb{Z}, m_i \in M, n_i \in N \right\}$$

olsun. F serbest Abel grubunun

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = \{(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) \mid m_1, m_2 \in M; n \in N\} \\ D_2 = \{(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2) \mid m \in M; n_1, n_2 \in N\} \\ D_3 = \{(mr, n) - (m, rn) \mid m \in M; n \in N, r \in R\} \end{array}\right\}$$

ile $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ kümesi tarafından üretilen alt grubu E olsun. F/E bölüm grubuna M_R ve ${}_RN$ modüllerinin tensör çarpımı *denir. F/E grubu $M \otimes N$ ile gösterilir.*

Tensör çarpım yardımıyla tanımlı $M_R \otimes {}_R-$ ve $-_R \otimes {}_RN$ funktorları sağdan tam kovaryant funktorlardır. Aşağıda tanımı verilen ifade funktorların soldan tam olduğu durumu ele almaktadır ve *Cohn'a ait saflık* olarak adlandırılır.

Tanım 2.38 $\big($*(Cohn, 1959), Giriş Bölümü*$\big)$ *M bir sağ R-modül ve N, M'nin alt modülü olsun. Her K sol R-modülü için $0 \to N \otimes K \to M \otimes K$ tam dizi ise N alt modülüne M'nin* saf alt modülü *denir.*

Tanım 2.39 $\big($*(Maddox, 1967), Giriş Bölümü*$\big)$ *Bir M modülü, kendisini alt modül olarak içeren her modülün saf alt modülü ise M modülü* tamamen saf modül *olarak adlandırılır.*

Lemma 2.40 $\big($*(Maddox, 1967), Lemma 3*$\big)$ *M injektif bir sağ R-modül ise M modülü tamamen saf bir sağ R-modüldür.*

Lemma 2.41 $\big($*(Maddox, 1967), Lemma 4*$\big)$ *M', tamamen saf bir sağ R-modül olan M'nin saf bir alt modülü ise M' modülü tamamen saf bir sağ R-modüldür.*

Von Neumann regüler halka tanımı verilmeyecektir. Fakat aşağıda Von Neumann regüler halka için bir karakterizasyona yer verilecektir.

Not 2.42 ((*Wisbauer, 1991*), *37.6.*) *Bir R halkası Von Neumann regüler halkadır ancak ve ancak her sağ R-modül tamamen saftır.*

Tanım 2.43 ((*Rotman, 2009*), *Sayfa 146, Bölüm 3.3.1., Tanım*) *Sağ R-modüllerin bir tam dizisi*

$$\xi : 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

olsun. Her K sol R-modül için

$$0 \longrightarrow A \otimes K \xrightarrow{f \otimes 1_K} B \otimes K \longrightarrow C \otimes K \longrightarrow 0$$

dizinin tamlığı mevcut ise ξ dizisine saf tam dizi *denir. ξ dizisinde $f(A) \subseteq B$ alt modülü saf alt modüldür.*

Tanım 2.44 ((*Wisbauer, 1991*), *Sayfa 275, Tanım 33.1.*) *Bir*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

tam dizi için $Imf = Ker(g)$, N'nin saf alt modülü ise f bir saf modül monomorfizması *ve g bir* saf modül epimorfizması *olarak adlandırılır.*

Önerme 2.2 ile bir M modülünün her alt modülü M'de dik toplam terimi ise M modülünün yarı basit modül olduğu verilmişti. Aşağıda saf yarı basit modül (kısaca saf-parçalanabilir modül) tanımı verilecektir.

Tanım 2.45 ((*Azumaya and Facchini, 1989*), *Giriş bölümü*) *Bir M sağ R-modülün her saf alt modülü M'de dik toplam terimi ise M'ye saf parçalanabilir denir.*

Tanım 2.46 ((*Wisbauer, 1991*), *Sayfa 278*) *Her*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

saf tam dizi için $Hom_R(f, M) : Hom_R(N, M) \to Hom_R(K, M) \to 0$ tam ise M modülüne N-saf-injektif, *$Hom_R(M, g) : Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, L) \to 0$ tam ise M modülüne* N-saf-projektif *denir. M, her N modülü için sırasıyla* N-saf-injektif *(*N-saf-projektif*) ise M modülüne* saf-injektif *(*saf-projektif*) denir.*

Tanım 2.47 ((*Harmancı et al., 2015*), *Tanım 2.1. ve Tanım 4.1.*) *Bir M sağ R-modülün* saf-injektiflik bölgesi

$$\mathfrak{PI}^{-1}(M) = \{N \in Mod-R \mid M, N\text{-saf-injektiftir.}\}$$

ile tanımlıdır. Bir M modülünün N-saf-injektif olduğu her N modülü için N saf parçalanabilir ise M modülüne saf-injektivel fakir *(kısaca* pi-fakir modül*) denir. Yani pi-fakir modüller, saf-injektiflik bölgesi saf-parçalanabilir modüllerin sınıfına karşılık gelerek minimal saf-injektiflik bölgesine sahip modüllerdir.*

Not 2.48 *((Fuchs and Hauptfleisch, 1973), Lemma1) Tüm sonlu gösterimli modüller saf-projektiftir.*

Modüllerde pi-fakir yapısına karşılık gruplar için pi-fakir yapısı incelenmiş ve ((Alizade and Büyükaşık, 2015), Bölüm 4)'de pi-fakir abel grupların varlığı kanıtlanmıştır.

Tanım 2.49 *((Harmancı et al., 2015), Giriş bölümü) Her sağ R-modül, sonlu üretilmiş modüllerin bir dik toplamı ise bir R halkasına* sağ saf yarı basit halka *denir.*

Aşağıda saf yarı basit halkalar için denk koşullar gösterilecektir.

Uyarı 2.50 *((Fieldhouse, 1969), Teorem 10.1.) ve ((Azumaya and Facchini, 1989), Önerme 5) Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *R halkası sağ saf yarı basit bir halkadır;*
2. *Her sağ R-modül saf-parçalanabilirdir;*
3. *Her sağ R-modül saf-projektiftir;*
4. *Her sağ R-modül saf-injektiftir.*

Tanım 2.51 *((Anderson and Fuller, 1992), Sayfa 127) M bir modül olsun. M'nin herhangi bir alt modüller ailesi $\{M_i \mid i \in I\}$, her $M_{i_1} \subsetneq M_{i_2} \subsetneq \dots$ artan zinciri için bir $n \in \mathbb{N}$, $M_{i_n} = M_{i_{n+1}} = \dots$ ile mevcutsa M modülüne Noether modül denir. R halkası kendi üzerinde sağ (sol) modül olarak Noether ise R halkasına sağ (sol) Noether halka denir.*

Tanım 2.52 *((Anderson and Fuller, 1992), Sayfa 127) M bir modül olsun. M'nin herhangi bir alt modüller ailesi $\{M_i \mid i \in I\}$, her $M_{i_1} \supsetneq M_{i_2} \supsetneq \dots$ azalan zinciri için bir $n \in \mathbb{N}$, $M_{i_n} = M_{i_{n+1}} = \dots$ ile mevcutsa M modülüne Artin modül denir. R halkası kendi üzerinde sağ (sol) modül olarak Artin ise R halkasına sağ (sol) Artin halka denir.*

Önerme 2.53 *((Anderson and Fuller, 1992), Sayfa 128) Sağ R-modüllerin*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

tam dizisi olsun. M modülü Noetherdir (Artindir) ancak ve ancak K ve N modülleri Noetherdir. (Artindir.)

Teorem 2.54 ((Lam, 2001), Sayfa 21) *Sağ (sol) Artin halka her zaman sağ (sol) Noether halkadır.*

Artin ise Noether olma özelliği halkalarda tek yöne bağlı kalmak şartıyla doğrudur. Fakat modüller için bu geçerli değildir.

Önerme 2.55 ((Lam, 2001), Önerme 1.21.) *Sağ Artin (Noether) halka üzerinde M sonlu üretilmiş bir sağ modül ise M modülü Artin (Noether) modüldür.*

Teorem 2.56 ((Megibben, 1970), Teorem 3) *Bir R halkası sağ Noether halkadır ancak ve ancak tamamen saf olan her sağ R-modül injektiftir.*

Önerme 2.57 ((Melkersson, 1995), Sonuç 4.2.) *Noether bir halka üzerinde herhangi bir Artin modül saf-injektiftir.*

Bölümün geri kalan kısmında saf alt modül kavramına karşılık saf alt grup kavramı ve kullanılacak diğer temel grup özelliklerine değinilecektir.

G bir grup olsun. G grubunun büyüklüğünü göstermeye yarayan $|G|$ kardinalitesine G grubunun *mertebesi* denir. G bir grup ve H, G'nin alt grubu olsun. Sıfırdan farklı her grubunun mertebesi sonlu bir sayı ise G grubuna *sonlu grup* denir. G grubunun her elemanının mertebesi sonlu ise G grubuna *burulma grubu* denir. G grubunun sıfırdan farklı her elemanının mertebesi sonsuz ise G grubuna *burulmasız grup* denir. Bir G grubunun sonlu mertebeli elemanlarının oluşturduğu küme alt grup olur ve $T(G)$ ile gösterilir. $T(G)$ alt grubu G'nin *burulma kısmı* olarak adlandırılır. Mertebesi bir sabit p asal sayısının kuvveti olan elemanlardan oluşan $T_p(G) = \{a \in G \,|\, \text{bazı } k \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } p^k a = 0\}$ kümesi de G'nin bir alt grubudur. $T_p(G)$ alt grubuna G grubunun *p-primar bileşeni* denir. Her G grubu için $T(G) = \bigoplus_{p \in P} T_p(G)$ dir. $T(G) = G$ ise G grubu burulma grubuna, $T(G) = 0$ ise G grubu burulmasız gruba karşılık gelir.

Tanım 2.58 ((Fuchs, 2015), Sayfa 3) *Bir G grubunun her elemanının mertebesi sabitlenmiş bir p asal sayısının kuvvetleri ise G grubuna* p-grup *denir.*

Tanım 2.59 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 32, Örnek 6.3-(a)*) *G sıfırdan farklı bir grup için* $nG = 0$, *bazı* $n \neq 0$ *tamsayı ile sağlanıyor ise G grubu* sınırlı grup *olarak adlandırılır. Sabitlenmiş bir* n *tamsayısı için* $nG = 0$ *ise G grubu* n-*sınırlı olarak adlandırılır.*

Tanım 2.60 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 4*) *Bir G grubunun sıfırdan farklı tüm elemanlarının mertebesi karesiz ise G grubuna* yarı basit grup (veya elementer grup) *denir.*

Tanım 2.61 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 132*) *Bir G grubu için* $nG = G$, *her* n *sıfırdan farklı tamsayı ile sağlanıyor ise G* bölünebilir grup *olarak adlandırılır.*

Tanım 2.62 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 132*) *G bir grup ve* p *asal bir tamsayı olsun.* $p^m G = G$, *her* m *pozitif tamsayı ile sağlanıyor ise G grubuna* p-bölünebilir grup *denir.*

p-bölünebilir bir grubun epimorfik görüntüsü p-bölünebilirdir. G grubu için $T_p(G)$ alt grubu p-bölünebilir değildir. Ayrıca $\mathbb{Z}_p$ sıfırdan farklı p-bölünebilir alt gruplara sahip değildir.

Tanım 2.63 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 133*) *Bir G grubu* 0 *dışında hiç bir bölünebilir alt gruba sahip değil ise G grubu* indirgenmiş grup *olarak adlandırılır.*

Teorem 2.64 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 136, Teorem 2.5.*) *Her G grubu maksimal bölünebilir bir alt grup (Tüm bölünebilir alt grupları içeren alt grup) olan D ve indirgenmiş alt grup olan N ile* $G = N \oplus D$ *şeklinde yazılabilir. G'nin D alt grubu tek türlü belirlenir ve N izomorfizma altında tektir.*

Tanım 2.65 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 149, Bölüm 5*) *Bir G grubunun bir H alt grubu için* $nH = H \cap nG$, *her* n *sıfırdan farklı tamsayı ile sağlanıyor ise H alt grubuna* saf alt grup *denir.*

Bir G grubunun burulma kısmı ve p-primar bileşeni saf alt gruplardır. Bir G grubunun H alt grubunun saf alt grup olması için karakterizasyon şu şekildedir: H saf alt gruptur ancak ve ancak sıfırdan farklı her $n \in \mathbb{Z}$ için $nH = H \cap nG$ dir.

Not 2.66 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 150, Bölüm 5*) *Dik toplam terimleri saf alt gruplardır.*

Not 2.67 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 160, Teorem 3.3.*) *Saf tam dizilerin direk limitleri saf tam dizidir. Buradan hareketle, saf alt grupların direk limiti saf alt gruptur.*

Lemma 2.68 ((*Fuchs, 2015*), *Sayfa 149, Bölüm 5*) *Her G grubu A, devirli grupların dik toplamı ile*

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

bir saf tam dizi içine gömülebilir. Dolayısıyla B de devirli grupların dik toplamıdır.

Tanım 2.69 ((Fuchs, 2015), Sayfa 149) *H, bir G grubunun alt grubu ve p asal bir tamsayı olsun. $p^m H = H \cap p^m G$, her m pozitif tamsayı ile sağlanıyor ise H alt grubuna* p-saf alt grup *denir.*

Not 2.70 ((Fuchs, 2015), Sayfa 150) *Bir p-grupta saf alt grup ile p-saf alt grup kavramları denktir.*

Tanım 2.71 ((Fuchs, 2015), Sayfa 166) *G grubunun bir H alt grubu, asal bir p tamsayısı ile*

1. *H, devirli p-gruplar $\left(\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{p^{k_i}}\right)$ ve sonsuz devirli grupların $\left(\bigoplus_{j\in J} \mathbb{Z}\right)$ dik toplamıdır.*
2. *H, G'de p-saf alt gruptur.*
3. *G/H, p-bölünebilirdir.*

yukarıdaki koşulları sağlar ise H alt grubu p-temel alt grup *olarak adlandırılır. $B_p(G)$ ile gösterilir.*

p-grupların $q \neq p$ asalları ile q-temel alt grupları 0'dır. Sonuç olarak, p-grupların sadece p-temel alt grupları aşikar olmayabilir. Bu yüzden bunlar genelde *temel alt gruplar* olarak adlandırılırlar.

Lemma 2.72 1. ((Fuchs, 2015), Sayfa 167, Teorem 5.2.) *Her grup her p asalına karşılık p-temel alt grup içerir.*

2. ((Fuchs, 2015), Teorem 5.2. ve Teorem 2.5.) *Sınırlı ve saf bir alt grup bir dik toplam terimidir.*

Tanım 2.73 ((Fuchs, 2015), Sayfa 409-410) *A burulmasız bir grup ve $a \in A$ olsun. Her p asalı için $p^k \mid a$ sağlayan en büyük k tamsayısı a'nın p-yüksekliği olarak adlandırılır. $h_p(a)$ ile gösterilir. p-yüksekliklerinin $\mathfrak{X}(a) = \left(h_{p_1}(a), h_{p_2}(a), \ldots, h_{p_n}(a), \ldots\right)$ dizisi a'nın yükseklik dizisi veya karakteristiği olarak adlandırılır.*

Tanım 2.74 ((Fuchs, 2015), Sayfa 411) *$(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$ ve $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ karakteristikleri neredeyse tüm n tamsayıları için $k_n = l_n$ ve $k_n \neq l_n$ olduğu her durumda hem k_n hem de l_n sonlu ise iki karakteristik* denk *olarak adlandırılır. Karakteristiklerin denklik sınıfları* tip *olarak adlandırılır. Bir tip, denklik sınıfının herhangi bir elemanıyla temsil edilir.*

Tanım 2.75 $\big($*(Fuchs, 2015), Sayfa 411*$\big)$ *Bir A burulmasız grubunun sıfırdan farklı tüm elemanları aynı tipte ise A'ya homojen grup denir.*

Tanım 2.76 $\big($*(Fuchs, 2015), Sayfa 92-93*$\big)$ *Bir G grubunda mertebesi sadece sonsuz ve asal sayının kuvveti olarak yazılabilen elemanları içeren maksimal bağımsız sistemin kardinal sayısı G grubunun rankı $\big(rank(G)\big)$ olarak adlandırılır.*

$\mathbb{Q}$'nun (rasyonel sayılar grubunun) sıfırdan farklı alt grupları ***rasyonel gruplar*** olarak adlandırılır. Rasyonel grupların rankı 1'dir. Rankı bir olan bir grubun sıfırdan farklı tüm elemanları aynı tipe sahiptir.

Tanım 2.77 $\big($*(Fuchs, 2015), Sayfa 423*$\big)$ *Bir G burulmasız grubu rankı 1 olan grupların bir dik toplamı ise G'ye tamamıyla parçalanabilir denir. Başka bir deyişle I, indeks kümesi ve her K_i bir rasyonel gruba izomorf olmak üzere $G = \bigoplus_{i \in I} K_i$ dir.*

Önerme 2.78 $\big($*(Fuchs, 2015), Sayfa 437, Alıştırma 5 ve Alıştırma 7*$\big)$ *G, $r \geq 2$ sonlu rank ile tamamıyla parçalanabilir bir homojen grup ve karakteristikte p indisinde ∞ ile $(0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$ olsun. O zaman $G = \big(\mathbb{Q}^{(p)}\big)^r$ dır. Burada, $\mathbb{Q}^{(p)}$, paydası p asal sayısının kuvvetleri olan rasyonel sayılar grubudur.*

1. *G grubunun rankı $\leq r - 1$ olacak şekildeki her alt grubu serbesttir.*

2. *G grubunun rankı $r - 1$ olacak şekildeki her saf H alt grubu için $G/H \cong \mathbb{Q}^{(p)}$ olur.*

Uyarı 2.79 $\big($*(Fuchs, 2015), Sayfa 431, Alıştırma 8*$\big)$ *veya (Fuchs and Kertész, 1953) G, tüm saf alt grupları dik toplam terimi olan (G saf-parçalanabilir) bir burulmasız gruptur ancak ve ancak G grubunun indirgenmiş kısmı, sonlu ranka sahip tamamıyla parçalanabilir homojen bir gruptur.*

3. BULGULAR

3.1. P-Fakir Modüllerin Saf Jenerik Özelliği

Bu bölümde değişmeli bir Artin halka üzerindeki, saf alt modüle göre bölüm modülü p-fakir olan her modülün kendisininde p-fakir modül olacağı gösterilecektir.

p-fakir bir alt modülü içeren her sağ R-modülün kendisi de bir p-fakir modül ise R halkasına *sağ jenerik halka* denir. R halkası değişmeli ise *jenerik halka* olarak adlandırılır. $\mathbb{Z}$ halkası jenerik halka değildir.

Tanım 3.1 *M/N modülü p-fakir olacak şekilde saf bir N alt modülünü içeren her M sağ R-modülün kendisi de p-fakir ise R halkasına* sağ saf p-jenerik halka *denir.*

Teorem 3.2 *Her değişmeli Artin halka saf p-jenerik halkadır.*

İspat: R değişmeli bir Artin halka ve N, M/N modülü p-fakir modül olacak şekilde M'nin saf bir alt modülü olsun. Burada Not 2.36 yardımıyla M modülünün A-projektif olmasını sağlayan her devirli A modülünün yarı basit olduğunu göstermek yeterlidir. O halde devirli bir A modülü için M modülü A-projektif ve B, A modülünün alt modülü olsun. Aşağıdaki kısa tam dizi ele alınsın:

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow A/B \longrightarrow 0$$

$f : M/N \to A/B$ bir homomorfizma olsun. M, A-projektif olduğundan $g : M \to A$ homomorfizması, $\sigma_B \circ g = f \circ \sigma_N$ ile vardır. Burada $\sigma_N : M \to M/N$ ve $\sigma_B : A \to A/B$ doğal epimorfizmalardır. Böylelikle aşağıdaki tam satır ve sütunlara sahip olan değişmeli diyagram elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i_N"] \arrow[d, dashed, "h"'] & M \arrow[r, "\sigma_N"] \arrow[d, dashed, "g"] & M/N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & A \arrow[r, "\sigma_B"'] & A/B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Teorem 2.54'den R değişmeli bir Artin halka olduğundan aynı zamanda Noether bir halkadır. Ek olarak, A devirli olduğundan B sonlu üretilmiş olur ve Önerme 2.55'den yararlanılarak Artin halka üzerindeki B modülü Artin modüldür. O halde Önerme 2.57'den yararlanılarak B modülü saf-injektiftir. Buradan $w : M \to B$ homomorfizmasının, $w \circ i_N = h$ ile var olduğu açıktır. Burada N, M'nin saf alt modülü ve $i_N : N \to M$ kapsama dönüşümüdür. Böylece, Lemma

2.13 yardımıyla $x : M/N \to A$, $\sigma_B \circ x = f$ ile vardır. Sonuç olarak M/N, A-projektiftir ve kabulden M/N modülü p-fakir olduğundan A yarı basittir. ■

3.2. P-Fakir Abel Gruplar

(Holston et al., 2012)'de p-fakir modüllere ait çeşitli örnekler verilmiştir. Buna karşın bu bölümde p-fakir abel grupların tüm tanımlamaları verilecek ve Uyarı 2.33 ile verilen fakir abel grupların yapısıyla çakıştığı gösterilecektir.

Teorem 3.3 *Bir G abel grubu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *G grubu p-fakirdir;*

2. *Her p asal tam sayısı için, G grubunun bir $B_p(G)$ p-temel alt grubu , $\mathbb{Z}_p$'ye izomorf olan bir dik toplam terimine sahiptir;*

3. *Her p asal tam sayısı için, G grubu $\mathbb{Z}_p$'ye izomorf olan bir dik toplam terimine sahiptir;*

4. *G grubunun $T(G)$ burulma kısmı, $\bigoplus\limits_{p\in P}\mathbb{Z}_p$'ye izomorf olan bir dik toplam terimine sahiptir;*

5. *G grubu fakirdir.*

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2) G grubu p-fakir abel grup ve $B_p(G)$'de G grubunun p-temel alt grubu olsun. $B_p(G)$'nin $\mathbb{Z}_p$'ye izomorf olacak şekilde dik toplam teriminin olmadığını varsayalım. O halde $B_p(G) \cong (\bigoplus\limits_{i\in I}\mathbb{Z}_{p^{k_i}}) \oplus (\bigoplus\limits_{j\in J}\mathbb{Z})$, I ve J indeks kümeleri ve her $i \in I$ için $k_i > 1$ ile ele alınır. $k \geq 2$ için $\mathbb{Z}_{p^k}$, $\mathbb{Z}_{p^2}$-projektif olduğundan, $B_p(G)$, $\mathbb{Z}_{p^2}$-projektiftir. Burada G grubunun $\mathbb{Z}_{p^2}$-projektif olduğuna ulaşarak çelişki elde edileceği gösterilecektir. $f : \mathbb{Z}_{p^2} \to A$ aşikar olmayan bir epimorfizma ve $g : G \to A$ bir homomorfizma olsun. Genelliği kaybetmeden, $A = \mathbb{Z}_p$ varsayılabilir. ($A = 0$ olsa $f = 0$, $A = \mathbb{Z}_{p^2}$ olsa f bir izomorfizma olur.) Kapsama dönüşümü $i : B_p(G) \to G$ olmak üzere $h = g \circ i : B_p(G) \to \mathbb{Z}_p$ olsun. $B_p(G)$, $\mathbb{Z}_{p^2}$-projektif olduğundan, $k : B_p(G) \to \mathbb{Z}_{p^2}$ homomorfizması $f \circ k = h = g \circ i$ ile vardır. Dolayısıyla aşağıdaki satırları tam olan diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}_{p^2} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_p(G) \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, dashed, "k"] & G \arrow[u, dashed, "n"'] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

Tanım yardımıyla $B_p(G)$, G'nin p-saf alt grubu ve $\mathbb{Z}_{p^2}$, p-saf-injektif olduğundan, $n : G \to \mathbb{Z}_{p^2}$ homomorfizması $n \circ i = k$ ile vardır. Buradan, $g \circ i = f \circ k = f \circ n \circ i$ olur. Gösterilmesi gereken $g = f \circ n$'nin sağlanıp sağlanmadığıdır. Yukarıdaki eşitlikten $(g - (f \circ n)) \circ i = 0$ dır. $g - (f \circ n)$, u ile gösterilsin.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_p(G) \arrow[r, "i"] & G \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "u"'] & G/B_p(G) \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "v"] & 0 \\
 & & \mathbb{Z}_p & &
\end{tikzcd}$$

σ kanonik bir epimorfizması ile $Ker(\sigma) = Im(i) \subseteq Ker(u)$ olduğundan, Teorem 2.11 yardımıyla $v : G/B_p(G) \to \mathbb{Z}_p$ homomorfizması $v \circ \sigma = u$ ile vardır. $G/B_p(G)$ tanımdan hareketle p-bölünebilirdir ve öte yandan $\mathbb{Z}_p$ sıfırdan farklı p-bölünebilir alt gruplara sahip olmadığından, $v = 0$ dır. Bu sonuç $u = 0$ olmasını gerektirir ve buradan $g = f \circ n$ elde edilir. Sonuç olarak, bu ifade G grubunun $\mathbb{Z}_{p^2}$-projektif olduğuna karşılık gelir. Fakat $\mathbb{Z}_{p^2}$ yarı basit grup olmadığından dolayı bu bir çelişkidir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) $B_p(G) = A \oplus B$ ve $A \cong \mathbb{Z}_p$ olsun. $B_p(G)$ tanımından hareketle G'nin p-saf alt grubu olduğundan, A'da G'nin p-saf alt grubudur. A grubu aynı zamanda p-grup olduğundan Not 2.70 yardımıyla G'nin saf alt grubudur ve böylece Lemma 2.72-(2) yardımıyla G'nin bir dik toplam terimidir.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Her p asal sayısı için, hipotez yardımıyla G grubunun $\mathbb{Z}_p$'ye izomorf olan A_p dik toplam terimi vardır. O zaman A_p yapısı itibariyle $T_p(G)$'nin de dik toplam terimidir ve böylece $\bigoplus A_p$ de $\bigoplus T_p(G) = T(G)$'nin bir dik toplam terimidir.

(4) $\Longrightarrow$ (3) $T(G)$, her p asal sayısına karşılık $\mathbb{Z}_p$'ye izomorf olacak şekilde bir S dik toplam terimine sahiptir. $T(G)$, G'nin saf alt grubu ve S, $T(G)$'nin dik toplam terimi olduğundan Not 2.66 yardımıyla S de G'nin saf alt grubudur. S alt grubu sınırlı ve saf alt grup olduğundan Lemma 2.72 yardımıyla G'nin bir dik toplam terimidir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Bazı H abel grupları için G, H-projektif olsun. Not 2.5 yardımıyla H'nin devirli grupların toplamı olduğu açıktır. Not 2.36 yardımıyla H'nin her devirli alt grubunun yarı basit olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Dolayısıyla Tanım 2.60 yardımıyla H'nin her elemanının mertebesinin karesiz olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bu durumun doğru ol-

madığını varsayalım, yani, $o(a) = +\infty$ veya $o(a) = p^n r$ olacak şekilde H'nin a elemanı, p asal bir tamsayı, n ve r pozitif tam sayılar, $n > 1$ ile vardır. İlk durumda, $< a > \cong \mathbb{Z}$ olduğundan Önerme 2.20 yardımıyla G, $\mathbb{Z}$-projektif olmak zorundadır. Herhangi bir p asalı için G grubu $\mathbb{Z}_p$'ye izomorf olan bir dik toplam terimine sahip olduğundan $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}$-projektif olmak zorundadır. Bu çelişkiye neden olur. İkinci durumda H, $o(ra) = p^n$, $n > 1$ ile $\mathbb{Z}_{p^n}$'ye izomorf olan alt gruba sahiptir. Sonuç olarak $n > 1$ iken $\mathbb{Z}_p$'nin $\mathbb{Z}_{p^n}$-projektif olmak zorunda olduğu elde edilir. Bu $\mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_p$ epimorfizmasının parçalanan olduğu anlamına gelir ve çelişkiye neden olur.

(4) $\Longleftrightarrow$ (5) Uyarı 2.33 yardımıyla açıktır. ∎

3.3. Saf-Projektif Modüller ve PP-Fakir Modüller

Bu bölümde *pi-fakir modüllere* eş olarak Tanım 2.46 yardımıyla; bir modülün saf-projektiflik bölgesinin minimal olması saf parçalanabilir modüllerin sınıfına karşılık geliyorsa o modül *saf-projektivel fakir modüller* (kısaca *pp-fakir modüller*) olarak adlandırılacaktır. Her halkanın pp-fakir modüle sahip olup olmadığı bilinmemektedir. Fakat bir halkanın tüm modüllerinin *pp*-fakir olmasının ne anlama geldiği açıklanacaktır. Ayrıca saf parçalanabilir pp-fakir modülün varlığı gösterilecektir.

Tanım 3.4 *Bir M sağ R-modülü için $\{N \in Mod - R \mid M$ modülü N-saf-projektiftir.$\}$ ile tanımlanan sınıfa M modülünün* saf-projektiflik bölgesi *denir ve $\mathfrak{PP}^{-1}(M)$ ile gösterilir.*

Lemma 3.5 *L, N-saf-projektif ve K, N'nin saf alt modülü olsun. O zaman L, K-saf-projektif ve N/K-saf-projektiftir. (Yani, modülün saf projektiflik bölgesi saf alt modül ve saf alt modülle belirlenen bölüm modülüne göre kapalıdır.)*

İspat: L, N-saf-projektif ve K, N'nin saf alt modülü olsun. İlk durumda; L'nin K-saf-projektif olduğunu göstermek için $f : L \to K/U$ ve U, K'nın saf alt modülü olsun. U, K'nın saf alt modülü ve K, N'nin saf alt modülü olduğundan U, N'nin saf alt modülüdür. i_1 ve i_2

gömme dönüşümleri, $\pi_K : K \to U$ ve $\pi_N : N \to N/U$ doğal epimorfizmalar ile

$$\begin{tikzcd} & & & L \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed] & \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "i_2"'] & K/U \arrow[r] \arrow[d, "i_1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & N \arrow[r, "\pi_N"'] & N/U \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sağlanır. L, N-saf-projektif olduğundan $x : L \to N$, $\pi_N \circ x = i_1 \circ f$ ile vardır. π_1 ve π_2 doğal epimorfizmalar ile

$$\begin{tikzcd} & & & L \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "x"'] & \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "i_2"'] & K/U \arrow[r] \arrow[d, "i_1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U \arrow[r] & N \arrow[r, "\pi_N"'] \arrow[d, "\pi_2"'] & N/U \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & 0 \\ & & N/K \arrow[r, equal, "1_{N/K}"'] \arrow[d] & N/K \arrow[d] & \\ & & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

sağlanır. $\pi_N \circ x = i_1 \circ f$ sağlandığından $\pi_1 \circ \pi_N \circ x = \pi_1 \circ i_1 \circ f = 0$ ve $\pi_1 \circ \pi_N = 1_{N/K} \circ \pi_2$ olur. Buradan $0 = \pi_1 \circ \pi_N \circ x = 1_{N/K} \circ \pi_2 \circ x$ olduğundan $\pi_2 \circ x = 0$ dır. Dolayısıyla $y : L \to K$, $x = i_2 \circ y$ vardır. Bu durumda $\pi_K \circ y = f$'nın sağlanıp sağlanmadığı gösterilmek zorundadır. $i_1 \circ \pi_K \circ y = i_1 \circ f$ ve i_1, monomorfizm olduğundan $\pi_K \circ y = f$ elde edilir. İkinci durumda, L'nin N/K-saf-projektif olduğunu göstermek için X, N'nin K yı kapsayan alt modülü ve $f : L \to N/X$ olsun. Ayrıca K, N'nin saf alt modülü ve X/K, N/K'nın saf alt modülü olsun. K, N'nin saf alt modülü ve X/K, N/K'nın saf alt modülü olduğundan X, N'nin saf alt modülüdür.

$$\begin{tikzcd} & & & L \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r] & N \arrow[r, "\pi_3"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & N/X \arrow[r] \arrow[d, equal, "1_{N/X}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X/K \arrow[r] & N/K \arrow[r, "\pi_2"'] & N/X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

L, N-saf-projektif olduğundan $g : L \to N$, $\pi_3 \circ g = f$ ile vardır. Böylece $h : L \to N/K$, $\pi_1 \circ g = h$ ile vardır. Sonuç olarak L, N/K-saf-projektiftir. ∎

Tanım 3.6 *$\mathcal{A}$, R-modüllerin bir sınıfı olsun. $\mathcal{A} = \mathfrak{PP}^{-1}(M)$ olacak şekilde bir M modülü varsa $\mathcal{A}$ sınıfına* saf-projektiflik portfolyosu *(kısaca pp-portfolyo) denir ve $\{\mathcal{A} \subseteq Mod - R \mid \mathcal{A}$: pp-portfolyo$\}$ sınıfı R* halkasının sağ saf-projektiflik profili *(pp-profil) olarak adlandırılır ve pp-$\mathcal{P}_r(R)$ ile gösterilir.*

Önerme 3.7 *R ve S birer halka olsun. pp-$\mathcal{P}_r(R \times S)$ ve pp-$\mathcal{P}_r(R) \times$ pp-$\mathcal{P}_r(S)$ arasında birebir ve sıralamayı koruyan bir dönüşüm vardır. Dahası, S sağ saf-yarı basit ise o zaman pp-$\mathcal{P}_r(R \times S) \cong$ pp-$\mathcal{P}_r(R)$ dir.*

İspat: M bir $R \times S$-modül olsun. O zaman $M_R \in Mod - R$ ve $M_S \in Mod - S$ olmak üzere $M = M_R \times M_S$ dir. $M = M_R \times M_S$ için $\mathfrak{PP}^{-1}(M) = \mathfrak{PP}^{-1}(M_R) \times \mathfrak{PP}^{-1}(M_S)$ göstermek yeterlidir. Dolayısıyla A, N modülünün bir saf alt modülü ve A ile belirlenen saf-tam dizi $0 \longrightarrow A \longrightarrow N \longrightarrow N/A \longrightarrow 0$ iken $Hom_R(M, N) \longrightarrow Hom_R(M, N) \longrightarrow 0$ 'nin tam dizi olduğunu göstermek yeterlidir. $M = M_R \times M_S$ ve $Hom_R(M, N)$ dikkate alındığında $Hom_R(M_R \times M_S, N) \cong Hom_R(M_R, N) \times Hom_R(M_S, N)$ olduğundan $h : M \to N$, $h_R : M_R \to N$ ve $h_S : M_S \to N$ ile $h = h_R \times h_S$ olur. Böylelikle istenen izomorfizma açıktır. ∎

Tanım 3.8 *Bir M modülünün bir N modülü için N-saf-projektif olduğu her durumda N saf-parçalanabilir ise M modülüne* saf-projektivel fakir modül *(kısaca pp-*fakir modül*) denir.*

Önerme 3.9 *M bir modül ve bazı A ve B alt modülleri ile $M = A \oplus B$ olsun. A alt modülü pp-fakir ise M modülü de pp-fakirdir. Tersi genelde doğru değildir.*

İspat: $M = A \oplus B$ modülü N-saf-projektif ve A alt modülü pp-fakir olsun. Bu durumda A alt modülü de N-saf-projektif olduğundan N saf-parçalanabilir olmak zorundadır ve bu ispatı tamamlar. ∎

Aşağıda, bir önceki önermenin tersinin ne zaman doğru olacağı, yani; modül pp-fakir iken hangi koşulda dik toplam teriminin de pp-fakir olduğu gösterilecektir.

Lemma 3.10 *$P \oplus N$ olacak şekilde P ve N modülleri olsun. $P \oplus N$, pp-fakir ve P'nin saf-projektif olduğu durumda N, pp-fakirdir.*

İspat: N, T-saf-projektif olsun. O zaman $P \oplus N$, T-saf-projektif sağlanır. $P \oplus N$'nin pp-fakir olmasından dolayı T modülü saf-parçalanabilirdir. ∎

Önerme 3.11 *R ve S birer halka olsun. M bir pp-fakir $R \times S$-modül ise M_R ve M_S modülleri de sırasıyla bir pp-fakir R-modül ve bir pp-fakir S-modüldür.*

İspat: M modülü $R \times S$-modül olduğundan, $M_R \in Mod - R$ ve $M_S \in Mod - S$ olmak üzere $M = M_R \times M_S$ dir. Önerme 3.7'in ispatı yardımıyla $\mathfrak{PP}^{-1}(M) = \mathfrak{PP}^{-1}(M_R) \times \mathfrak{PP}^{-1}(M_S)$ dır. M_R modülü A-saf-projektif R-modül olacak şekilde A, bir R-modül olsun. O zaman M modülü A-saf-projektif $R \times S$-modül olur. M modülü pp-fakir $R \times S$-modül olduğundan tanımdan hareketle A modülü $R \times S$-modül olarak saf-parçalanabilirdir. Bu aynı zamanda saf-parçalanabilir R-modül olmasını gerektirir. Böylece R-modül olarak M_R modülü pp-fakirdir. Benzer şekilde S-modül olarak M_S modülü pp-fakir olduğu gösterilir. ■

Uyarı 3.12 *Önerme 3.11 de, $M = M_R \times M_S$ modülü pp-fakir $R \times S$-modül iken M_R ve M_S'nin pp-fakir $R \times S$-modül olma zorunluluğu yoktur. Örneğin, A modülü saf-parçalanabilir bir R-modül ve S modülü saf-parçalanabilir S-modül olmasın. O zaman M_R, $R \times S$-modül olarak $A \oplus S$-saf-projektiftir. S saf-parçalanabilir olmadığından, $A \oplus S$ saf-parçalanabilir değildir. Böylece M_R, pp-fakir $R \times S$-modül modül değildir.*

Herhangi bir halkanın pp-fakir modüllere sahip olup olmadığı bilinmiyor, fakat aşağıdaki teorem tüm sağ R-modülleri pp-fakir olan halkaların yapısının nasıl olduğunu açıklamaktadır.

Teorem 3.13 *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *R halkası sağ saf yarı basit bir halkadır;*
2. *Her sağ R-modül pp-fakirdir;*
3. *Saf-projektif pp-fakir bir sağ R-modül vardır;*
4. *0 modülü pp-fakir bir sağ R-modüldür;*
5. *Her sonlu gösterimli sağ R-modül pp-fakirdir;*
6. *R'nin kendisi (kendi üzerinde modül olarak) pp-fakirdir;*
7. *R halkası pp-fakir bir modüle sahiptir ve her pp-fakir sağ R-modül saf-parçalanabilirdir;*
8. *R halkası pp-fakir bir modüle sahiptir ve bir pp-fakir sağ R-modülün her bölüm modülü pp-fakirdir;*
9. *R halkası pp-fakir bir modüle sahiptir ve bir pp-fakir sağ R-modülün her dik toplam terimi pp-fakirdir.*

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2) ve (1) $\Longrightarrow$ (7) Uyarı 2.50 yardımıyla açıktır.

(7) $\Longrightarrow$ (1) M herhangi bir R-modül olsun. M modülünün saf-parçalanabilir olduğunu göstermek yeterli olacaktır. pp-fakir modül olacak şekilde bir N modülünün varlığı (7) yardımıyla mevcutttur. Önerme 3.9 yardımıyla, $M \oplus N$'nin de pp-fakir olduğu ve (7)'den aynı zamanda saf-parçalanabilir olduğu sonucuna ulaşılır. K, M'nin saf bir alt modülü olsun. M modülü $M \oplus N$ içinde saf alt modül olduğundan K'da $M \oplus N$'de saf alt modüldür. Böylece $M \oplus N$ modülü saf-parçalanabilir olduğundan K, $M \oplus N$'nin bir dik toplam terimidir. Buradan K, M'nin dik toplam terimi olarak elde edildiğinden M saf-parçalanabilirdir. Herhangi bir modül saf-parçalanabilir modül olduğundan, Uyarı 2.50 yardımıyla R sağ saf yarı basit bir halkadır.

(2) $\Longrightarrow$ (4) Aşikardır.

(4) $\Longrightarrow$ (2) Önerme 3.9 ve her M modülü için $M = M + 0$ olduğundan açıktır.

(2) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (9) Aşikardır.

(9) $\Longrightarrow$ (2) M herhangi bir R-modül olsun. (9) yardımıyla öyle bir pp-fakir modül olan N modülü vardır. Önerme 3.9'dan, $M \oplus N$ pp-fakir modüldür. (9)'dan, M pp-fakirdir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Not 2.48 yardımıyla aşikardır.

(3) $\Longrightarrow$ (1) M herhangi bir R-modül ve P saf-projektif bir pp-fakir R-modül olsun. P modülü hem M-saf-projektif hem de pp-fakir olduğundan, M saf-parçalanabilirdir. O zaman Uyarı 2.50 yardımıyla R sağ saf yarı basittir.

(2) $\Longrightarrow$ (5) Aşikardır.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Tanım 2.6 yardımıyla aşikardır.

(6) $\Longrightarrow$ (1) M herhangi bir R-modül ve kendi üzerinde modül olarak R modülü M-saf-projektif olsun. R, pp-fakir olduğundan M modülü saf-parçalanabilirdir. ■

Önerme 3.14 *Bir M modülü pp-fakir modüldür ancak ve ancak $M^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} M_i$, her $i \in I$ için $M_i = M$ ile pp-fakirdir.*

İspat: Herhangi bir N modülü için M modülü N-saf-projektiftir ancak ve ancak her $i \in I$ için $M_i = M$ ile $M^{(I)}$, N-saf-projektiftir. Saf-projektiflik bölgesi aynı modüllerden oluştuğu için ispatın geri kalanı açıktır. ■

Aşağıda, Önerme 3.9 ve Önerme 3.14'den yola çıkarak projektif olan pp-fakir modüllerin varlığı gösterilecektir.

Sonuç 3.15 *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *R modülü kendi üzerinde modül olarak pp-fakirdir;*

2. *Her serbest R-modül pp-fakirdir;*

3. *Devirli projektif bir pp-fakir R-modül vardır.*

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (3) R kendi üzerinde modül olarak hem devirli hem projektif modül olduğundan sonuç açıktır.

(1) $\Longrightarrow$ (2) Serbest modülün bazının eleman sayısı n olmak üzere her serbest modül R^n'ye izomorftur. Dolayısıyla, Önerme 3.14'ten sonuç elde edilir.

(3) $\Longrightarrow$ (2) Bir M modülü ve $m \in M$ için mR devirli ve projektif bir alt modül olsun. Buna karşılık $R \to mR \to 0$ dizisi mevcuttur. $\bigoplus mR$'nin yine projektif olması ile $\bigoplus R \to \bigoplus mR \to 0$ dizisi parçalanandır. Her serbest modül $\bigoplus R$ formunda bir modüle izomorf olduğundan ve Önerme 3.9'dan sonuç açıktır. ∎

$\mathcal{I}$ tüm injektif modüllerin sınıfı, $\mathcal{AP}$ tüm tamamen saf modüllerin sınıfı olmak üzere Tanım 2.16'dan yararlanarak $\mathcal{X}$ ile adlandırılacak küme $\mathcal{X}=\{X \in Mod-R \mid$ her $A \in \mathcal{AP}$ için $Ext^1(X,A) = 0\}$ olsun. Aşağıda, $\mathcal{X}$'de pp-fakir modül olan X modülü varsa R halkasının Noether halka olduğu ve tüm R-modüllerin de $\mathcal{X}$ içinde olduğu gösterilmiştir.

Teorem 3.16 *Bir R halkası pp-fakir modül olan X modülüne sahip ise aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *$X \in \mathcal{X}$ dir;*

2. *Tamamen saf her R-modül saf-parçalanabilirdir;*

3. *İnjektif her R-modül saf-parçalanabilirdir;*

4. *R halkası Noether halkadır;*

5. *$\mathcal{AP} = \mathcal{I}$ dir;*

6. *$\mathcal{X} = Mod - R$ dir.*

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2) A tamamen saf bir R-modül olsun. X modülünün pp-fakir modül olmasını kullanmak için X'in A-saf projektif olduğunu göstermek yeterlidir. $f : A \to B$ saf epimorfizma olsun. Buna bağlı olarak $K = Ker(f)$ ve i kapsama dönüşümü olmak üzere

$$\psi : 0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

saf kısa tam dizisi vardır. O zaman K alt modülü Lemma 2.40 ve Lemma 2.41 yardımıyla tamamen saftır. Teorem 2.17 den ψ dizisine karşılık

$$\xi : 0 \to Hom_R(X, K) \to Hom_R(X, A) \xrightarrow{f_*} Hom_R(X, B) \to Ext^1(X, K) \to \ldots$$

vardır. $X \in \mathcal{X}$ ve K modülü tamamen saf alt modül olduğundan $Ext^1(X, K) = 0$ olur ve ξ kısa tam diziye dönüşür. Böylece f_* epimorfizmadır. Sonuç olarak X'in A-saf-projektif olduğu elde edilir. X modülü pp-fakir modül olduğundan A saf-parçalanabilirdir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Lemma 2.40 yardımıyla açıktır.

(4) $\Longleftrightarrow$ (5) Teorem 2.56 yardımıyla açıktır.

(3) $\Longrightarrow$ (5) $A \in \mathcal{AP}$ olsun. Bu durumda I injektif modül olmak üzere Teorem 2.24 yardımıyla $f : A \to I$ monomorfizması vardır. A tamamen saf bir modül olduğundan, f homomorfizması saf monomorfizmadır ve (3) yardımıyla parçalanabilirdir. O zaman A, I injektif modülünün dik toplam terimine izomorftur ve buradan A injektiftir.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Önerme 2.27 yardımıyla açıktır.

(6) $\Longrightarrow$ (1) Aşikardır. ∎

Aşağıda, saf-parçalanabilir pp-fakir modülün varlığı gösterilmiştir. Bir sonraki bölümde ise saf-parçalanabilir pp-fakir abel grupların olmadığı gösterilecektir.

Önerme 3.17 *M saf-parçalanabilir bir modül ve M'nin N-saf-projektif olduğu herhangi bir N modülü olsun. M'nin saf alt modülü, N'nin saf alt modülle belirlenen her bölüm modülüne izomorf ise M modülü pp-fakirdir.*

İspat: Saf-parçalanabilir bir M modülü N-saf-projektif ve K, N modülünün saf alt modülü olsun. Hipotez yardımıyla bir $f : N/K \to L$ izomorfizması M modülünün L saf alt modülü ile vardır. M modülü saf-parçalanabilir olduğundan L, M'nin bir dik toplam terimidir. $\pi_M : M \to L$ projeksiyon dönüşümünü, $\pi_N : N \to N/K$ doğal epimorfizmayı ve $i_L : L \to M$ kapsama dönüşümünü göstersin. M'nin N-saf-projektifliği kavramı $\pi_N \circ g = f^{-1} \circ \pi_M$ ile bir $g : M \to N$ homomorfizmasının varlığını gerektirir. K, N'nin saf alt modülü olduğundan $0 \to K \to N \to N/K \to 0$ saf tam dizisi vardır. $\pi_N \circ g = f^{-1} \circ \pi_M$ olduğundan, $1_{N/K}$, N/K'nın birim dönüşümü ile $\pi_N \circ (g \circ i_L \circ f) = 1_{N/K}$ elde edilir. Buradan hareketle saf tam dizi parçalanabilir, yani K, N'nin dik toplam terimidir. Böylece N modülü saf-parçalanabilir ve M modülü pp-fakir modüldür. ∎

Bir sonraki bölüme geçmeden önce ortogonal modül tanımına ve bu tanım yardımıyla, yarı basit projektif pi-fakir modüle ortogonal olan yarı basit modüllerin yapısı verilecektir.

İki modül sıfırdan farklı izomorfik alt modüllere sahip değiller ise bu modüllere *ortogonal modüller* denir.

Teorem 3.18 *R değişmeli bir halka ve M yarı basit projektif pi-fakir R-modül olsun. O zaman M'ye ortogonal olan her yarı basit S_R modülü saf-injektiftir.*

İspat: $H(S)$, S'nin saf injektif bürümü (Yani, S, saf-injektif $H(S)$ modülünün büyük alt modülü) olsun. $H(S)$ de saf alt modül olarak kapsanan her X için $Hom(X, M) = 0$ olduğu gösterilmeli ve böylece M, $H(S)$-saf-injektif elde edilmelidir. $f \in Hom(X, M)$ olsun. $f(X)$ projektif olduğundan, $X = Kerf \oplus Y$ ve $f(X) \cong Y$ dır. $f(X) = 0$ olduğunu göstermek için, ilk olarak $f(X \cap S) = 0$ gösterilecektir. $f(X \cap S) \neq 0$ olduğu varsayılsın. M'nin projektif alt modülü $\big(f(X) \subseteq M\big)$ olduğundan $X \cap S \cong f(X \cap S) \oplus (Kerf \cap (X \cap S))$ dır. Bu S ve M'nin ortogonal olmasıyla çelişir. $f(X \cap S) = 0$ olmalıdır. Böylece $X \cap S \subseteq Kerf$ dir. $X \cap S$, X'de büyük alt modül olarak kapsandığından $f(X) = 0$ olur. Sonuçta M, $H(S)$-saf-injektiftir. M modülü pi-fakir, $H(S)$ saf-parçalanabilir ve S, $H(S)$'de saf alt modül olduğundan S, $H(S)$'de bir dik toplam terimidir. Sonuç olarak S saf injektiftir. ■

3.4. Saf-Projektif Fakir Abel Gruplar

Bu bölümde $\{R_i\}_{i\in I}$, tüm rasyonel grupların kümesi olmak üzere $M = \bigoplus_{i\in I} R_i$'nin pp-fakir abel grup olduğu gösterilerek pp-fakir abel grupların varlığı garantilenecektir. Bölüm boyunca M gösterimi ile $M = \bigoplus_{i\in I} R_i$ kastedilecektir. Bölüm sonunda saf-parçalanabilir pp-fakir grubun varlığının mevcut olmadığı da ispatlanacaktır.

Lemma 3.19 *G, indirgenmiş bir burulma grubu olsun. G grubu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *M grubu G-saf-projektiftir;*
2. *$T_p(G)$, her p asal sayısı için sınırlıdır;*
3. *G grubu saf-parçalanabilirdir.*

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2) $T_p(G)$, G grubunun primar bileşeni ve $B_p(G)$, $T_p(G)$'nin bir temel alt grubu olsun. $T_p(G) \neq B_p(G)$ olduğu varsayılsın. O zaman $T_p(G)/B_p(G) \cong \bigoplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ dır.

$T_P(G)$, G'nin saf alt grubu olduğundan M, $T_p(G)$-saf-projektiftir. Buradan $\mathbb{Q}^{(p)}$, $T_p(G)$-saf-projektiftir. $T_p(G)$, p-bölünebilir olmadığından $Hom_R(\mathbb{Q}^{(p)}, T_p(G)) = 0$ olur. Fakat öte yandan $Hom_R(\mathbb{Q}^{(p)}, T_p(G)/B_p(G)) \neq 0$ dır. $Hom_R(\mathbb{Q}^{(p)}, T_p(G)) \to Hom_R(\mathbb{Q}^{(p)}, T_p(G)/B_p(G))$ indirgenmiş homomorfizması bir epimorfizma olamaz. Buradan çelişki elde edilir. Sonuç olarak $T_p(G) = B_p(G)$ dir. $B_p(G)$'nin sınırlı olmadığı varsayılsın. O zaman Lemma 2.68 yardımıyla $f : B_p(G) \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ saf epimorfizması vardır. $B_p(G)$, G ve M'nin saf alt grubu olduğundan $\mathbb{Q}^{(p)}$, $B_p(G)$-saf-projektiftir. $Hom_R(\mathbb{Q}^{(p)}, B_p(G)) = 0$ ve $Hom_R(\mathbb{Q}^{(p)}, \mathbb{Z}_{p^\infty}) \neq 0$ olduğundan yine bir çelişki elde edilir. Sonuç olarak $B_p(G)$ sınırlıdır.

(2) $\Longrightarrow$ (3) ((Alizade ve Büyükaşık, 2015), Lemma 4.3. (2) $\Longrightarrow$ (3)) ifadesine eş olarak gösterilecektir. H, G grubunun alt grubu olsun. $G = \bigoplus_{p\in P} T_p(G)$ ve $H = \bigoplus_{p\in P} T_p(H)$ olduğundan $T_p(H)$, $T_p(G)$'de saf alt gruptur. Lemma 2.72-(2) yardımıyla $T_p(H)$, $T_p(G)$'de dik toplam terimidir. $N_p \subseteq G$ ile $T_p(G) = T_p(H) \oplus N_p$ olsun. $G = \bigoplus_{p\in P}[T_p(H) \oplus N_p] = (\bigoplus_{p\in P} T_p(H)) \oplus (\bigoplus_{p\in P} N_p) = H \oplus (\bigoplus_{p\in P} N_p)$ olduğundan G grubu saf-parçalanabilirdir.

(3) $\Longrightarrow$ (1) G saf-parçalanabilir modül olduğundan G'nin herhangi bir H saf alt modülü ile elde edilen $0 \to H \to G \to G/H \to 0$ şeklindeki her saf tam dizi parçalanandır. ■

Lemma 3.20 *p bir asal tam sayı ve H grubu bir p-grup olsun. M, H-saf-projektif ise H grubu saf-parçalanabilirdir.*

İspat: ((Alizade ve Büyükaşık, 2015), Lemma 4.5.) in ispatına eş olarak gösterilecektir. H grubunun bölünebilir alt grubu D ve saf alt grubu A olsun. İndirgenmiş bazı C grupları ile $H = C \oplus D$ ve D_A, A'nın bölünebilir alt grubu olsun. D_A aynı zamanda D'nin de alt grubudur ve bazı D_{A_1} ile $D = D_{A_1} \oplus D_A$ dir. O halde edinilen eşitlikler çerçevesinde $H = C \oplus D_{A_1} \oplus D_A$ olur. $C \oplus D_{A_1}$ yeniden E ile adlandırılsın. Eşitlik $H = E \oplus D_A$ halini alır. Lemma 2.10 yardımıyla $A = (E \cap A) \oplus D_A$ elde edilir. $E \cap A$, H'nin saf alt modülüdür. $E \cap A = L$ şeklinde adlandırıldığında M'nin L-saf-projektif olduğu görülür. $L \cong A/D_A$ ile L indirgenmiş bir modül olur ve böylece sınırlı olduğu görülür. L, H'de saf olduğundan aynı zamanda E'de de saftır. Lemma 2.72-(2) yardımıyla bazı $K \subseteq E$ için $E = K \oplus L$ dir. O zaman $H = E \oplus D_A = K \oplus L \oplus D_A = K \oplus A$ elde edilir. Sonuç olarak A, H'de dik toplam terimidir ve buradan H saf-parçalanabilirdir. ■

Lemma 3.21 *M'nin A-saf-projektif olduğu durumda A, sıfırdan farklı indirgenmiş burulmasız bir grup ise A grubu saf-parçalanabilirdir ve bazı n pozitif tam sayıları için $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$ dir.*

Burada tüm K_i ler aynı R rasyonel grubuna izomorftur.

İspat: Herhangi bir sıfırdan farklı $a \in A$ ve

$$\langle a\rangle_p = \{x \in A \mid \text{bazı } 0 \neq m \in \mathbb{Z} \text{ için } mx \in \langle a\rangle\}$$

olsun. $\langle a\rangle_p$'nin (a'yı içeren en küçük alt grup) A'nın saf alt grubu olduğu ve $\langle a\rangle_p$'nin bazı indirgenmiş rasyonel gruplara izomorf olduğu açıktır. $A = \langle a\rangle_p$ ise o zaman ispat bitmiş olur. $A \neq \langle a\rangle_p$ olduğu varsayılsın. O zaman $A/\langle a\rangle_p$ burulmasız grubu öyle sıfırdan farklı b elemanına sahiptir. $\sigma : A \to A/\langle a\rangle_p$ kanonik epimorfizmasının ve $\langle b\rangle_p \to A/\langle a\rangle_p$ kapsama dönüşümünün Tanım 2.12 ile verilen tanıma uygun olarak geri çekilimi alınsın. Aşağıdaki tam satır ve sütunlu değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathbb{E}: 0 \arrow[r] & \langle a\rangle_p \arrow[r] \arrow[d, equal] & X \arrow[r] \arrow[d] & \langle b\rangle_p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \langle a\rangle_p \arrow[r] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\alpha"'] & A/\langle a\rangle_p \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
 & & Y \arrow[r, equal] \arrow[d] & Y \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Genelliği kaybetmeden, X'in A'nın alt grubu olduğu varsayılabilir. $Ker(\sigma)$, A'nın saf alt grubu ve $Ker(\beta)$, $A/\langle a\rangle_p$'nın saf alt grubu olduğundan $X = Ker(\alpha)$, A'nın saf alt grubudur. Buradan M, X-saf-projektiftir. $\langle a\rangle_p$, X'in saf alt grubu ve $\langle b\rangle_p$ rasyonel gruba izomorf olduğundan, $\mathbb{E}$ kısa tam dizisi parçalanabilirdir, böylece $X \cong \langle a\rangle_p \oplus \langle b\rangle_p$ olur. $A \neq X$ ise $0 \neq c \in A/X$ alarak A'nın $Y \cong \langle a\rangle_p \oplus \langle b\rangle_p \oplus \langle c\rangle_p$ saf alt grubu ve buna benzerleri bulunabilir. Bu adımlar bir yerde sonlanmaz ise Örnek 2.67 de belirtildiği üzere saf alt grupların direk limiti saf alt grup olduğundan her K_i indirgenmiş rasyonel grup olmak üzere A'nın $K = \bigoplus_{i=1}^{\infty} K_i$ saf alt grubu elde edilir. O halde M, K-saf-projektiftir. $\mathbb{Q}$ injektif olduğundan, $f_i : K_i \to \mathbb{Q}$ homomorfizması her $i = 1, 2, \ldots$ için $\frac{1}{i} \in Im(f_i)$ ile tanımlanabililr. Buradan $f : K \to \mathbb{Q}$ epimorfizması vardır. $\mathbb{Q}$, burulmasız olduğundan $Ker(f)$ alt grubu K'nın saf alt grubudur. Fakat $\mathbb{Q}$ is K-saf-projektif olduğundan $K \cong Ker(f) \oplus \mathbb{Q}$ olur. K'nın indirgenmiş olmasından çelişki elde edilir. Sonuçta bu adımlar sonludur, yani bazı n için $A = \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$ dır. U, A grubunun herhangi bir saf alt grubu olsun. Yukarıdaki ispat yardımıyla A/U rasyonel grupların dik toplamıdır. (Bunlardan bazıları bölünebilir olabilir). Buradan A/U, A-saf-projektif ve böylece U, A'nın dik toplam terimidir. Sonuç olarak A saf-parçalanabilirdir. Uyarı 2.79 yardımıyla tüm K_i grupları birbirine izomorftur. ■

Sonuç 3.22 *M grubu bazı burulmasız A grupları için A-saf-projektif ise M'nin B-saf-projektif olduğu her B grubu için A da B-saf-projektiftir.*

İspat: M grubu B-saf-projektif, A burulmasız grup ve D, A'nın bölünebilir alt grubu olsun. A'nın bazı indirgenmiş K alt grubu için $A = D \oplus K$ dır. M, A-saf-projektif ise M, K-saf-projektiftir. Lemma 3.21 yardımıyla K rasyonel grupların dik toplamıdır. Diğer taraftan D, $\mathbb{Q}$'ya izomorf olan alt grupların dik toplamı olduğundan A grubu B-saf-projektiftir. ■

Sonuç 3.23 *M grubu bazı burulmasız B grupları için B-saf-projektif ise B saf-parçalanabilirdir.*

İspat: M grubu B-saf-projektif ve C, B'nin saf alt grubu olsun. O zaman M grubu B/C-saf-projektif ve Sonuç 3.22 yardımıyla B/C bölüm grubu B-saf-projektiftir. Böylece C, B'nin bir dik toplam terimidir. ■

Teorem 3.24 *M grubu pp-fakirdir.*

İspat: M grubu bazı G grupları için G-saf-projektif ve D, G'nin bölünebilir kısmı olsun. O zaman bazı indirgenmiş N alt grubu için $G = D \oplus N$ dir. N'nin $T(N)$ burulma kısmı saf alt grup olduğundan M grubu $N/T(N)$-saf-projektiftir. Sonuç 3.22 yardımıyla $N/T(N)$ bölüm grubu N-saf-projektiftir. Buradan $T(N)$ burulma kısmı N'nin dik toplam terimi olur, yani N'nin bazı burulmasız K alt grupları için $N = T(N) \oplus K$ dir. Teoremin geri kalan kısmı ((Alizade ve Büyükaşık, 2015), Teorem 4.1.)'in ispatının son paragrafının neredeyse tamamıyla eş olarak yapılmaktadır, yinede tamamlamak için verilecektir. $G = N \oplus D = T(N) \oplus K \oplus T(D) \oplus D' = (T(N) \oplus T(D)) \oplus (K \oplus D') = T(G) \oplus G'$ denklemi vardır. G'nin saf-parçalanabilir olduğunu ispatlamak için G'nin A saf alt grubu ele alınsın. Her $p \in P$ için $T_p(A)$, $T_p(G)$'nin saf alt grubudur. Böylece Lemma 3.20 yardımıyla $T_p(A)$, $T_p(G)$'nın dik toplam terimidir. O zaman $T(A)$, $T(G)$'nin bir dik toplam terimidir. Bir $f : A/T(A) \to G/T(G)$ homomorfizması $f(a + T(A)) = a + T(G)$ ile vardır. $f(a + T(A)) = 0$ ise elde edilen bilgiler ışığında $a \in T(G) \cap A = T(A)$ olur, buradan $a + T(A) = 0$ ve sonuçta f bir monomorfizmadır. Şimdi $Im(f)$'nin $G/T(G)$'nin saf alt grubu olduğu iddia edilsin. Bunu göstermek için, bazı $a \in A, b \in G, 0 \neq m \in \mathbb{Z}$ ile $a + T(G) = m(b + T(G))$ olsun. O halde

$a - mb \in T(G)$ ve böylece bazı $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ için $ka = kmb$ dir. A, G'de saf alt grup olduğundan, bazı $a' \in A$ için $ka = kma'$ gerçeklenir. Buradan hareketle $a - ma' \in T(A)$ olur ve $a + T(A) = m(a' + T(A))$ dır. Sonuç olarak $Im(f)$ saf alt gruptur. Lemma 3.23 yardımıyla $G/T(G) \cong G'$ saf-parçalanabilir olduğundan f parçalanabilirdir. A, G'nin saf alt grubu olduğundan M grubu A-saf-projektiftir. İspatın ilk kısmı yardımıyla $K' \cong A/T(A)$ olacak şekilde bazı $K' \leq A$ için $A = T(A) \oplus K'$ dır. O zaman $A = T(A) \oplus K' \to G = T(G) \oplus G'$ kapsama dönüşümü parçalanabilirdir, yani, A, G'nin dik toplam terimidir. ∎

Önerme 3.25 *Saf-parçalanabilir pp-fakir abel grup yoktur.*

İspat: N'nin saf-parçalanabilir bir pp-fakir grup olduğu varsayılsın. N burulmalı grup ise her burulmasız A grubu için N, A-saf-projektiftir. Bu yüzden N burulmalı grup değildir. N saf-parçalanabilir grup ve $T(N)$ burulma kısmı N'nin saf alt grubu olduğundan, bazı burulmasız saf-parçalanabilir K grupları için $N = T(N) \oplus K$ dir. $D(K)$, K'nın maksimal bölünebilir alt grubu olmak üzere $K = D(K) \oplus L$ olsun. L'de saf parçalanabilirdir. O zaman tüm K_i rasyonel ve birbirine izomorf olmak üzere $K = \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$ dir. İlk olarak, K_i, bazı q asal sayıları için q-bölünebilir ise Önerme 2.78 yardımıyla $p \neq q$ ve $rank = 2$ olacak şekilde A grubu alınsın. Bu rankı 2 olan ve bileşenlerine ayrılmayan burulmasız gruptur. Böylece A saf-parçalanabilir değildir. A'nın her aşikar olmayan saf B alt grubunda rank 1 dir. Sonuç olarak Uyarı 2.78 yardımıyla $A/B \cong \mathbb{Q}^{(p)}$ dir. Buradan $Hom_R(K_i, A/B) = 0$ ve böylece K, A-saf-projektiftir. $T(N)$'nin de A-saf-projektif olduğu açıktır. Böylelikle N, A-saf-projektiftir. Bu ise çelişkiye neden olur. Diğer taraftan, $K_i \cong \mathbb{Z}$ ise L serbest bir grup ve böylece N, A-saf projektiftir. Sonuçta K_i'nin tipi, sonlu olmayan çoklukta sıfırdan farklı koordinatı içermesi durumu hariç, K_i tüm asallar için q-bölünebilir değil ise o zaman yukarıdaki A grubu ve B alt grupları için tekrar $Hom_R(K_i, A/B) = 0$ olur ve böylece çelişki elde edilir. ∎

3.5. P-Muhtaç Modül

Bu bölümde projektiflik bölgesi minimal olmayan, fakat saf-parçalanabilir modüller sınıfı tarafından kapsanan modüller incelenecektir. Söz konusu modüller, p-fakir ile pp-fakir modüllerin genelleştirilmesidir. Bölüm sonunda, p-muhtaç abel grupların yapısı tümüyle tanımlanacaktır.

Tanım 3.26 *M bir modül olsun. N modülü için, M modülü N-projektif iken N modülü saf-parçalanabilir ise (denk olarak $\mathfrak{Pr}^{-1}(M)$ tüm saf-parçalanabilir modüllerin sınıfı tarafından kapsanıyorsa -eşit olmak zorunda değil-) M modülüne p-*muhtaç *denir.*

Lemma 3.27 *p-fakir modüller ve pp-fakir modüller aynı zamanda p-muhtaç modüllerdir.*

İspat: Bir M modülünün N-projektif olduğu her N modülü için M modülü aynı zamanda N-saf-projektiftir. Böylece pp-fakir iken p-muhtaç olduğu görülür. Diğer taraftan yarı-basit modüller saf-parçalanabilir modül olduğundan p-fakir modüllerin p-muhtaç olduğu açıktır. ■

Sonuç 3.28 *Herhangi bir halka için p-muhtaç modül vardır.*

İspat: Lemma 3.27 ve Önerme 2.35 yardımıyla açıktır. ■

Uyarı 3.29 *M p-muhtaç bir modül olsun. M modülü tüm saf-parçalanabilir N modüllere göre N-projektif olmak zorunda değildir. Örnek olarak, p-muhtaç bir M modülü tüm saf-parçalanabilir N modüllere göre N-projektif olsun. Teorem 3.3 ve Lemma 3.27 yardımıyla $M = \bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_p$ ve $N = \mathbb{Z}$ seçilebilir. $\mathbb{Z}$ saf-parçalanabilir olduğundan dolayı $\bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}$-projektif olmak zorundadır. Bu, $\bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_p$'den $\mathbb{Z}_p$'ye olan projeksiyon dönüşümüne karşılık $\bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_p$'den $\mathbb{Z}$'ye dönüşümün var olduğu anlamına gelir ve çelişki elde edilir.*

Uyarı 3.30 *M modülü p-muhtaç bir modül olsun. Tüm saf-parçalanabilir modüllerin sınıfı genelde alt modül ve bölüm modüle göre kapalı olmamasına rağmen $N \subseteq \mathfrak{Pr}^{-1}(M)$ sağlayan N saf-parçalanabilir modüllerin alt modülleri ve bölüm modülleri yine saf-parçalanabilirdir.*

Lemma 3.31 *Von Neumann regüler halka üzerinde p-fakir modüller, pp-fakir modüller ve p-muhtaç modüllerin sınıfı aynı anlama gelmektedir.*

İspat: Von Neumann regüler halka üzerinde tüm monomorfizmalar saftır. Bu açıdan bakıldığında, tüm epimorfizmalar saf olduğundan saf-projektif modüller ve projektif modüller aynı anlama gelmektedir. Bu yüzden ispatın geri kalanı açıktır. ■

Lemma 3.32 *$M = X \oplus Y$ modülü p-muhtaç olsun. Dik toplam terim X, p-muhtaç ise o zaman M'de p-muhtaçtır. Tersi genelde doğru değildir.*

İspat: $M = X \oplus Y$ modülü p-muhtaç ve M modülü T-projektif olsun. O zaman X'de T-projektiftir. X, p-muhtaç olduğundan T modülü saf-parçalanabilir olmak zorundadır. Sonuç olarak, M modülü p-muhtaçtır. ■

Aşağıda bir önceki lemmanın tersinin ne zaman doğru olacağı, yani; modül p-muhtaç iken hangi koşulda dik toplam teriminin de p-muhtaç olduğu gösterilecektir.

Lemma 3.33 *$P \oplus N$ olacak şekilde P ve N modülleri olsun. $P \oplus N$, p-muhtaç ve P'nin projektif olduğu durumda N, p-muhtaçtır.*

İspat: N, T-projektif olsun. O zaman $P \oplus N$, T-projektif sağlanır. $P \oplus N$'nin p-muhtaç olmasından dolayı T modülü saf-parçalanabilirdir. ■

Sağ saf yarı basit halka üzerindeki her modülün pp-fakir olduğu ve buna denk koşullar Teorem 3.13'de karakterize edilmiştir. Benzer şekilde sağ saf yarı basit halka üzerindeki her modülün p-muhtaç olduğu ve buna denk koşullar aşağıdaki teoremde tasvirlenmiştir.

Teorem 3.34 *R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *R halkası sağ saf yarı basit bir halkadır.*
2. *Her sağ R-modül p-muhtaçtır.*
3. *Projektif p-muhtaç bir sağ R-modül vardır.*
4. *0 modülü p-muhtaç bir sağ R-modüldür.*
5. *Her sonlu gösterimli sağ R-modül p-muhtaçtır.*
6. *R'nin kendisi (kendi üzerinde bir modül olarak) p-muhtaçtır.*
7. *R halkası p-muhtaç bir modüle sahiptir ve her p-muhtaç sağ R-modül saf-parçalanabilirdir.*
8. *R halkası p-muhtaç bir modüle sahiptir ve bir p-muhtaç sağ R-modülün her bölüm modülü p-muhtaçtır.*
9. *R halkası p-muhtaç bir modüle sahiptir ve bir p-muhtaç sağ R-modülün her dik toplam terimi p-muhtaçtır.*

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2) ve (1) $\Longrightarrow$ (7) Uyarı 2.50 yardımıyla açıktır.
(7) $\Longrightarrow$ (1) M, herhangi bir R-modül olsun. (7) yardımıyla, bir N p-muhtaç modülü vardır. Lemma 3.32 yardımıyla $M \oplus N$'de p-muhtaçtır ve sonuç olarak kabul yardımıyla saf-parçalanabilirdir. T, M'nin saf alt modülü olsun. M, $M \oplus N$ içinde saf olduğundan, T de $M \oplus N$ içinde saftır. $M \oplus N$'nin p-muhtaç olmasından dolayı T, $M \oplus N$ de dik toplam terimidir. Bu durumda

M'nin de bir dik toplam terimidir. Sonuç olarak M saf-parçalanabilirdir. Uyarı 2.50 yardımıyla, herhangi bir modül saf-parçalanabilir olduğundan R, sağ saf yarı basit halkadır.

$(2) \Longrightarrow (4)$ aşikardır ve $(4) \Longrightarrow (2)$ Lemma 3.32 yardımıyla açıktır.

$(2) \Longrightarrow (8) \Longrightarrow (9)$ Aşikardır.

$(9) \Longrightarrow (2)$ M herhangi bir R-modül olsun. (9) yardımıyla, bir N p-muhtaç modülü vardır. Lemma 3.32 yardımıyla $M \oplus N$, p-muhtaç modüldür. (9) yardımıyla M, $M \oplus N$'nin dik toplam terimi olarak p-muhtaç modüldür.

$(2) \Longrightarrow (3)$ R, R-modül olarak projektiftir, dolayısıyla açıktır.

$(3) \Longrightarrow (1)$ M, herhangi bir R-modül ve T, projektif p-muhtaç R-modül olsun. T, M-projektif ve p-muhtaç olduğundan M saf-parçalanabilirdir. O zaman Uyarı 2.50 yardımıyla R sağ saf yarı basit halkadır.

$(2) \Longrightarrow (5)$ ve $(5) \Longrightarrow (6)$ Aşikardır.

$(6) \Longrightarrow (1)$ M herhangi bir R-modül olsun. R kendi üzerinde modül olarak projektif olduğundan R, M-projektif ve (6) yardımıyla R, p-muhtaç olduğundan M, saf-parçalanabilirdir. Uyarı 2.50 yardımıyla R, saf yarı basit halkadır. ■

Önerme 3.35 *Bir M modülü p-muhtaçtır ancak ve ancak $M^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} M_i$, her $i \in I$ için $M_i = M$ ile p-muhtaçtır.*

İspat: M bir modül olsun. Herhangi bir N modülü için M modülü N-projektiftir ancak ve ancak herhangi bir I indeks kümesi ve her $i \in I$ için $M_i = M$ olmak üzere $M^{(I)}$, N-projektiftir.

■

Aşağıdaki önerme bir halka üzerindeki p-muhtaç injektif modüllerden bahsetmektedir.

Önerme 3.36 *Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.*

1. *$\mathcal{M}$, R halkasının tüm maksimal sol ideallerinin kümesi ve $E(R/M)$, R/M'nin injektif bürümü ile $I = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} E(R/M)$, p-muhtaçtır;*

2. *I'nın izomorfizma altındaki kopyalarının her dik çarpımı p-muhtaçtır;*

3. *I'nın izomorfizma altındaki kopyalarının her dik toplamı p-muhtaçtır;*

4. *p-muhtaç olan I'nın izomorfizma altındaki kopyalarının bir dik toplamı vardır;*

5. *Her I'yı içeren injektif modül p-muhtaçtır.*

İspat: İspat kolayca gösterilebilir. ■

3.6. P-Muhtaç Abel Gruplar

Teorem 3.37 *A bir abel grup olsun. A grubu p-muhtaçtır ancak ve ancak her p asal sayısı için $T_p(A) \neq 0$ dır.*

İspat: Bazı p asal sayıları için $T_p(A) = 0$ ise A, tüm p-grup olan N grupları için N-projektiftir. Saf-parçalanabilir olmayan p-grubun varlığı açık olduğundan A grubu p-muhtaç değildir. Diğer taraftan, tüm p asal sayıları için $T_p(A) \neq 0$ olduğu varsayılsın ve bazı N abel grupları için A grubu N-projektif olsun. $T_p(N)$'nin sınırlı ve $N/T(N)$'nin sonlu üretilmiş olduğu gösterilecektir. Bazı p asal sayıları için $T_p(N)$'nin sınırlı olmadığı varsayılsın. Bu durumda iki olası durum mevcuttur:

1. $T(N)$'nin $B_p(N)$ temel alt grubu sınırlı değildir, veya

2. $T_p(N)/B_p(N) \neq 0$ dır.

Durumlar teker teker ele alınacaktır.
Durum 1'de $T_p(A)$ ele alınsın. $T(A)$'nın $B_p(A)$ temel alt grubu sıfır değil ise o zaman $n = 1, 2, \ldots$ iken bazı $\mathbb{Z}_{p^n}$ gruplarına izomorf olan $B_p(A)$'nın (dolayısıyla A'nın) dik toplam terimi vardır. $B_p(N)$ sınırlı olmadığından dolayı $m > n$ ile bazı $\mathbb{Z}_{p^m}$ gruplarına izomorf olan N'nin dik toplam terimi vardır. O zaman $\mathbb{Z}_{p^n}$ grubu $\mathbb{Z}_{p^m}$-projektif olmak zorundadır. Bu bir çelişkidir. $B_p(A) = 0$ ise o zaman $T_p(A)$ (dolayısıyla A) $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ grubuna izomorf olacak şekilde bir dik toplam terimine sahiptir. $B_p(N)$ sınırlı olmadığından, $f : B_p(N) \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olacak şekilde bir epimorfizma vardır. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ grubu $B_p(N)$-projektif olmak zorundadır fakat $i : \mathbb{Z}_{p^\infty} \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ birim dönüşümü için $B_p(N)$ indirgenmiş olduğundan $f \circ g = i$ sağlayacak şekilde bir $g : \mathbb{Z}_{p^\infty} \to B_p(N)$ homomorfizması yoktur.
Durum 2'de Bu durumda $T_p(N)/B_p(N)$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ye izomorf olan bir dik toplam terimine sahiptir. O halde (1) durumundan yola çıkarak A bazı $\mathbb{Z}_{p^n}$ lere veya $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ye izomorf olan dik toplam terimine sahiptir, fakat $\mathbb{Z}_{p^n}$ ve $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ grupları $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-projektif değilllerdir. Sonuçta her bir p asal sayısı için $B_p(N)$ sınırlıdır. $K = N/T(N)$ olsun. Bu durumda A grubu K-projektif olmak zorundadır. Herhangi bir p asal sayısı ele alınsın. K grubu sonsuz devirli grupların dik toplamı olacak şekilde p-temel alt grup olan F grubuna sahiptir ve K/F grubu p-bölünebilirdir. $K \neq F$

ise izomorfizma olmayan $N \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ epimorfizması vardır. A grubunun N-projektif olmadığı kolayca gösterilir. Sonuçta $N = F$ dir. Şimdi, F grubu sonlu üretilmiş değil ise tekrar $N \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^\infty}$ epimorfizması varıdr ve tekrar çelişki elde edilir. Sonuçta, K grubu sonlu üretilmiş serbest gruptur ve $N \cong T(N) \oplus K$, sınırlı p-grupların dik toplamı ile sonlu üretilmiş serbest gruptur. Böylece $\big($(Çernikov, 1954), Teorem 4, Teorem 1, Teorem 3$\big)$ yardımıyla saf-parçalanabilirdir. ■

Sonuç 3.38 *$R = \mathbb{Z}$ olsun. M maksimal ideal olmak üzere $R/M \cong \mathbb{Z}_p$ ve dolayısıyla Önerme 3.36 de belirtilen I modülü $I = \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olur. Buradan, $T_p(I) \neq 0$ olduğundan Teorem 3.37 yardımıyla I, p-muhtaçtır. Ek olarak, $R = \mathbb{Z}$ için Önerme 3.36'nin denk koşullarının sağlandığı görülmektedir.*

Sonuç 3.39 *Her sonlu üretilmiş $\mathbb{Z}$-modül saf parçalanabilirdir, fakat pp-fakir değildir. Bunun sonucu olarak, her sonlu üretilmiş $\mathbb{Z}$-modül saf parçalanabilirdir, fakat p-muhtaç değildir.*

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında (Alahmadi et. al., 2010) ile ortaya çıkan fakir modül kavramına eş olarak tanımlanan, ilk olarak (Holston et. al., 2012) de adı geçen, p-fakir modül kavramına ilişkin inceleme yapılmış ve p-fakir abel grupların yapısı araştırılmıştır. Daha sonra saf-projektif fakir modül ve saf-projektif fakir abel grup kavramları tanımlanarak sağladığı özellikler ortaya çıkarılmıştır. Son olarak p-fakir modül ve pp-fakir modülün genelleştirmesi olarak p-muhtaç modül kavramı tanımlanmış ve abel grup yapısı da incelenmiştir.

KAYNAKÇA

Alahmadi, A. N., Alkan, M. and López-Permouth, S., 2010, Poor modules: the opposite of injectivity, *Glasg. Math. J.*, 52(A):7-17p.

Alizade, R. and Büyükaşık, E., 2017, Poor and Pi-poor abelian groups, *Comm. Algebra*, 45(1):420-427p.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R., 1992, Rings and Categories of Modules, Second Edition, Springer-Verlag.

Azumaya, G. and Facchini, A., 1989, Rings of pure global dimension zero and Mittag Leffler Modules, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 62:109-122p.

Azumaya, G., Mbuntum, F. and Varadarajan, K., 1957, On M-projective and M-injective modules, *Pacific Journal of Mathematics,* 59(1).

Cohn, P. M., 1959, On the free product of associative rings, *Mathematische Zeitschrift* 71:380-398p.

Çernikov, S. N., 1954, Gruppy s sistemami dopolniaemıh podgrupp, *Math. Sb.* 35(77):93-128p.

Er, N., López-Permouth, S. and Sökmez, N., 2011, Rings whose modules have maximal or minimal injectivity domains, *Journal of Algebra*, 330:404-417p.

Facchini, A., 1998, Module Theory, Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes of modules, Birkhäuser.

Fieldhouse, D. J., 1969, Pure theories, *Mathematische Annalen*, 184:1-18p.

Fuchs, L., 2015, Abelian groups, Springer, Switzerland.

Fuchs, L., Hauptfleisch, G. J., 1973, Note on pure-projectivity of modules, *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série*, 27(2):339-344p.

Fuchs, L., Kertész, A. and Szele, T., 1953, Abelian Groups in which every serving subgroup is a direct summand, *Publ. Math. Debrecen*, 3:95-105p.

Harmancı, A., López-Permouth, S. and Üngör, B., 2015, On the pure-injectivity profile of a ring, *Comm. Algebra*, 43:4984-5002p.

Hazewinkel, M., Gubareni, N. and Krichenko, V.V., 2004, Algebras, Rings and Modules, Volume I, Kluwer Academic Publishers, Dordrect.

Holston, C., Lopéz-Permouth, Sergio R. and Orhan-Ertaş, N., 2012, Rings whose modules have maximal or minimal projectivity domain, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 216(3):673-678p.

Kasch, F., 1982, Modules and rings, Academic Press, Inc., London-New York.

Lam, T.Y., 2001, A First Course in Noncommutative Rings, Second Edition, Springer-Verlag.

Lambek, J., 1966, Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishin Company, Rhode Is land.

Lopéz-Permouth, Sergio R. and Simental, José E., 2012, Characterizing rings in terms of the extent of the injectivity and projectivity of their modules, *Journal of Algebra*, 362:56-69p.

Maclane, S., 1963, Homology, Springer-Verlag, Berlin-Heiderlberg-New York.

Maddox, B., 1967, Absolutely pure modules, *Proceedings of the American Mathematical So ciety,* 18:155-158p.

Megibben, C., 1970, Absolutely pure modules, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 26:561-568p.

Melkersson, L., 1995, Cohomological properties of modules with secondary represetations, *Mathematica Scandinavica,* 77:197-208p.

Rotman, J. J., 2009, An Introduction to Homological Algebra, Second Edition, Springer-New York.

Wisbauer, R., 1991, Foundations of Module and Ring Theory, Gordon and Breach Science Publishers.

ÖZGEÇMİŞ

Bu tezin sahibi Damla DEDE SİPAHİ 21/11/1987 tarihinde Antalya/Türkiye de dört çocuktan en küçükleri olacak şekilde ikiz teki olarak dünyaya gelmiştir. İki ablası ve bir ikiz kardeşi olacak şekilde üç kız kardeşe sahiptir. İlköğretim ve lise hayatı Antalya'da ailesiyle geçmiştir. Üniversite hayatı 2005-2010 yılları arasında lisans eğitimini aldığı Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü ile başlamıştır. Yüksek Lisans eğitimini Doktor Öğretim Üyesi Nesrin TUTAŞ danışmanlığında Akdeniz Üniversitesi, Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Ana Bilim Dalı'na bağlı olarak 2010-2013 yılları arasında tamamlamıştır. Doktora eğitimine Prof. Dr. Refail ALİZADE danışmanlığında Yaşar Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı'na bağlı olarak 2013-2019 yılları arasında tamamlamıştır. TÜBİTAK tüm lisansüstü eğitimi sürecinde (toplamda altı yıl) teşvik bursu temin ederek eğitim ücretlerinin büyük kısmını karşılamıştır. Doktora eğitimi süresi içerisinde danışmanıyla beraber *"Modules and abelian groups with minimal (pure-) projectivity domains"* adlı çalışmaya imza atmıştır. Evli ve bir çocuk annesi olarak İzmir'de yaşamına devam etmektedir.