T.C.

YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CEBİRSEL YAPILARDA TÜREV

UFUK ÇELİK

DANIŞMAN

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

İzmir,2014

Ufuk ÇELİK tarafından **Yüksek Lisans** tezi olarak sunulan "**Cebirsel Yapılarda Türev**" başlıklı bu çalışma Y.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Y.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 16/07/2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER**	
Raportör Üye	**: Doç. Dr. Tahsin ÖNER**	
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM**	

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”Cebirsel Yapılarda Türev” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

…/…/…

Ufuk ÇELİK

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans dönemimde her konuda yanımda olan, emeğini ve sabrını asla esirgemeyen, değerli bilgileriyle her zaman bu yolda bana ışık tutan danışmanım **Sayın Prof. Dr. Mehmet TERZİLER'**e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez yazım sürecinde bana destek olan eşim **Sena ÇELİK'**e gönülden teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez esas olarak iki bölümden oluşuyor. Birinci bölümde MV-cebirleri üzerinde $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri kullanılarak türev tanımlanıyor ve özellikleri inceleniyor. Türev $\ominus$ ve $\odot$ işlemleri yardımıyla tanımlandığında ilginç sonuçlar elde ediliyor. İkinci bölümde implikatif ve kafes implikatif cebirler tanıtılıyor ve kafes implikatif cebirlerinde türevler çalışılıyor. Kerd nin bir süzgeç olduğu ve kafes implikatif cebirlerinin her kafesinin d-invaryant olduğu kanıtlanıyor.

ABSTRACT

This thesis consists essentially of two chapters. In the first chapter, we define a derivation on MV-algebras using the operations $\oplus$ and $\odot$, and we investigate some properties of that derivation. İf the derivation is defined via the operations $\ominus$ and $\odot$, we obtain some interesting results. İn the second chapter, we introduce implicative algebras and lattice implicative algebras and define derivations on the latter. We prove that Kerd is a filter and every lattice of lattice implicative algebra is d-invariant, where d is a derivation on lattice implicative algebra.

GİRİŞ

MV-cebirleri Lukasiewicz lojiğinin cebirsel semantiğidir; 1920 lerde Lukasiewicz tarafından tanıtılan çok değerli (Many Valued) lojiğe Lukasiewicz lojiği denir. MV-cebirleri önermeler lojiğinin $\rightarrow$ bağlacını içeren sınırlı, değişmeli BCK-cebirleri sınıfı ile çakışır.

C.C. Chang ([5], [6]) Lukasiewicz lojiğini çalışmak için MV-cebirlerini tanımladı. MV-cebirleri dilinde yazılmış önermesel formüllerin cebirinden bi A MV-cebirine bir değer atama (A-valuation) dönüşümü aracılığıyla A-totoloji kavramını tanımladı. Eğer A=[0,1] alınırsa o zaman [0,1]-totolojilerinin kümesini Lukasiewicz lojiğini betimler. Chang (1958, 1959) şu tamlık teorimini kanıtladı:

“[0,1]” aralığı üzerindeki (standart) MV-cebirinde geçerli her MV-cebiri denklemi her MV-cebirinde doğrudur”.

Bunun denk bir ifadesi şudur: “ MV-cebirleri [0,1]-totolojilerinin kümesi olarak tanımlanan sonsuz değerli Lukasiewicz lojiğini karakterize eder”.

MV-cebirleri matematiğin çeşitli alanlarında yoğun biçimde çalışılmaktadır; örneğin, topolojik uzaylar, modal lojik ve bilgisayar bilimleri gibi. MV-cebirlerin denk formulasyonları arasında genel kabul göreni Mangani [13] ye aittir. Bu konuda tarihsel bilgi için [4] ve temel kavram ve özellikler için [7] en önemli kaynaklardır.

Bu tezde; ilk kez Szasz [16] tarafından kafesler için tanımlanan türev kavramı MV-cebirlerine taşınarak halka ve kafeslerdeki türevlere ilişkin koşut sonuçlar kanıtlanıyor.

Lojik değerli kafes yapılarını araştırmak için Xu Yeng [21] in ortaya atmış olduğu implikatif cebirler ve kafes implikatif cebirler arasındaki bağlantılar [19], [22] ve [12] esas alınarak inceleniyor. Bu cebirlerde tanımlanan türevlerle Fix, Ker, vb. kavramlar, klasıik halkalar kavramına paralel olarak işleniyor.

BÖLÜM 1

1. MV–CEBİRLERİ ve TÜREVLER

MV-cebiri kavramı, sonsuz değerli Lukasiewicz önermeler lojiğinin tamlık teoreminin bir cebirsel kanıtını vermek amacıyla **[5]** ve **[6]**'da C.C. Chang tarafından tanımlanmıştır. Son zamanlarda MV-cebirleri yoğun biçimde çalışılmaktadır. Günümüzde genel kabul gören MV-cebir tanımı P.Mangani **[13]**'ye aittir. MV-cebirleri hakkında tarihsel bilgi için **[4]**'e başvurulabilir. MV-cebirlerinin temel kavram ve özellikleri için **[7]** önemli bir kaynaktır.

Bu bölümde **[7]** esas alınarak MV-cebirlerinin bir tanımı, kapsadığı işlemlerin özellikleri homomorfizma ve idealleri veriliyor. **[16]'**da Szasz tarafından ilk kez kafesler için tanımlanan türev kavramını MV-cebirlerinde uygulayarak bazı ilginç cebirsel sonuçlar elde ediliyor.

1.1 MV–Cebirleri

Tanım 1.1.1 Bir MV-cebir; A boştan farklı bir küme, $\oplus$ bir ikili işlem, * bir birli işlem ve 0 bir sabit olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $\langle A, \oplus, *, 0\rangle$ yapıdır.

MV1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

MV2) $x \oplus y = y \oplus x$

MV3) $x \oplus 0 = x$

MV4) $(x^*)^* = x$

MV5) $x \oplus x^* = 0^*$

MV6) $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$

MV1) – MV3) aksiyomları <A, ⊕, 0> ın değişmeli bir monoidin aksiyomlarıdır. Geleneğe uyarak bir <A, ⊕, 0> MV-cebiri evrenini A ile gösteriyoruz. {0} kümesinin bir MV-cebirine aşikar bir örnek oluşturduğu açıktır; A evreni birden çok elemana sahip bir MV-cebirine aşikar olmayan MV- cebir denir.

Örnek 1.1.2 A=[0,1] gerçel aralığı olsun ve her x,y ∈ [0,1] için $x \oplus y = \min\{1, x+y\}$ ve $x^* = 1-x$ tanımlarını yapalım. O zaman <[0,1], ⊕,*,0> bir MV-cebiridir.

Evrensel matematikteki gibi bir A MV-cebirinin bir S alt kümesi A'nın sıfır elemanını içeriyorsa ve A'nın S'ye kısıtlanan işlemlerine kapalı ise A'nın bir alt cebiridir.

Örnek 1.1.3

(1) [0,1] deki rasyonel sayılar ve her bir $n \geq 2$ tam sayısı için n elemanlı

$$L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$$

kümesi [0,1] in alt cebirlerine örnek sunar.

(2) A bir MV-cebir ve X bir küme olmak üzere ⊕, * işlemleri ve 0 elemanı mikro tabanlı tanımlandığında tüm f: X → A fonksiyonlarının A^X kümesi bir MV-cebirdir. [0,1] den [0,1] 'e sürekli fonksiyonlar $[0,1]^{[0,1]}$ MV-cebirinin bir alt cebiridir.

Her bir A MV–cebiri üzerinde 1 sabitini ve ⊙, ⊖ işlemlerini şöyle tanımlıyoruz.

$1=0^*$, $x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*$, $x \ominus y = x \odot y^*$

Bu tanımdan sonra $0 \neq 1$ ise bir MV- cebiri aşikar değildir diyeceğiz.

Aşağıdaki eşitlikler MV4) aksiyomunun dolaysız sonuçlarıdır:

MV7) $1^* = 0$

MV8) $x \oplus y = (x^* \odot y^*)^*$

Bunun üzerine MV5) ve MV6) aksiyomları aşağıdaki gibi yazılabilir:

MV5′) $x \oplus 1 = 1$

MV6′) $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$

MV6) da $y = 0^*$ yazılırsa

MV9) $x \oplus x^* = 1$

elde edilir.

Uyarı 1.1.4 [0,1] MV-cebirinde $x \odot y = \max\{0, x+y-1\}$ ve $x \ominus y = \max\{0, x-y\}$ olduğu görülebilir.

Aşağıdaki lemma bir MV-cebiri üzerinde bir sıralama tanımlama olanağı verir.

Lemma 1.1.5 **[7]** A bir MV-cebir ve $x, y \in A$ olsun.

O zaman aşağıdakiler denktir :

(1) $x^* \oplus y = 1$;

(2) $x \odot y^* = 0$;

(3) $y = x \oplus (y \ominus x)$;

(4) $x \oplus z = y$ olacak şekilde bir $z \in A$ vardır.

Tanım 1.1.6 A bir MV-cebir ve $x, y \in A$ olsun. Lemma 1.1.5‘in denk koşullarını sağlayan $x \leq y$ bağıntısına A’nın doğal sıralaması denir. Başka bir deyişle $x \leq y$,

Örneğin, $x \odot y^* = 0$ olarak tanımlanabilir.

Önerme 1.1.7 Bir A MV-cebiri üzerindeki doğal sıralama bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Kanıt Yansımalılık MV9)'a denktir; ters simetri Lemma 1.1.5 (2), (3)'den ve geçişmelilik Lemma 1.1.5(4) den sonuçlandırılır.

Lemma 1.1.8 [7] A bir MV-cebir olsun. Her bir $a \in A$ için a^*

$$\begin{cases} a \oplus x = 1 \\ a \odot x = 0 \end{cases}$$

denklemlerinin tek x çözümüdür.

Kanıt Lemma 1.1.5 (1) ve (2) dikkate alındığında $a \oplus x = 1$, $a^* \leq x$ ve $a \odot x = 0$, $x \leq a^*$ yazılır.

Buradan $a^* \leq x \leq a^*$, yani $a^* = x$ elde edilir.

Bir MV-cebiri üzerinde doğal sıralamanın bazı özellikleri aşağıda kanıtsız olarak veriliyor:

Lemma 1.1.9 [7]

Her A MV-cebirinde doğal sıralama aşağıdaki özelliklere sahiptir :

(1) $x \leq y \Leftrightarrow y^* \leq x^*$;

(2) $x \leq y$ ise her bir $z \in A$ için $x \oplus z \leq y \oplus z$ ve $x \odot z \leq y \odot z$ dir.

(3) $x \odot y \leq z \Leftrightarrow x \leq y^* \oplus z$.

Önerme 1.1.10 [7]

Her bir A MV-cebiri üzerinde doğal sıralama bir kafes yapısı belirler. Daha açık olarak, x ve y elemanlarının $x \vee y$ birleşimi ve $x \wedge y$ kesişimi aşağıdaki gibidir:

$$x \vee y = (x \odot y^*) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y,$$

$$x \wedge y = (x^* \vee y^*)^* = x \odot (x^* \oplus y).$$

Önerme 1.1.10'da yer alan ifadeler [5] de kullanılanların, notasyon farkıyla aynısıdır.

Önerme 1.1.11[7]

Aşağıdaki denklemler her MV-cebirinde geçerlidir :

(1) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$,

(2) $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$,

(3) $(x \ominus y) \wedge (y \ominus x) = 0$

Teorem 1.1.12 [8]

A bir MV–cebir ve $x,y,z \in A$ olsun. Ozaman aşağıdakiler geçerlidir:

(1) $x \ominus 0 = x$, $0 \ominus x = 0$, $x \ominus x = 0$, $1 \ominus x = x^*$, $x \ominus 1 = 0$

(2) $x \odot y \le x \wedge y \le x$, $y \le x \vee y \le x \oplus y$,

(3) $x \oplus y = 0$ ise $x = 0 = y$ ve $x \odot 1 = x$ dir.

(4) $x \oplus y = y \Leftrightarrow x \wedge y^* = 0$

(5) $x \odot y = x \odot z$ ve $x \oplus y = x \oplus z$ ise $y = z$ dir.

1.1.1. Homomorfizmalar ve İdealler

Tanım 1.1.1.1 A ve B MV-cebirler olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f{:}A \to B$ fonksiyonuna bir homomorfizma denir.

H1) $h(0) = 0$,

H2) $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$,

H3) $h(x^*) = h(x)^*$

Geleneği izleyerek h bire-bir ise h‘ye bir injektif homomorfizma ya da bir gömme ve örten ise sürjektif diyeceğiz. Bir injektif ve sürjektif homomorfizmaya bir izomorfizma denir. Eğer A’dan B üzerine bir izomorfizma varsa A ve B izomorftur denir ve $A \simeq B$ yazılır.

Bir $h : A \to B$ homomorfizmasının çekirdeği

$Ker(h) := h^{-1}(0) = \{x \in A : h(x) = 0\}$ kümesidir. Amaç bundan sonra kesimin kalanında homomorfizmaların çekirdeklerini karakterize etmek olacaktır.

Tanım 1.1.1.2 A bir MV-cebir ve I, A’nın bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağladığında I‘ye A’nın bir ideali denir.

I1) $0 \in I$,

I2) $x \in I$, $y \in A$ ve $y \leq x$ ise $y \in I$ dır.

I3) $x \in I$ ve $y \in I$ ise $x \oplus y \in I$ dır.

I4) A’daki her bir x ve y için $(x \ominus y) \in I$ veya $(y \ominus x) \in I$ koşulları sağlanıyorsa I’ya bir asal idealdir denir. A’nın hiçbir öz ideali tarafından kapsanmayan bir idealine maksimal ideal denir.

Önerme 1.1.1.3 [7] A, B MV-cebirler ve $h: A \to B$ bir homomorfizma olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

(1) B’nin her J ideali için $h^{-1}(J) := \{x \in A : h(x) \in J\}$

A’nın bir idealidir. Özellikle, Ker (h), A’nın bir idealidir;

(2) $h(x) \leq h(y) \Leftrightarrow x \ominus y \in Ker(h)$;

(3) h injektiftir $\Leftrightarrow Ker(h) = \{0\}$;

(4) $Ker(h) \neq A \Leftrightarrow$ B aşikar değildir;

(5) Ker (h) A'nın bir asal idealidir ancak ve ancak B aşikar değildir ve B'nin bir alt cebiri olarak h(A) bir MV-cebiridir.

Önerme 1.1.1.4 [7]

A,B,C MV-cebirler ve $f:A \to B$ ve $g:A \to C$ sürjektif homomorfizmalar ise o zaman ancak ve ancak $h \circ f = y$ olacak şekilde bir sürjektif homomorfizma $h:B \to C$ varsa Ker (f) $\subseteq$ Ker (g) dir. Bu h homomorfizması ancak ve ancak Ker (f) = Ker (g) ise bir izomorfizmadır.

Önerme 1.1.1.4 [7] A bir MV-cebir ise A'nın tüm öz idealleri asaldır.

Kanıt I, A'nın bir öz ideali olsun. $h: A \to A / I$ bir sürjektif homomorfizma olduğu için A/I de bir MV-cebirdir. Dolayısıyla Önerme 1.1.1.3(5) den I bir asal ideal olmak zorundadır.

Önerme 1.1.1.5[7]

A bir MV-cebir, J, A'nın bir ideali ve $a \notin A \setminus J$ ise o zaman $J \subseteq P$ ve $a \notin P$ olacak şekilde A'nın bir P asal ideali vardır.

Sonuç Teorem 1.1.1.6

Bir MV-cebirinin her öz ideali asal ideallerinin bir kesişimidir.

Sonuç Teorem 1.1.1.7

Her aşikar olmayan MV-cebirinin bir maksimal ideali vardır.

Önerme 1.1.1.8 [7]

A,B MV-cebirler ve M, B'nin bir maksimal ideali olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

(1) Her $h: A \to B$ homomorfizması için h^{-1} (M) ters görüntüsü A'nın bir maksimal idealidir.

(2) B'nin her hangi bir S alt cebiri için $S \cap M$, S nin bir maksimal idealidir.

1.2 MV–Cebirleri Üzerinde Türevler

Türev kavramı cebirsel sistemlerin yapısının ve özelliğinin araştırılmasını kolaylaştırır. Halkalarda türevler [2],[16],[14],[9] da çalışılmıştır. [2] de türev kavramı BCI-cebirlerine uygulanmış ve ilk kez [16]'da kafesler için tanıtılan türev [11]'de ayrıntılı bir şekilde tartışılmıştır. Burada halkalardaki türev kavramını MV-cebirlerine uyguluyoruz ve özelliklerinden bazılarını araştırıyoruz.

Tanım 1.2.1 A bir MV-cebir olsun. Her $x,y \in A$ için

$$d(x \odot y) = (dx \odot y) \oplus (x \odot dy) \qquad (1.2.1)$$

ise $d:A \to A$ fonksiyonuna A'nın bir türevi denir. Genel olarak d(x) yerine dx yazılacaktır.

Örnek 1.2.2 A = {0,a,b,1} ve $\oplus$,* işlemleri çizelgelerdeki gibi verilsin.

$\oplus$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Çizelge 1

*	0	a	b	1
	1	b	a	0

Çizelge 2

O zaman (A, $\oplus$,*,0) bir MV-cebirdir. Bir $d : A \to A$ dönüşümünü

$$d(x)=\begin{cases} 0 & x = 0, a, 1 \ ise \\ a & x = b \ ise \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Şimdi d(a⊙b) =d ((a* ⊕ b*) *) = d ((b⊕ a)*) = d (1*) =d(0) =0 iken (da ⊙ b) ⊕ (a ⊙ db) = (0 ⊙ b) ⊕ (a ⊙ a) = 0 ⊕ a = a elde edilir. O halde d , A'nın bir türevi değildir.

Örnek 1.2.3 A bir MV-cebiri olsun ve d : A → A, x ↦ dx =0 olarak tanımlansın. O zaman d, A üzerinde bir türevdir ve d'ye sıfır türev denir.

Örnek 1.2.4 [12] A = {0,a,b,c,d,1} ve ⊕ , * aşağıdaki çizelgelerde verilsin.

⊕	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	c	d	c	1	1
b	b	d	b	1	d	1
c	c	c	1	c	1	1
d	d	1	d	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Çizelge 3

*	0	a	b	c	d	1
	1	d	c	b	a	0

Çizelge 4

Bir d: A → A dönüşümü $d(x)=\begin{cases} 0 & x = 0, a, c \ ise \\ b & x = b, d, 1 \ ise \end{cases}$

olarak tanımlayalım. Önce (A, ⊕,*,0)'nın bir MV-cebir olduğu gösterilebilir. Sonra;

x ⊙ y = (x* ⊕ y*)* tanımını kullanarak d'nin A üzerinde bir türev olduğu gösterilebilir.

Örneğin a ve b elemanları için

$d(a \odot b) = d((a^* \oplus b^*)^*) = d((d \oplus c)^*)=d(1^*) = d(0) =0$ ve

$(da \odot b) \oplus (a \odot db) = (0 \odot b) \oplus (a \odot b) = 0 \oplus 0 = 0.$

Önerme 1.2.5 [1] A bir MV-cebiri olsun. Her $x,y \in A$ için aşağıdakiler denktir.

(1) $x \leq y$,

(2) $y \oplus x^* = 1$,

(3) $x \odot y^* = 0$

Aşağıda A üzerinde bir türevin özellikleri ele alınıyor.

Önerme 1.2.6 A bir MV-cebir ve d, A üzerinde bir türev olsun. O zaman her $x \in A$ için aşağıdakiler vardır:

(1) $d0 = 0$,

(2) $dx \odot x^* = x \odot dx^* =0$,

(3) $dx = dx \oplus (x \odot d1)$,

(4) $dx \leq x$,

(5) I, A'nın bir ideali ise $d(I) \subseteq I$ dır.

Kanıt

1. Tanım 1.2.1 de $x = 0$ alınırsa

$d(0) = d(0 \odot 0) = (d0 \odot 0) \oplus (0 \odot d0) = 0$ elde edilir.

2. $x \in A$ olsun. O zaman

   $0 = d0 = d(x \odot x^*) = (dx \odot x^*) \oplus (x \odot dx^*)$ dir ve Teorem 1.1.12.(3) den

   $dx \odot x^* = 0 = x \odot dx^*$ elde edilir.

3. $x \in A$ olsun. O zaman

   $dx = d\,(x \odot 1) = (dx \odot 1) \oplus (x \odot d1)$

   $= dx \oplus (x \odot d1)$ Teorem 1.1.12. (3) elde edilir.

4. Önce $x \odot x^* = 0$ olduğunu anımsatalım.

   Şimdi $d0 = d\,(x \odot x^*) = (dx \odot x^*) \oplus (x \odot dx^*)$ yazılır. (1) ve (2) den $dx \odot x^* = 0$ ve $x\, {}^*dx^* = 0$ elde edilir. Artık tanım 1.1.6 $dx \leq x$ verir.

5. $y \in d\,(I)$ olsun. O zaman bir $x \in I$ için $y = dx$ dir. (4) uyarınca $y = dx \leq x$ sonuçlanır. I bir ideal olduğu için $y \in I$ ve dolayısıyla $d(I) \subseteq I$ elde edilir.

Önerme 1.1.10 da belirlenen dağılmalı kafese 0,1 ekleyelim ve bunu L(A) ile gösterelim.

Tanım 1.2.7 A bir MV-cebir olsun. L(A)'nın tüm tümlenmiş elemanlarının kümesine A'nın Boole merkezi denir ve B(A) ile gösterilir.

Önerme 1.2.8 [7]

A bir MV-cebir olsun. O zaman her $x \in A$ için aşağıdaki koşullar denktir

1. $x \in B(A)$,
2. $x \vee x^* = 1$,
3. $x \wedge x^* = 0$,
4. $x \oplus x = x$,
5. $x \odot x = x$,
6. her $y \in A$ için $x \oplus y = x \vee y$,

7. her $y \in A$ için $x \odot y = x \wedge y$

Önerme 1.2.9 A bir MV-cebir ve d A üzerinde bir türev olsun. O zaman

1. $d(B(A)) \subseteq B(A)$
2. her $x,y \in B(A)$ için $d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$.

Kanıt

(1) $y \in d(B(A))$ olsun. O zaman $y = dx$ olacak şekilde bir $x \in B(A)$ vardır.

Önerme 1.2.8 (5) den $dx = d(x \odot x) = (dx \odot x) \oplus (x \odot dx)$ yazabiliriz. $x \in B(A)$ ve $dx \leq x$ olduğundan $x \odot dx = x \wedge dx = dx$ dir. O halde $dx = dx \oplus dx$, yani $y = dx \in B(A)$ elde edilir.

(2) $x,y \in B(A)$ olsun. O zaman önerme 1.2.8 (7) den

$d(x \wedge y) = d(x \odot y) = (dx \odot y) \oplus (x \odot dy) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$ yine önerme 1.2.8 (6)'nın sonucudur.

Sonuç Teorem 1.2.10 A bir MV-cebir ve $B(A) = \{0,1\}$ olsun. d, A üzerinde bir türev ise o zaman $d(1) = 0$ ya da $d(1) = 1$dir.

Kanıt $B = \{0,1\}$ ise önerme 1.2.9 (1) den $d(1) \in B$ dir. O halde $d(1) \in \{0,1\}$, $d(1) = 0$ ya da $d(1) = 1$ verir.

Lemma 1.2.11 [8]

d, A bir MV-cebiri üzerinde bir türev olsun. O zaman $x \wedge d1 \wedge (dx)^* = 0$ ve dolayısıyla

$x \wedge d1 \wedge x^* = 0$ dır.

Teorem 1.2.12 d bir A MV-cebir üzerinde bir türev olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

(1) $x \leq d1$ ise $dx=x$ ve $x \in B(A)$ dır.

(2) $d1 \leq x$ ise $d1 \leq dx$ dir.

(3) $d(d(1)) = d(1)$ dir.

Kanıt

(1) $x \leq d1$ olsun.O zaman $x \wedge d1 = x$ ve Lemma 1.2.11 den $x \wedge (dx)^* = 0$ sonuçlanır, bu ise $x \leq dx \leq x$ yani $dx = x$ verir. Ayrıca, yine aynı Lemma'dan $x \wedge d1 \wedge x^* = x \wedge x^* = 0$ dır. O nedenle $x \in B(A)$, önerme 1.2.8 de (1) ve (3) ün denkliğinden elde edilir.

(2) $d1 \leq x$ olsun. O zaman Lemma 1.2.11 uyarınca $(dx)^* \odot d_1 = 0$ ve dolayısıyla $d_1 \leq d_x$ olur.

(3) (1) den sonuçlandırılır.

Tanım 1.2.13 A bir MV-cebir ve $d:A \to A$ bir fonksiyon olsun. $x,y \in A$ için $x \leq y$, $dx \leq dy$ yi gerektiriyorsa d ye bir izoton veya monoton ya da sıra koruyan fonksiyon denir.

Aşağıdaki teorem A üzerinde izoton bir türevin temel özelliklerini vermektedir.

Teorem 1.2.14 [8]

d bir A MV-cebiri üzerinde bir türev olsun. O zaman her $x,y \in A$ için aşağıdakiler denktir:

(0) izoton

(1) $dx \leq d1$

(2) $dx = d1 \odot x$

(3) $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

(4) $d(x \vee y) = dx \vee dy$

(5) $d(x \oplus y) = dx \oplus dy$

(6) $d(x \odot y) = dx \odot dy$

Kanıt (0) $\Longrightarrow$ (1) aşikardır.

(1) $\Longrightarrow$ (2) : $dx \leq x$ nedeniyle $d1 \odot dx \leq x \odot d1$ dir. Öte yandan $dx \leq d1$ ve $d1 \in B(A)$ olduğundan $dx \odot d1 = dx \wedge d1 = dx$ elde edilir. Böylece

$x \odot d1 \leq dx \oplus (x \odot d1) = dx \leq x \odot d1$ ve buradan her $x \in A$ için $dx = x \odot d1$ e ulaşılır.

(0) : $x \leq y$ olsun. O zaman $x \odot d1 \leq y \odot d1$ dir ve (2) den $dx \leq dy$ elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$ (3) : $d1 \in B(A)$ nedeniyle aşağıdakiler vardır :

$$
\begin{aligned}
d(x \wedge y) &= d1 \odot (x \wedge y) && \text{(2) den} \\
&= d1 \wedge (x \wedge y) \\
&= (d1 \wedge x) \wedge (d_1 \wedge y) \\
&= dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

(3) $\Longrightarrow$(0) : $x \leq y$ olsun. O zaman $x \wedge y = x$ ve buradan da $d(x \wedge y) = dx$ ve (3) den $dx \wedge dy = dx$ yani $dx \leq dy$ elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$(4) : L(A) dağılmalı bir kafes ve $d(1) \in B(A)$ olduğu için

$$
\begin{aligned}
d(x \vee y) &= d1 \odot (x \vee y) && \text{(2) den} \\
&= d1 \wedge (x \vee y) \\
&= (d1 \wedge x) \vee (d1 \wedge y) && \text{(Dağılma)} \\
&= dx \vee dy
\end{aligned}
$$

elde edilir.

(4) $\Longrightarrow$ (2) : Kanıt (3) $\Longrightarrow$ (0)'ın kanıtına benzerdir.

(2) $\Longrightarrow$(5) : Bunun için bir sonuca gerek vardır.

Lemma 1.2.13.[10] A bir MV- cebir, a $\in$ B(A) ve x,y $\in$ A olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

(1) $a \wedge (x \oplus y) = (a \wedge x) \oplus (a \wedge y)$

(2) $a \vee (x \oplus y) = (a \vee x) \oplus (a \vee y)$

Şimdi Lemma 1.2.13 (1) den

$d(x \oplus y) = d1 \odot (x \oplus y) = (d1 \odot x) \oplus (d1 \odot y) = dx \oplus dy$ sonuçlanır.

(5) $\Longrightarrow$(1) : MV5') den $d(1) = d(x \oplus 1)$

$=dx \oplus d1$ (5) den

yazılır. O halde her x $\in$ A için $dx \leq d1$ elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$ (6) : $d(x \odot y) = d1 \odot (x \odot y)$

$=d1 \odot d1 \odot x \odot y$

$=(d1 \odot x) \odot (d1 \odot y)$

$=dx \odot dy$

elde edilir.

(6) $\Longrightarrow$ (1) : $dx = d(x \odot 1)$ Teorem 1.1.12 (3)

$= dx \odot d1$ (6) dan

$\leq d1$

elde edilir.

Teorem 1.2.14 [8] $d:A \rightarrow A$ bir MV-cebirinin bir izoton türevi olabilmesi için d'nin bir kafes türevi yani $d(x \wedge y) = (dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$ ve $d(A) \subseteq B(A)$ olması bir gerek ve yeter koşuldur.

Teoremdeki $d(A) \subseteq B(A)$ koşulu kaldırılırsa izoton bir d MV-cebiri türevi bir kafes türevidir fakat d izoton olmazsa bir kafes türevi bir MV-cebiri türevi olmayabilir.

Sonuç Teorem 1.2.15 d bir A MV-cebirinin bir türevi olsun. Eğer d izoton ise her $x \in A$ için $ddx = dx$ dir. Ayrıca $d(A) \subseteq d(B)$ dir.

Bu sonucun da tersi genelde doğru değildir.

Tanım 1.2.16 A bir MV-cebiri ve $d: A \rightarrow A$ bir fonksiyon olsun. d nin sabit elemanlarının kümesi $Fix_d(A) := \{x \in A: dx = x\}$ ile tanımlanır.

Önerme 1.2.17 A bir MV-cebir ve d A üzerinde bir türev olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

(1) $d(1) \in Fix_d(A)$,

(2) $x \leq y$ ve $y \in Fix_d(A)$ ise $x \in Fix_d(A)$ dır.

(3) d izoton ise $Fix_d(A)$, A nın bir idealidir.

Kanıt

(1) Teorem 1.2.12. (3) den açıktır.

(2) $x \leq y$ ve $y \in Fix_d(A)$, yani $dy = y$ olsun. O zaman

$dx = x$ olduğunu göstereceğiz. Şimdi

$dx = d(x \wedge x) = d((x \oplus y^x) \odot y)$ (Önerme 1.1.10)

$= (d(x \oplus y^x) \odot y) \oplus ((x \oplus y^x) \odot dy)$ (Türev Tanımı)

$= (d(x \oplus y^x) \odot y) \oplus ((x \oplus y^x) \odot y)$ (dy=d)

$= (d(x \oplus y^x) \odot y) \oplus (x \wedge y)$ (Önerme 1.1.10)

$= (d(x \oplus y^x) \odot y) \oplus x$ $(x \leq y)$ dir.

Buradan $x \leq dx \leq x$, yani $dx = x$ elde edilir.

(3) $x,y \in Fix_d(A)$ için $x \oplus y \in Fix_d(A)$ olduğunu gösterirsek (2) ile birlikte $Fix_d(A)$ nın bir ideal olduğu kanıtlanmış olur. Şimdi $x \in Fix_d(A)$ ise $x = dx$ ve Teorem 1.2.14(2) den $x = dx = d(1) \odot x$ yazabiliriz; aynı şekilde $y \in Fix_d(A)$ ise $y = dy = d(1) \odot y$ dir. Artık Teorem 1.12.12(5) gereği $x \oplus y \in Fix_d(A)$ elde edilir.

Bu ölümü aşağıdaki teorem ile sonlandırıyoruz.

Teorem 1.2.18 d1 ve d2 bir A MV-cebiri üzerinde iki izoton türev olsun. O zaman $d1 = d2$ elemanı için $Fix_{d1}(A) = Fix_{d2}(A)$ elemanı bir gerek ve yeter koşuldur.

Kanıt: $d1 = d2$ ise $Fix_{d1}(A) = Fix_{d2}(A)$ açıktır. Şimdi $Fix_{d1}(A) = Fix_{d2}(A)$ ve $x \in A$ olsun. Sonuç teorem 1.2.15 den $d1(d1x) = d1x$ ve $d2(d2x) = d2x$ yazabiliriz. Bu durumda $d1x \in Fix_{d1}(A)$ ve $d2x \in Fix_{d2}(A)$ dır. O halde $Fix_{d1}(A) = Fix_{d2}(A)$ varsayımından $d2(d1x) = d1x$ ve $d1(d2x) = d2x$ olur. $d1x \leq x$ ve d2 nin izoton olmasından $d1x = d2(d1x) \leq d2x$ elde edilir. Aynı şekilde $d2x \leq d1x$ vardır. O halde her $x \in A$ için $d1x = d2x$ sonucuna ulaşılır.

2. İMPLİKATİF CEBİRLER ve TÜREVLER

Kafes değerli lojik sistemlerini araştırmak için [21] de Xu Yang, kafes ile implikatif cebiri birleştirerek, kafes implikatif cebiri kavramını tanıttı. Bu cebirin bazı özellikleri [19], [22] de tartışılmıştır. Kafes implikatif cebirlerinin denk bir tanımı [12] de veriliyor.

Bu bölümde kafes implikatif cebir ve implikatif cebirler tanımlanarak aralarındaki bağlantılar ele alınıyor. Daha sonra kafes implikatif cebirde türev kavramı tanımlanıyor. Türevler aracılığı ile $Fix_d(L)$ ve Kerd betimleniyor. Nihayet d bir implikatif cebir üzerinde bir türev ise her F süzgecinin d-invaryant olduğunu kanıtlıyoruz.

2.1 İmplikatif cebirler

Bu kesimde verilen tanım ve sonuçların çoğu [17], [18] ve [11] den esinlenmiştir.

Tanım 2.1.1 L boştan farklı bir küme; $\rightarrow$ ve $'$, L üzerinde ikili ve birli işlemler ve 0,1 L ye ait sabit elemanlar olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlandığında $(L,\rightarrow,',0,1)$ cebirine bir implikatif cebir denir.

(1) $x\rightarrow(y\rightarrow z)=y\rightarrow(x\rightarrow z)$

(2) $1\rightarrow x=x$

(3) $x\rightarrow 1=1$

(4) $x\rightarrow y=y'\rightarrow x'$

(5) $(x\rightarrow y)\rightarrow y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$

(6) $0'=1$

Lemma 2.1.2 L Bir implikatif cebir olsun. O zaman

(1) Her $x \in L$ için $x \to x = 1$ dir.

(2) $0' = 1$ dir.

Kanıt

1. Tanım 2.1.1 den

$1 = (x \to 1) \to 1$ (2)

$= (1 \to x) \to x$ (5)

$= x \to x$ (2)

elde edilir.

2. Yine tanımdan

$1' = 1 \to 1'$ (3)

$= 0' \to 1'$ (6)

$= 1 \to 0$ (4)

$= 0$ (2)

bulunur.

L üzerinde $\leq$ bağıntısını $x \leq y :\Leftrightarrow x \to y = 1$ olarak tanımlayalım.

Lemma 2.1.3 Bir implikatif cebirde aşağıdaki özellikler vardır.

(a) $0 \to x = 1$

(b) $x \to y = 1 = y \to x \Leftrightarrow x = y$

(c) $x \to y = 1$ ve $y \to z = 1$ ise $x \to z = 1$ dir

(d) $x \leq y \Leftrightarrow z \to x \leq z \to y$ ve $y \to z \leq x \to z$ dir

(e) $((x \to y) \to y) \to y = x \to y$

(f) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$

Kanıt

(a) $0 \to x = x' \to 0'$	Tanım 2.1.1(4)
$= x' \to 1$	Tanım 2.1.1(6)
$=1$	Tanım 2.1.1 (3)
(b) $\Longrightarrow$: $x = 1 \to x$	Tanım 2.1.1 (2)
$=(y \to x) \to x$	Hipotez
$=(x \to y) \to y$	Tanım 2.1.1 (5)
$=1 \to y$	Hipotez
$=y$	Tanım 2.1.1 (2)
$\Longleftarrow$: $x=y$ ise o zaman $x \to x = 1$ ve $y \to y = 1$	Lemma 1.2

(1) den amaçlanır.

(c) $x \to y = 1 = y \to z$ varsayalım o zaman

$x \to z = x \to (1 \to z)$	Tanım 2.1.1 (2)
$= x \to ((y \to z) \to z)$	Hipotez
$= x \to ((z \to y) \to y)$	Tanım 2.1.1 (5)
$=(z \to y) \to (x \to y)$	Tanım 2.1.1 (1)
$=(z \to y) \to 1$	Hipotez
$=1$	Tanım 2.1.1 (3)

elde edilir.

(d) $x \leq y$ varsayalım. O zaman $x \to y=1$ dir. Şimdi $(z \to x) \to (z \to y)$ yi göz önünde bulunduralım. Eğer $(z \to x) \to (z \to y)=1$ olduğunu gösterirsek, $\leq$ bağıntısının tanımından $z \to x \leq z \to y$ gösterilmiş olacak

$(z\to x)\to(z\to y)=(x'\to z')\to(y'\to z')$ Tanım 2.1.1 (4)

$=y'\to((x'\to z')\to z')$ Tanım 2.1.1 (1)

$=y'\to((z'\to x')\to x')$ Tanım 2.1.1 (5)

$=(z'\to x')\to(y'\to x')$ Tanım 2.1.1 (1)

$=(z'\to x')\to(x\to y)$ Tanım 2.1.1 (4)

$=(z'\to x')\to 1$ Hipotez

$=1$ Tanım 2.1.1 (3)

nedeniyle $(z\to x)\leq(z\to y)$ dir. Şimdi aynı şekilde $(y\to z)\to(x\to z)=1$ olduğunu göstererek $y\to z\leq x\to z$ sonuçlandırılacaktır.

$(y\to z)\to(x\to z)=x\to((y\to z)\to z)$ Tanım 2.1.1 (1)

$=x\to((z\to y)\to y)$ Tanım 2.1.1 (5)

$=(z\to y)\to(x\to y)$ Tanım 2.1.1 (1)

$=(z\to y)\to 1$ Hipotez

$=1$

O halde $y\to z\leq x\to z$ dir. Netice olarak $x\to y\leq(y\to z)\to(x\to z)$ elde edilir.

(e) $((x\to y)\to y)\to y=((y\to(x\to y))\to(x\to y)$ Tanım 2.1.1 (5)

$=((x\to(y\to y))\to(x\to y)$ Tanım 2.1.1 (1)

$=(x\to 1)\to(x\to y)$ Lemma 2.1.2 (1)

$=1\to(x\to y)$ Tanım 2.1.1 (3)

$=x\to y$ Tanım 2.1.1 (2) elde edilir.

(f) $(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))=(x\to y)\to(x\to((y\to z)\to z)))$ Tanım 2.1.1 (1)

$=(x\to y)\to(x\to((z\to y)\to y))$ Tanım 2.1.1 (5)

$=(x\to y)\to((z\to y)\to(x\to y))$ Tanım 2.1.1 (1)

$=(z\to y)\to((x\to y)\to(x\to y))$ Tanım 2.1.1 (1)

$=(z\to y)\to 1$ Lemma 2.1.2 (1)

$=1$ Tanım 2.1.1(3) dir.

Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

Uyarı 2.1.4

Lemma 2.1.2(1) koşulu, $x\rightarrow x=1$, $\leq$ bağıntısının yansıyan olduğunu; Lemma 2.1.3(b) koşulu, $x\rightarrow y=1$ ve $y\rightarrow x=1 \Rightarrow x=y$, $\leq$ bağıntısının ters simetrik olduğunu ve Lemma 2.1.3(c) koşulu, $x\rightarrow y=1$ ve $y\rightarrow z=1 \Rightarrow x\rightarrow z=1$, $\leq$ bağıntısının geçişken olduğunu gösterir. O halde L implikatif cebiri bir posettir. Ayrıca Tanım 2.1.1(3), $x\rightarrow 1=1$, koşulu ve Lemma 2.1.3(a) koşulu posetin sınırlı olduğunu gösterir. Böylece bir implikatif cebir sınırlı bir posettir.

Önerme 2.1.5 L bir implikatif cebir olsun. o zaman her $x\in L$ için $(x')'=x$ dir.

Kanıt	$(x')'=1\rightarrow(x')'$	Tanım 2.1.1(2)
	$=0'\rightarrow(x')'$	Tanım 2.1.1(6)
	$=x'\rightarrow 0$	Tanım 2.1.1(4)
	$=x'\rightarrow 1'$	Lemma 2.1.2(2)
	$=1\rightarrow x$	Tanım 2.1.1(4)
	$=x$	Tanım 2.1.1(2) dir.

Sonuç teorem 2.1.6 Bir implikatif cebirde her x için $x'=x\rightarrow 0$ dır.

Kanıt	$x'=1\rightarrow x'$	Tanım 2.1.1(2)
	$=(x')'\rightarrow 1'$	Tanım 2.1.1(4)
	$=x\rightarrow 1'$	Önerme2.1.5
	$=x\rightarrow 0$	Lemma2.1.2(2)

elde edilir.

Şimdi bir L implikatif cebir üzerinde $\vee$ ve $\wedge$ ikili işlemlerini şöyle tanımlıyoruz.

$x\vee y=(x\rightarrow y)\rightarrow y=(y\rightarrow x)\rightarrow x$

$x\wedge y=((y\rightarrow x)\rightarrow y')'=((x\rightarrow y)\rightarrow x')'$

Teorem 2.1.7 Bir L implikatif cebirde her $x,y \in L$ için aşağıdakiler geçerlidir

(1) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

(2) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

Kanıt Sadece (1)'i kanıtlayalım; (2) benzer şekilde gösterilebilir.

$$(x\vee y)' \to (x'\wedge y') = ((x \to y) \to y)' \to ((y' \to x') \to y)' \qquad \vee \text{ ve } \wedge\text{'in tanımından}$$

$$= ((y' \to x') \to y) \to ((x \to y) \to y) \qquad \text{Tanım 2.1.1(4)}$$

$$= ((x \to y) \to y) \to ((x \to y) \to y) \qquad \text{Tanım 2.1.1(4)}$$

$$=1$$

O halde ≤ bağıntısının tanımından $(x\vee y)' \leq (x'\wedge y')$ elde edilir. Şimdi $(x'\wedge y') \leq (x\vee y)'$ olduğunu gösterelim.

$$(x' \wedge y') \to (x \vee y)' = ((y' \to x') \to y'')' \to ((x \to y) \to y)' \qquad \wedge,\vee \text{ Tanımı}$$

$$= ((y' \to x') \to y)' \to ((x \to y) \to y)' \qquad \text{Önerme 2.1.5}$$

$$= ((x \to y) \to y) \to ((y' \to x') \to y) \qquad \text{Tanım 2.1.1(4)}$$

$$= ((x \to y) \to y) \to ((x \to y) \to y) \qquad \text{Tanım 2.1.1(4)}$$

$$=1,$$

O halde $(x'\wedge y') \leq (x \vee y)'$ ve $(x \vee y)' \leq (x' \wedge y')$ birlikte (1) i verir.

Bölümün geri kalan kesimlerinde verilen sonuçların kanıtları yukarıdaki akıl yürütme kullanılarak kanıtlanabilir.

Lemma 2.1.8 Bir L implikatif cebirde her $x,y \in L$ için aşağıdakiler vardır:

(1) $x \wedge y \leq x,\ y \leq x \vee y$

(2) $x \vee y = \sup\{x,y\}$

(3) $x \wedge y = \operatorname{Inf}\{x,y\}$

Bu lemmaya göre $(L, \leq 0,\ 1)$ sınırlı bir kafestir.

Sonuç Teorem 2.1.9 Bir L implikatif cebirde her $x,y \in L$ için aşağıdakiler geçerlidir.

(1) $x \leq y,\ x \leq z \ \Rightarrow x \leq y \wedge z$

(2) $y \leq x,\ z \leq x \ \Rightarrow\ y \vee z \leq x$

Sonuç Teorem 2.1.10 Bir L implikatif cebirde her $x,y,z \in L$ için aşağıdakiler vardır:

(1) $(x \vee y) \rightarrow z \leq x \rightarrow z$ ve $(x \vee y) \rightarrow z \leq y \rightarrow z$

(2) $x \rightarrow z \leq (x \wedge y) \rightarrow z$ ve $y \rightarrow z \leq (x \wedge y) \rightarrow z$

Teorem 2.1.11 Bir L implikatif cebirde her $x,y,z \in L$ için aşağıdakiler doğrudur.

(1) $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$
(2) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$

Tanım 2.1.12 $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ sınırlı bir kafes; $'$,L üzerinde " sıra tersleyen" birli işlem ve $\rightarrow$,L üzerinde bir ikili işlem olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(L, \wedge, \vee, ', \rightarrow, 0, 1)$ cebirine kafes implikatif cebir denir.

(I1) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$,

(I2) $x \rightarrow x = 1$,

(I3) $x \rightarrow y = y' \rightarrow x'$,

(I4) $x \rightarrow y = y \rightarrow x = 1 \Rightarrow x = y$

(I5) $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$,

(L1) $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$,

(L2) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$.

Şimdi (L , ≤) nin sınırlı bir kafes olması ve Teorem 2.1.11 den aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Teorem 2.1.13 (L,→,′,0,1) bir implikatif cebir olsun. O zaman (L, ∧, ∨, 0, 1) bir kafes implikatif cebirdir.

Uyarı 2.1.4 (L ,→,′,0,1) bir implikatif cebir ve 0≠1 ise o zaman → işlemi birleşmeli değildir.

Gerçekten, Tanım 2.1.1(1) de x = y = z alırsak o zaman (x →x) → x = x → (x → x) olur. Buradan; 1→ x =x →1 ve gene buradan x =1 ve dolayısıyla 0=1 çelişkisi elde edilir.

2.2 Kafes İmplikatif Cebirlerin Türevleri

Bu kesim boyunca aksi belirtilmedikçe, L bir kafes implikatif cebiri gösterecektir.

Tanım 2.2.1 L bir kafes implikatif cebir olsun. Her x,y ∊ L için

d(x → y) = (x → dy) ∨ (dx → y) ise bir d : L→L dönüşümüne L nin bir türevi denir.

Örnek 2.2.2 [1] L = {0,a,b,c,1} olsun. L üzerinde kısmi sıralama bağıntısını 0<a<b<c<1 olarak tanımlayalım ve x ∧ y : = min{x,y}, x ∨y : = max {x,y} diyelim.

′ ve → işlemlerini çizelgelerdeki gibi tanımlayalım.

x	x′
0	1
a	c
b	b
c	a
1	0

→	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	b	c	1	1	1
c	a	b	c	1	1
1	0	a	b	c	1

O zaman (L,∨,∧,′,→) bir kafes implikatif cebirdir.

Bir d : L→L dönüşümünü $dx=\begin{cases} 1 & x = c, 1 \; ise \\ b & x = a \\ a & x = 0 \\ c & x = b \end{cases}$

olarak tanımlayalım. O zaman d, L'nin bir türevidir.

Örnek 2.2.3 [1] $L = \{0,a,b,1\}$ olsun. $'$ ve $\rightarrow$ işlemlerini aşağıdaki çizelgelerdeki gibi tanımlayalım.

x	x'
0	1
a	b
b	a
1	0

$\rightarrow$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	1	1
b	a	b	1	1
1	0	a	b	1

Sonuç Teorem 2.1.6 da $x' = x \rightarrow 0$ olduğu kanıtlanmıştır. Ayrıca, $\vee$ ve $\wedge$ işlemleri

$x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$ ve $x \wedge y = ((x' \rightarrow y') \rightarrow y')'$ olarak tanımlanmıştı. O zaman $(L,\vee,\wedge,',\rightarrow)$ bir kafes implikatif cebirdir. şimdi bir $d : L \rightarrow L$ dönüşümünü

$$dx = \begin{cases} 1 & x = 0, b, 1 \ ise \\ b & x = a \ ise \end{cases}$$

olarak tanımlarsak d'nin L üzerinde bir türev olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Önerme 2.2.4 d, L üzerinde bir türev olsun. O zaman

(1) $d1 = 1$

(2) Her $x \in L$ için $dx = dx \vee x$ dir.

Kanıt (1) $d1 = d(1 \rightarrow 1)$ Tanım 2.1.1 (3)

$= (d1 \rightarrow d1) \vee (d1 \rightarrow 1)$ Tanım 2.2.1

$= d1 \vee 1$ Tanım 2.1.1(2),(3)

$= (d1 \to 1) \to 1$ $\vee$ nin Tanımı

$= 1 \to 1$ Tanım 2.1.1 (3)

$= 1$ elde edilir. Tanım 2.1.1 (3)

(2) $dx = (1 \to x)$ Tanım 2.1.1 (2)

$= (1 \to dx) \vee (d1 \to x)$ Tanım 2.2.1

$= dx \vee (d1 \to x)$ Tanım 2.1.1 (2)

$= dx \vee (1 \to x)$ (1)

$= dx \vee x$ Tanım 2.1.1 (2)

elde edilir.

Sonuç Teorem 2.2.5 d, L'nin bir türevi olsun. O zaman her $x \in L$ için $x \leq dx$ dir.

Kanıt $x \to dx = 1$ olduğunu gösterirsek , $\leq$ bağıntısının tanımından $x \leq dx$ sonuçlanır.

$x \to dx = x \to (dx \vee x)$ Önerme 2.2.4 (2)

$= x \to ((dx \to x) \to x)$ $\vee$nin Tanımı

$= (dx \to x) \to (x \to x)$ Tanım 2.1.1 (1)

$= (dx \to x) \to 1$ Lemma 2.1.2 (1)

$= 1$ Tanım 2.1.1 (3)

O halde $x \leq dx$ dir.

L üzerinde bir f dönüşümüne her $x \in L$ için $x \leq f(x)$ ise "genişleyen" dönüşüm denir.

Önerme 2.2.6 [1] f, L üzerinde bir genişleyen dönüşüm olsun. O zaman her $x,y \in L$ için $f(x) \to y \leq x \to f(y)$ dir.

Kanıt f genişleyen ise $x \leq f(x)$ ve $y \leq f(y)$ dir. O zaman Lemma 2.1.3 (d) uyarınca

$f(x) \to y \leq x \to y$ ve $x \to y \leq x \to f(y)$ dir. Buradan $f(x) \to y \leq x \to f(y)$ elde edilir.

Teorem 2.2.7 [1] d, L üzerinde bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:

(1) d, L'nin bir türevidir;

(2) her $x,y \in L$ için $d(x \to y) = x \to dy$ dir.

Kanıt

(1) $\Longrightarrow$ (2) : d, L'nin bir türevi olsun. $x \leq dx$ nedeniyle önerme 2.2.6 dan $dx \to y \leq x \to dy$ yazılır. Şimdi;

$d(x \to y) = (x \to dy) \vee (dx \to y)$	Tanım 2.2.1
$= ((x \to dy) \to (dx \to y)) \to (dx \to y)$	$\vee$ nin Tanımı
$= ((dx \to y) \to (x \to dy)) \to (x \to dy)$	Tanım 2.1.1 (5)
$= 1 \to (x \to dy)$	$dx \to y \leq x \to dy$ den
$= x \to dy$	Tanım 2.1.1 (2)

elde edilir.

(2) $\Longrightarrow$ (1) : $d(x \to y) = x \to dy$ özdeşliğini sağlayan bir d dönüşümü verilsin. O zaman

$d1 = d(d1 \to 1)$	Tanım 2.1.1 (3)
$= d1 \to d1$	Önerme 2.2.4

$=1$ Lemma 2.1.2 (1) dir. O halde $1=d1=d(x\rightarrow x)=x\rightarrow dx$ her $x \in L$ için vardır ve bu, $\leq$ bağıntısının tanımından, $x \leq dx$ demektir. Dolayısıyla önerme 2.2.6 $dx \rightarrow y \leq x \rightarrow dy$ verir. Nihayet Tanım 2.1.1 (5) den

$d(x \rightarrow y) = x \rightarrow dy = (x \rightarrow dy) \vee (dx \rightarrow y)$ sonucuna ulaşılır.

Önerme 2.2.8[24] d1,d2,..., dn L üzerinde türevler ise d1 o d2 o ...o dn bileşkesi de L'nin bir türevidir.

Kanıt_ sadece d1 o d2 nin bir türev olduğunu göstermek yeterlidir.

$$
\begin{aligned}
(d1 \circ d2)(x \rightarrow y) &= d1(d2(x \rightarrow y)) \\
&= d1(x \rightarrow d2y) && \text{Teorem 2.2.7(2)} \\
&= x \rightarrow d1(d2y) && \text{Teorem 2.2.7(2)} \\
&= x \rightarrow (d1 \circ d2)(y)
\end{aligned}
$$

d1 o d2 nin teorem 2.2.7 (2) den bir türev olduğu gösterilmiş olur.

d, L üzerinde bir türev ise d'nin sabit bıraktığı elemanların $Fix_d(L)$ kümesi

$Fix_d(L) := \{x \in L \ : \ dx = x\}$ kümesi olarak tanımlanır.

Aşağıdaki sonuç açıktır.

Önerme 2.2.9 d, L üzerinde bir türev olsun. $x \in Fix_d(L)$ ise

$(d \circ d \circ \ldots \circ)(x) = x$ dir.

Önerme 2.2.10 [11] d, L üzerinde bir türev olsun. O zaman aşağıdakiler vardır:

(1) $x \in L$ ve $y \in Fix_d(L)$ ise $x \rightarrow y \in Fix_d(L)$ dir.

(2) $y \in Fix_d(L)$ ise $x \vee y \in Fix_d(L)$ dir.

Kanıt (1) $x \in L$ ve $y \in Fix_d(L)$ olsun. O zaman $dy = y$ dir.

Buradan $d(x \rightarrow y) = x \rightarrow y$ olduğunu gösterirsek $x \rightarrow y \in Fix_d(L)$ olacaktır. Ama Teorem 2.2.7 (2) den $d(x \rightarrow y) = x \rightarrow dy = x \rightarrow y$ dir. O halde $x \rightarrow y \in Fix_d(L)$ elde edilir.

(2) $y \in Fix_d(L)$ olsun. Şimdi

$d(x \vee y) = d((x \to y) \to y)$ — $\vee$ nin Tanımı

$= (x \to y) \to dy$ — Teorem 2.2.7 (2)

$= (x \to y) \to y$ — $y \in Fix_d(L)$

$= x \vee y$ — $\vee$ nin tanımı

olduğu için $x \vee y \in Fix_d(L)$ dir.

Önerme 2.211 [11] d, L üzerinde bir türev olsun. $x \leq y$ ve $x \in Fix_d(L)$ ise o zaman $y \in Fix_d(L)$ dir.

Kanıt $x \leq y$ ve $x \in Fix_d(L)$ ise $x \to y = 1$ ve $dx = x$ dir. Böylece;

$dy = d(1 \to y) = d((x \to y) \to y) = d(x \vee y) = x \vee y = y$

Önerme 2.2.10(2) nin bir sonucudur. O halde $y \in Fix_d(L)$ dir.

$Fix_d(L)$ nin sağladığı bu özelliklerin benzer özelliklere sahip başka küme tanımlayalım.

Tanım 2.2.12 d, L'nin bir türevi olsun.

$Kerd := \{x \in L : dx = 1\}$ kümesine d'nin çekirdeği denir.

Tanım 2.2.13 L bir kafes implikatif cebir ve F, L'nin bir alt kümesi olsun.

(F1) $1 \in F$,

(F2) $x \in F$ ve $x \to y$, $y \in F$'yi gerektirir ise F, L'nin bir süzgecidir denir.

Önerme 2.2.14 d, L'nin bir türevi olsun. Eğer d, L üzerinde bir endomorfizma ise Kerd, L'nin bir süzgecidir.

Kanıt d, L üzerinde bir endomorfizma ise $d(x \to y) = dx \to dy$ dir. $d1 = 1$ olduğu için $1 \in Kerd$ dir. Şimdi $x, x \to y \in Kerd$ olsun. O zaman $dx = 1$ ve $d(x \to y) = 1$ dir. Buradan

$1 = d(x \to y)$	Hipotez
$= dx \to dy$	d endomorfizma
$= 1 \to dy$	$x \in Kerd$
$= dy$	Tanım 2.1.1(2)

elde edilir. O halde $y \in Kerd$ bir süzgeçtir.

Önerme 2.2.15 d, L'nin bir türevi olsun. Eğer $y \in Kerd$ ise her $x \in L$ için $x \vee y \in Kerd$ dir.

Kanıt $y \in Kerd$ ise $dy = 1$ dir. Şimdi

$d(x \vee y) = d((x \to y) \to y)$	$\vee$ nin Tanımı
$= (x \to y) \to dy$	Teorem 2.2.7 (2)
$= (x \to y) \to 1$	$y \in Kerd$
$= 1$	Tanım 2.1.1(3)

olup $x \vee y \in Kerd$ elde edilir.

Önerme 2.2.16 d, L'nin bir türevi olsun. Eğer $x \leq y$ ve $x \in Kerd$ ise o zaman $y \in Kerd$ dir.

Kanıt Hipotezden $x \to y = 1$ ve $dx = 1$ yazabiliriz.

Şimdi	$dy = d(1 \to y)$	Tanım 2.1.1.(2)
	$= d((x \to y) \to y)$	Hipotez

$= d((y \to x) \to x)$ Tanım 2.1.1 (5)

$= (y \to x) \to dx$ Teorem 2.2.7 (2)

$= (y \to x) \to 1$ Hipotez

$= 1$ Tanım 2.1.1 (3)

olup $y \in Kerd$ elde edilir.

Önerme 2.2.17 d, L'nin bir türevi olsun. Eğer $y \in Kerd$ ise o zaman her $x \in L$ için $x \to y \in Kerd$ dir.

Kanıt $y \in Kerd$ ise $dy = 1$ dir. Şimdi

$d(x \to y) = x \to dy$ Teorem 2.2.7 (2)

$= x \to 1$ Hipotez

$= 1$ Tanım 2.1.1 (3)

olup, $x \to y \in Kerd$ elde edilir.

Tanım 2.2.18 L bir kafes implikatif cebir ve F, L'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $d(F) = \{dx : x \in F\}$ olmak üzere $d(F) \subseteq F$ ise F ye d – invaryant denir.

Teorem 2.2.19 d, L'nin bir türevi olsun. O zaman her F süzgeci d- invaryanttır.

Kanıt F, L'nin bir süzgeci ve $y \in d(F)$ olsun. O zaman bir $x \in F$ için $y = dx$ dir. Buradan $x \to y = x \to dx = 1 \in F$ elde edilir ki bu $y \in F$ yi gerektirir. O halde $d(F) \subseteq F$ elde edilir. Böylece F d–invaryanttır.

Sonuç

Bu tezin birinci bölümünde MV-cebirleri üzerinde $\odot$ ve $\oplus$ işlemleri kullanılarak türev tanımlanıyor ve özellikleri inceleniyor. Eğer türev $\ominus$ ve $\odot$ işlemleri aracılığıyla $d(x \ominus y) = (dx \ominus y) \odot (x \ominus dy)$ olarak tanımlanırsa ilginç özellikler elde ediliyor. Bunun için [8] e başvurulabilir. İkinci Bölümde implikatif cebirini ve kafes implikatif cebirlerini tanıttıktan sonra kafes implikatif cebirlerin türevlerini inceledik. Türevler aracılığıyla, Kerd'nin bir süzgeç olduğunu ve kafes implikatif cebirlerin her kafesinin d-invaryant olduğunu kanıtladık. Bu bağlamda [21] ve [3] de kafes H–implikatif cebirlerinin özellikleri ve süzgeçleri tartışılmıştır. Son çalışmalar arasında çıkarma cebirlerinin türevleri çalışılmaktadır. X bir çıkarma cebiri ise üzerinde tanımlanan bir d türevi için, her zaman olduğu gibi Kerd ve Imd'nin X in idealleri olduğu gösteriliyor. Klasik cebire uygun olarak $X/_{Kerd} \simeq Imd$ ve $X/_{Imd} \simeq Kerd$ sonuçları elde ediliyor. Daha fazla bilgi için [23] ve [24] e başvurulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Alshehri, N.O., Derivations of MV-algebras, Hindawi Publishing Corporation, İnternational Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol, 2010, Article ID312027, 8 pages.

[2] Bell, H.E., Kappe, L.C., Rings in which derivations Satisfy certain algebraic conditions ,Acta Math. Hungar.53(1989), 339-346

[3] Birkhoff, G., Lattice theory, AMS Colloqium. Publications, Providencer, Rhode Island, 1967

[4] Busneag, D., Piciu, D., Localization of MV-algebras and lu-grups, Algebra univers, 50, (2003), 359-380

[5] Chang, C.C., Algebraic analysis of many valued logics, Trans. Amer. Math. Soc. 88(1958), 467-490

[6] Chang, C.C., The writing of the MV-algebras, studia logica, special issue on many valued logics, (Mundici, D., ed.) 61, 1998, p.3-6

[7] Cignoli, R., Do'Ottaviano, I., Mundici, D., Algebraic foundations of many valued reasoning, Kluwer Academic, Dotrecht, The netherlands, 2000

[8] Davvaz, B., Zareyan, L., Leoreanu-Fotea, V., (3,3)-ary differential rings, Mediterr.J.Math. 9(2012), 357-378

[9] Jun, Y.B., Xin,X.L., on derivations of BCI-algebras, Inform. Sci. 159((2004), 167-176

[10] Jun, Y.B., Xu, Y.K.Q., positive implication and associative fieters of lattice implication algebra, Bull. Korean Math.Soc.,35(1):53-61, 1998

[11] Lee, S.D., Kim, K.H., On derivations of lattice implication algebras,

[12] Lia-Xia, S., Kun-Lun, Z., The equivalent definitions of lattice implication algebras, International seminar on future information technology and management engineering, 2008

[13] Mangani, P., Su Certe algebre connesse con logiche a piu valori, Bolletino unione matematica italiana (4), 8, 1973, p.68-78

[14] Posner, E.C., Derivations in prime rings, Proc.Amer. Math. Soc, 8((1957), 1093-1100

[15] Schein, B.M., Difference semigroups, comm. Algebra 20, 2513-2169, 1992

[16] Szasz, G., Derivations of lattices, Acta sci. Math37 (1975)), 149-154

[17] Xin, X.L., Li, Y.T., Lu,J.H., on derivations of lattices, İnform. Sci. 178(2008), 307-316

[18] Xu, P.Y., Lattice implication ordered semigroups, Informations Sci.,178(2008), 403-413

[19] Xu,Y., Lattice implication algebras, J.Southwest Jiaotong Univ. 1(1993), 20-27

[20] Xu, Y.Q.K., on fieters of lattice implication algebras, The journal of fuzzy mathemati, 2(1): 18-25 (1989)

[21] Xu,Y., Qin, K.Y., Lattice H implication algebras and lattice implication algebra classes, J.Hebei Mining and çivil engineering institute 3(1992) 139-143

[22] Xu,Y., Qin, K:Y., On fieters of lattice implication algebras, J.Fuzzy math.1(2)(1993), 251-260

[23] Yon,Y.H., Kim,K.H., On derivations of Subtraction algebras, Hacettepe Journal of mathematics and statistics, volüme 41(2) (2012), 157-168

[24] Zhu,Y., Tu, W., A note on lattice implication algebras, Bull. Korean Math.Soc., 38(1): 191-195, 2001