YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÜÇ POZİTİF ÇÖZÜMÜ

Hilmi Orçun BİLGEN

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Bornova-İZMİR
2014

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr. F.Serap TOPAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr.Şahlar MEHERREM

Prof. Dr. Behzat GÜRKAN
Enstitü Müdürü

ABSTRACT

THREE POSITIVE SOLUTIONS OF A SYSTEM OF FREDHOLM INTEGRAL EQUATIONS

BİLGEN, Hilmi Orçun
MSc in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Ahmet YANTIR
July 2014, 65 pages

In some applications of physics and engineering, it possible to meet the equations having unknown function under the integral sign from time to time in the equation. This type of equation is called the integral equations. Differential equations, however, are made up of derivatives of unknown function. Differential equations are local since the derivative is determined by the value of a function at a point and its immediate arround.

In this thesis we offer the sufficient conditions for the system of integral equations

$$u_i(t) = \int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds, \qquad t \in [0,1], \qquad 1 \le i \le n,$$

The existence of at least three fixed points of the integral operatör corresponding to given equation is proved by Legget-Williams fixed poin theorem.

Keywords: Systems of Fredholm integral equations, positive solutions, Legget-Williams fixed point theorem, differential equations.

ÖZET

FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÜÇ POZİTİF ÇÖZÜMÜ

Hilmi Orçun Bilgen
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR
Temmuz 2014, 65 sayfa

Fizik ve mühendislik uygulamalarında zaman zaman bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında olan denklemleriyle karşılaşılır. Bu tür denklemlere integral denklemler denir. Diferansiyel denklemler ise, bilinmeyen fonksiyonun değişik türevlerinden oluşurlar. Türev, bir fonksiyonun bir nokta ve hemen yakınındaki değerleri kullanarak bulunduğundan, diferansiyel denklemler lokal (yerel) denklemlerdir.

Bu tezde

$$u_i(t) = \int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds, \qquad t \in [0,1], \qquad 1 \le i \le n,$$

integral denklem sisteminin pozitif çözümlerinin varlığı için yeter şartlar sunulmuştur. Verilen denklem sistemine denk olan integral operatörü oluşturularak bu operatörün sabit noktalarının varlığı Legget-Williams sabit nokta teoremi yardımıyla ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Fredholm integral denklem sistemleri, pozitif çözümler, Legget-Williams sabit nokta teoremi, diferansiyel denklemler.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Ahmet YANTIR ayrıca bana daima destek olan eşim Berivan BİLGEN'e teşekkürü bir borç bilirim

Biliyorum ki bunu yazarkende beni görüyor ve pamuk ellerini üzerimden hiç çekmiyorsun nur içinde yat.

ANNEM'e…

Hilmi Orçun BİLGEN
İzmir,2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN ÜÇ POZİTİF ÇÖZÜMÜ" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

22/07/14

Hilmi Orçun BİLGEN

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
$C[0,1]$	$[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonların kümesi
$L'[0,1]$	$[0,1]$ uzayında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
P_c	c üzerinde negatif olmayan sürekli konkav fonksiyonların kümesi

Kısaltmalar	
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
hhh	Hemen hemen heryerde
P	koni

1 GİRİŞ

İntegral denklemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya birden fazla integral işareti altında bulunduğu denklemlerdir. Ancak, bu tanım yeterli bir tanım olarak kabul edilmemektedir. Böyle bir tanımdan yola çıkarak integral denklemlerin tamamını içine alacak bir teori kurulamamaktadır. İntegral denklemler çok geniş bir araştırma sahası ve ayrıntılı inceleme konusudur. Bu nedenle integral denklemler niteliklerine göre ayrı ayrı incelenmişlerdir.

İntegral denklemler ile matematiksel fizik ve mekanikte sıkça karşılaşılabilmektedir. Ayrıca diferansiyel denklemlerin çözümünde de bir çözüm aracı olarak kullanılırlar. Bu nedenle diferansiyel denklemler ile integral denklemler arasında yakın bir ilişki vardır. İntegral denklemlerin, diferansiyel denklemler ile olan yakın ilişkisi ve diferansiyel denklemlerin mühendislikte çokça kullanılması integral denklemleri de önemli bir duruma getirmiştir.

Diferansiyel denklemlerin bir problemi tek başına tanımlamaya yetmediğini bilinmektedir. Bu yüzden sınır şartlarının da diferansiyel denkleme eklenmesi gerekmektedir. Ancak, integral denklemlerde ise ilave şartlara gerek duymadan problemlerin tam olarak tanımı verilebilmektedir. Ayrıca integral denklemler bütün uzay üzerinden integral alınmasını gerektirmektedirler. Bu yüzden de evrensel denklemlerdir. Aranan fonksiyonun bir noktadaki değerinin o fonksiyonun bütün uzay üzerinden integralini içeren ifadeler cinsinden bulunması demektir.

Doğa kanunları diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edilebilirler. Buradan, yakın çevre incelendiğinde evrenin tamamında geçerli doğa kanunlarının bulunabileceği sonucu çıkarılabilir. Belki de büyük düşünür Albert Einstein'in "Bu tabiatın en anlaşılmaz yönü, anlaşılabilir olmasıdır" sözünün altında yatan gerçeklerden bir tanesidir

Bazen problemler, tek bir denklem ile ifade edilemeyebilirler. Bunun yerine problem, birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren diferansiyel, integral veya bunların doğrusal bileşimlerinden oluşabilir. Bu tür denklemlere İntegro diferansiyel denklemler olarak bilinmektedir. Bu tür denklem sistemleri, birçok fizik ve mühendislik alanında ortaya çıkmaktadır

İntegral denklemler ile bilinen ilk çalışmalar 19. yüzyılın ilk yarısında yapılmıştır. Önceleri düzenli araştırmalar yapılmamıştır. Ancak bu yüzyılın sonlarına doğru daha düzenli araştırmalar yapılmış ve bazı sonuçlar alınmaya başlanmıştır. 1823 yılında Abel in bir mekanik problemi ile ilgilendiği sırada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Du Bois Reymond da 1888 yılında yayımlanan bir çalışmasında "integral denklem" deyimini önermiştir. 1822 yılında da Vean B. Joseph Fourier, trigonometrik seriler yardımıyla ısı problemlerinin çözümünde kullanılan,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xy)\, \varphi(y)\, dy$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xy)\, \varphi(y)\, dy$$

formüllerine ait

$$\varphi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(xy)\; f(x)\, dx \qquad \text{ve} \qquad \varphi(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xy)\; f(x)\, dx$$

denklemlerini vermiştir. 1823 yılında Abel mekanik problemlerinin genel formülü;

$$f(x) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2}\, dy \quad , \quad f(0) = 0 \quad \text{ve} \quad 0 < \alpha < 1$$

olan bu integral denklemini formüle edip 1826 yılında çözümünü vermiştir. Bu denklemin $\alpha = 0$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ hali Abel' in karşılaştığı orijinal denklem olup bununla ilgili ünlü eşit zamanlı problemi ise ilk olarak Huygens tarafından çözülmüştür.

İntegral sınırlarından biri x gibi bir değişken olan ve bilinmeyen φ fonksionunun integralin hem içinde hem de dışında bulunduğu

$$\varphi(y) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

integral denklemi ilk olarak Poisson tarafından elde edilmiştir. Burada φ çözümü λ ' nın kuvvetleri cinsinden verilmiştir. Ancak ilgili serinin yakınsaklığı Poisson tarafından gösterilmeyip 1830 yılında Liouville tarafından ispatlanmıştır. Bir S yüzeyi içerisinde $\Delta F = 0$ Laplace denklemini sağlayan ve S'nin sınırında belli bir değer alan F fonksiyonunun bulunması problemi olan Dirichlet probleminin bir integral denklem problemine eşdeğer olduğu 1870 yılında Liouville tarafından λ parametresinin bir açılımı olarak verilmiştir. Bu çözüm daha önceden Poisson ve Liouville' in kullandığı ardışık yaklaştırma yöntemine karşılık gelir. İntegral sınırlarından birinin değişken olan doğrusal integral denklemlerle ilgili çalışmalar İtalyan matematikçi Vita Volterra (1860-1940) tarafından yayımlanmıştır.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{\infty} K(x,y)\, \varphi(y)\, dy$$

integral denklemi 1900 yılında ilk kez Eric İvan Fredholm (1866-1927) tarafından incelenmiştir. Fredholm' de Volterra' nın 1884 yılında sunduğu benzer yaklaşım problemlerini incelemiş ve 1903' te bu konuda makalesini yayınlamıştır. Ayrıca integral denklemlerle ilgili F.G. Tricomi (Tricomi, 1955), I. G. Petrovsky (Petrovsky, 1953) ve V. W. Lovitt (Lovitt, 1924) 'e ait kaynaklar bulunmaktadır.

.

2 ÖN BİLGİLER

2.1 İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

2.1.1 Doğrusal Olan veya Doğrusal Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler, temel kavramlar bakımından öncelikle, doğrusal integral denklemler ve doğrusal olmayan integral denklemler olarak iki büyük sınıfa ayrılırlar.

$u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\ u(t)\, dt \tag{2.1}$$

yapısında bir integral denklem " doğrusal integral denklem"dir.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\ u^n(t)\, dt \tag{2.2}$$

integral denkleminde de $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n. kuvveti bulunduğundan "doğrusal olmayan integral denklem" olmaktadır.

Daha genel olarak,

$$u(x) = f(x) + \int_a^x \emptyset[x,t,u(t)]\ dt \tag{2.3}$$

integral denklemi de "doğrusal olmayan integral denklemi" olmaktadır.

Bunların dışında birden çok değişkeni bulunan;

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d K(x,y;t_1,t_2)\, u(t_1,t_2)\, dt_1\, dt_2 \tag{2.4}$$

biçimindeki kısmi integral denklemlerin de doğrusal olanı veya doğrusal olmayanı bulunmaktadır. [1]

2.1.2 Tekil Olan veya Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin bir sınıflandırılması da $K(x,t)$ fonksiyonunun sürekli olup olmamasıyla ilgilidir. $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere, $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ aralığında sürekli ise, integral denklem tekil (singüler) olmayan bir integral denklemdir. $K(x,t)$ bu aralıkta sürekli değilse, integral denklem tekil (singüler) integral denklem olmaktadır.

Örneğin, $0 < \propto < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{u(t)}{(x-t)^{\propto}}\, dt \qquad (2.5)$$

biçimindeki bir integral denklem bu sınıfa girmektedir. İntegral sınırlarının en az birinin sonsuz olması halinde de denklem, tekil integral denklem sınıfına girmektedir.

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} cosx(t)\, u(t)\, dt \qquad (2.6)$$

$$\varphi(x) = k. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}.\, \varphi(t)\, dt \qquad (2.7)$$

2.1.3 İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemleri yapılarına göre üç sınıfa ayırılabilir. Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, çekirdek fonksiyonu $K(x,t)$ olmak üzere,

$$\varphi(x) = \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.8)$$

biçimindeki integral denklem "I. cins integral denklemdir" dir. $\varphi(x)$ fonksiyonu verilmiş bir fonksiyon olup, bilinmeyen fonksiyon sadece integral içinde bulunur.

Benzer şekilde;

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.9)$$

denklemi de "I. cins integral denklem" dir. $\varphi(x)$ ve $f(x)$ yine verilmiş fonksiyonlardır.

Bu denklemleri; $\varphi(x) - f(x) = \psi(x)$ olacak şekilde;

$$\psi(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt$$

biçimine getirerek, (2.8) denklemi tipinde yazabiliriz.

Örnek verecek olursak;

$$x^2 = \int_0^1 (x-t)\, u(t)\, dt \quad \text{ve} \quad e^x = x - \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 t\ u(t)\, dt$$

tipindeki denklemler de "I. cins integral denklemler" için birer örnektir.

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.10)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.11)$$

biçimindeki integral denklemler de "II. cins integral denklemler" dir. Bilinmeyen fonksiyon $u(x)$, integralin hem içinde hem de dışındadır.

yine;

$$u(x) = \int_{0}^{x} e^{2x+t}\, u(t)\, dt$$

ve

$$u(x) = 1 + \frac{x}{2} + \int_{0}^{1} \sin(x+t)\;\, u(t)\, dt$$

denklemleri de "II. cins integral denklemleri" ne birer örnek olarak verilebilirler.

$\varphi(x)$, $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlar olmak üzere,

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.12)$$

tipindeki integral denklemlerde "III. Cins İntegral Denklemler" sınıfını oluştururlar.

yine,

$$x\, u(x) = 1 - e^{-2x} + \int_{0}^{2} x^2 t^2\, u(t)\, dt$$

denklemi III. cins integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

2.1.4 Homojen Olan veya Homojen Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemleri, bilinmeyen fonksiyon olan $u(x)$ fonksiyonuna göre homojen olup olmadıkları şeklinde sınıflandırabiliriz

II. cins integral denklemler için; (2.10) ile verilen;

$$u(x) = \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt$$

integral denklemini "*homojen integral denklem*i" olarak adlandıracağız.

(2.11) ile verilen homojenliği bozan $f(x)$ fonksiyonunun bulunduğu,

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt$$

biçimindeki denklemleri ise, "*homojen olmayan integral denklemler*" olarak adlandıracağız.

$$u(x) = \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt$$

homojen denkleminin, $u(x) = 0$ olan bir çözümü bulunmaktadır. Bu çözüme "aşikar çözüm" ya da "trivial çözüm" denir. Fakat bunun dışında başka bir çözümünün var olup olmadığı ya da hangi koşullar altında çözümünün olabileceği araştırılabilir.

Homojen integral denklemler, daha genel olarak;

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)\, u(t)\, dt$$

şeklindeki bir integral denklemin $f(x) = 0$ olması durumuna uyan özel bir durumu olarak da düşünülebilirler. [1]

2.2 Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemlerin diğer bir sınıflandırılması da, integral sınırlarının değişken veya sabitlerden oluşmasına göre yapılmaktadır. Doğrusal ve homojen olup olmadıklarına bakılmadan;

$$\varphi(x) = \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.13}$$

$$u(x) = \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.14}$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.15}$$

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.16}$$

biçimindeki denklemlere "*Volterra integral denklemleri*" denilmektedir. Bu tür denklemlerde, integralin üst sınırında veya sınırlarının birinde " x " değişkeni bulunmaktadır. x değişkeni, $x = b$ gibi sabit bir değere eşit olduğunda ise;

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.17}$$

$$u(x) = \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.18}$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.19}$$

$$\varphi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\, u(t)\, dt \tag{2.20}$$

biçimindeki denklemlere ise "*Fredholm integral denklemleri*" denilmektedir.

Fredholm ve Volterra intergral denklemleri arasındaki tek fark sınırların değişken ya da sabit olmasından kaynaklanmaktadır.

2.3 İntegro Diferansiyel Denklemler

İntegral denklemlerin diğer bir türü de "integro diferansiyel denklemler" dir. İntegral denklemlerde bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu, olduğu gibi düşünülmüştür. Ancak bu fonksiyonun türevlerinin de bulunduğu bir integral denklem de olabilir.

$$u'(x) = F\{x, u(x), \int_0^x K\big(x, t, u(t), u'(t)\big)dt\} \qquad (2.21)$$

biçimindeki, $u(x)$ in sadece birinci mertebeden türevinin bulunduğu bir denklem, integro diferansiyel denklemlere genel olarak bir örnek olabilir. Bir başka şekli de; n. mertebeden türevin bulunduğu, aşağıdaki denklemi de örnek olarak verebiliriz;

$$u^{(n)}(x) = F\big\{x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\ \big\} + \int_0^x K\{x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)\}dt \qquad (2.22)$$

2.4 Parametreli İntegral Denklemler

Bu bölüme kadar verilen integral denklemlerde herhangi bir parametreden bahsedilmemektedir. Ancak, $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ ve λ bir parametre olmak üzere, buraya kadar verilen integral denklemlere λ parametresinin dahil edilmesiyle integral denklem daha genel bir yapıya kavuşacaktır. Örneğin,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\, u(t)\, dt \qquad (2.23)$$

ve

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\, u(t)\, dt \qquad (2.24)$$

λ parametresi reel veya kompleks olabilir. Ancak genellikle reel seçilir.

2.5 İntegral Denklemin Çözümü

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)dt$$

denklemi yardımıyla konuyu inceleyelim. Bu denklemde bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ fonksiyonudur. Bu integral denklemini çözmek demek, $u(x)$ fonksiyonunu belirlemek demektir. Öyle bir $u(x)$ fonksiyonu bulunmalıdır ki, integral denklemde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra eşitlik sağlanmalıdır.

Örnek 2.1.

$$u(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad ;$$

fonksiyonunun;

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} u(t)dt$$

İntegral denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} . \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} . \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt$$

$1 + t^2 = u$ dersek $2tdt = du$ olur.

buradan ,

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} . \frac{1}{2} \int_1^{1+x^2} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.(\frac{u^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1}|_1^{1+x^2})$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}(-2.\frac{1}{\sqrt{u}}|_1^{1+x^2})$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.(-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{2}{1})$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.(-)\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{2}.2$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}.\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$u(x) = \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Örnek 2.2.

$u(x) = sinx$ fonksiyonunun;

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.t.u(t)dt$$

integral denkleminin çözümü olduğunu görelim.

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.t.sintdt$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}x\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.sintdt$$

$t = u$ dönüşümü yaparsak $sintdt = dv$ olur

buradan da ;

$dt = du$, $-cost = v$ olur.

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}x[\left(-t.cost - \int -costdt\right)]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}x[(-t.cost + sint)]|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}x[\left(-\frac{\pi}{2}.cos\frac{\pi}{2} + sin\frac{\pi}{2} + 0.cos0 - sin0\right)]$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}x[\left(-\frac{\pi}{2}.0 + 1 + 0.1 - 0\right)]$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}x \quad (1)$$

$$u(x) = sinx - \frac{x}{4} + \frac{x}{4}$$

$$u(x) = sinx$$

integral denkleminin çözümü olduğunu göstermiş oluruz.

Örnek 2.3.

$u(x) = 1$ fonksiyonunun;

$$u(x) + \int_0^1 x.(e^{xt} - 1).u(t)dt = e^x - x$$

integral denkleminin çözümü olduğunu gösterelim.

$$1+\int_0^1 x.(e^{xt}-1).1dt$$

$$=1+x.\int_0^1 (e^{xt}-1)dt$$

$$=1+x.\left[\left(\frac{1}{x}.e^{xt}-t\right)\Big|_0^1\right]$$

$$=1+x.\left[\ \frac{1}{x}.e^{x}-1-t-\frac{1}{x}.e^{0}-0\quad\right]$$

$$=1+x.\left[\frac{e}{x}-1-\frac{1}{x}\right]$$

$$=1+e^{x}-x-1$$

$$=e^{x}-x$$

denklemini sağladığını göstermiş oluruz.

2.6 Çözüm Çeşitleri

II. cins doğrusal integral denklemin çözümü, bilinen metodlar kullanılarak, üç ayrı şekilde elde edilmiştir.

<u>**I. Metod:**</u> C.Neumann, J.Lıoville (1837) ve Volterra'nın ortaya koydukları metoddur.

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\,u(t)\,dt \qquad (2.25)$$

integral denklemi ile verilen $u(x)$ fonksiyonunun, λ nın bir integral serisi şeklinde ifade edilebileceğini göstermişlerdir. Bu seride λ nın çeşitli kuvvetlerinin katsayıları, x in fonksiyonlarıdır. Bu seri ise, λ nın her değeri için yakınsaktır. Çözümün elde edilmesi için kullanılan yol ise "ardışık yaklaştırma metodu" dur. Volterra bu metodu bir teorem olarak şu şekilde ifade etmiştir:

Eğer $f(x)$ ve $K(x,t)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ise (2.25) integral denklemi bu aralıkta her λ değeri için, tam ve sürekli bir çözüme sahiptir ve bu çözüm ardışık yaklaştırma metodu ile belirlenir.

II. Metod: Fredholm'un geliştirdiği metoddur. Fredholm'e göre, verilen $u(x)$ fonksiyonu, λ nın iki integral serisinin oranı şeklinde ifade edilebilmektedir. Burada sözü edilen serilerin yakınsaklık yarıçapları sonlu değildir.

Fredholm un esas araştırması;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} K(x,t)\, u(t)\, dt \qquad (2.26)$$

şeklindeki denklemler üzerinde olup, daha çok süreklilik koşulları ile ilgilenmiştir. Fredholm, (1.26) denkleminin bir tam çözümü için,

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{1}^{n} K(x,t_i)\, u(t_i)\, \Delta t_i$$

yaklaşık bağıntısının yazılabileceğini göstermiştir. Burada x in ard arda $t_1, t_2, \dots, t_n$ değerleri verilirse, $u(t_i)$ için bir doğrusal denklem sistemi elde edilir. Bunun çözüm koşulu da bilinmektedir. Bu λ'nın bir polinomu şeklinde oluşacaktır. $D(\lambda)$ bu sistemin katsayılar determinantı olmak üzere, $u(x)$ fonksiyonunun bir yaklaşımıda

$$u(x) = f(x) + \lambda \frac{D(t_1, t_2, \dots, t_{n;}\lambda)}{D(\lambda)}$$

olarak ifade edilebilecektir. $D(\lambda) \neq 0$ olmalıdır. İfadeden $D(t_1, t_2, \dots, t_{n;}\ \lambda)$ ve $D(\lambda)$ nın, λ nın birer polinomu oldukları anlaşılmaktadır. λ'nın paydayı sıfır yapması halinde, genel olarak çözümü yoktur. Fakat metod bu durumda dahi çözüm verebilmektedir. Bu çözüm, bir integral denklem için, n değişkenli n denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sisteminin, n nin sonsuza yaklaşması halindeki limit durumu olarak bulunur.

Fredholm kendi adıyla anılan integral denklem üzerinde yaptığı çalışmalarda, bu integral denklemler için, bilinen cebir kurallarının geçerli olduğunu göstermiştir. Ayrıca önemli bir teoremi de özdeğerlerin dağılımı üzerinedir. Özdeğerler, λ değerleri olup, Fredholm denkleminin çözümü olması koşulu da yoktur.

Fredholm, teorisini, integral denklemlerin sistemleri üzerine geliştirmiştir. Bunlardan başka, çekirdekleri sürekli olmayıp, kendi deyimiyle zayıf singüler denklemler üzerinde çalıştığı bilinmektedir. Lineer cebir kurallarının tamamen geçerli olduğu bir integral denklemde, çekirdeğin sürekli olması koşulunun gerekli olmadığını, ancak;

$$\int_0^x \int_0^x |K(x,t)|^2 \, dx \, dt \tag{2.27}$$

iki katlı integralinin mevcut olması koşulunun bulunması yeterli olacağını göstermiştir. Örneğin,

$$u(x) - \int_0^1 ln|x-t| \, u(t)dt = f(x)$$

integral denkleminin, $x = t$ için sürekli olmayan bir çekirdeği bulunmasına rağmen, (2.27) gereğince,

$$\int_0^1 \int_0^1 ln^2|x-t| \, dxdt$$

iki katlı integralinin sonlu olması nedeniyle, denklem zayıf singüleriteli bir denklem olmaktadır.

Carleman bu koşul altında, Fredholm serisinin kurulmasının mümkün olduğunu ve bu fonksiyonların her zaman birer tam fonksiyon olduklarını göstermiştir. Bu iddia aralığın sınırlı olmaması halinde de geçerlidir.

Bu konuda bir ispatı Michlin vermiştir. Fredholm teorilerini ve elde edilen serileri, başka integral denklem sınıflarında da kullanılmak üzere genişletmiştir. Fredholm teorisinin devamlı geliştirilmesinde karar adımını ise F. Riese atmıştır. Fredholm denklemleri üzerine, tam sürekli operatör teorisini kuran kişi Riese'dir. Bu teori, J. S. Schauder tarafından tamamlanmıştır.

III. Metod: Ortogonal geliştirme teorisi ile bağlantılıdır.

$$K(x,t) = \overline{K(x,t)} = K(t,x)$$

özelliğini taşıyan çekirdeğin (simetrik çekirdek) bulunduğu integral denklemler üzerine yapılan çalışmaları içermektedir. Bu konuda esas sonuçlar, bu yüzyılın ilk on yılında D. Hilbert ve E. Schmidt tarafından elde edilmiştir. Bu sonuçlar özetle şöyle ifade edilebilir:

Simetrik integral denklemler (simetrik çekirdekli integral denklemler), Fredholm integral denklemlerinin özel bir sınıfı da olsa, simetrik integral denklemler teorisini, bundan bağımsız olarak incelemek ve geliştirmek olanağı vardır. Bu tür denklemlerin özdeğerleri reeldir ve bunlara ait özfonksiyonlar ortogonaldir.

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)dt$$

şeklindeki her fonksiyonda $u(x)$ ile, çekirdeğin özfonksiyonları bir dizi meydana getirirler. Burada, denklemin $u(x) = 0$ gibi bir çözümü vardır. Fakat özdeğerler dediğimiz $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sayılarının mevcut olması halinde, bu denklem, bunların herbiri için, $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ gibi sonlu sayıda çözümler verir. Bunlara ise özfonksiyonlar denir. Çözüm ise C_n keyfi sabitleri göstermek üzere,

$u(x) = \sum C_n\, U_n(x)$ şeklinde ifade edilir. Denklemle birlikte n tane başlangıç koşulu verilmişse, C_n keyfi sabitlerini belirtmek olanağını bulacaktır. [1]

2.7 İntegral Denklemler ile Diferansiyel Denklemler Arasındaki İlişki

Başlangıç koşullarıyla verilmiş, bir diferansiyel denklem, Volterra tipinde bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi, bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir.

2.7.1 Diferansiyel Denklemin İntegral Denkleme Dönüştürülmesi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x).y = f(x) \quad (2.28)$$

doğrusal diferansiyel denklemini alalım. Burada ($i = 1,2,3,\ldots,n$) olmak üzere $a_i(x)$ fonksiyonları için bir başlangıç noktası, bir düzgün noktadır. Ayrıca n tane olan,

$$y(0) = c_0 \quad , \quad y'(0) = c_1 \ , \quad \ldots \ , y^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \qquad (2.29)$$

başlangıç koşullarının da verildiğini kabul edelim.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x) \qquad (2.30)$$

dönüşümünü uygulayalım.

Bu ifade,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = u(x)$$

$$\int_0^x d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \int_0^x u(x)dx$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_0^x u(x)dx + c_{n-1}$$

biçiminde hesaplanırsa, türev mertebesi,bir mertebe düşürülmüş olur. Benzer şekilde devam edilerek,

$$\int_o^x d\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right) = \int_0^x \left[\int_0^x u(x)\ dx + c_{n-1}\right] dx$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_0^x \int_0^x u(x)\ dx\ dx + c_{n-1}\int_0^x dx + c_{n-2}$$

ve bu şekilde devam edilirse,

……………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………….

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \dots (n-1) \dots \int_0^x u(x)dx \dots dx + \frac{1}{(n-2)!}.c_{n-1}.x^{n-2} + \frac{1}{(n-3)!}.c_{n-2}.x^{n-3} + \dots + c_1$$

bir kez daha integral alınarak,

$$y = \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x)dx \dots dx + \frac{1}{(n-1)!}.c_{n-1}.x^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!}.c_{n-2}.x^{n-2} + \dots + c_1.x + c_0$$

bulunur.

Burada da görüldüğü üzere sık sık çok katlı (n katlı) integrallerle işlem yapmak zorunda kalınılmaktadır. Bunu göstermek üzere,

$$\int \dots (\, n \,) \dots \int$$

biçimindeki notasyonun kullanılması uygun bulunmuştur. İntegraller arasındaki n katlılık mertebesini belirtmektedir.

Yukarıda bulunulan ifadeler (2.28) diferansiyel denkleminde yerine yazıldığında ve gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki bağıntı elde edilmektedir.

$$[\int_0^x \dots (\, n \,) \dots \int_0^x u(t)dt \dots dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} . u(t)dt \,] \qquad (\, 2.31 \,)$$

tek katlı integral yardımıyla ifade edebiliriz. Buna göre,

$$u(x) + a_1(x). \int_0^x u(x)dx + \cdots + a_n(x). \int_0^x \dots (n) \dots \int_0^x u(x)dx \dots dx = F(x) \qquad (2.32)$$

bağıntısı, (2.31) yardımıyla ,

$$u(x) + a_1(x). \int_0^x u(t)dt$$
$$+ a_2(x). \int_0^x (x-t)u(t)dt + \cdots + a_n(x) \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)dt = F(x)$$

şeklinde ifade edilebilecektir. Bu ise, belirli integral özelliklerinden yararlanılarak,

$$u(x) + \int_0^x [\, a_1(x) + a_2(x)(x-t) + a_3(x). \frac{(x-t)^2}{2!} + \cdots$$
$$+ \; a_n(x). \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \,] \,. u(t)dt = F(x)$$

olarak yazılabilir. Burada köşeli parantez içindeki ifade $K(x,t)$ fonksiyonu gözönüne alınırsa,

$$K(x,t) = a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \cdots + \, a_n(x).\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

olur. Bu çekirdek fonksiyon olup, yerine yazılarak,

$$u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = F(x)$$

Şeklindeki, 2. Cins bir Volterra integral denklemine varılır. Böylece (2.28) ile verilen diferansiyel denklem, bir integral denkleme dönüşmüş olmaktadır. [1]

Örnek 2.4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5.\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \;\; , \;\; y'(0) = 0 \qquad (2.33)$$

başlangıç koşullarıyla birlikte verilen diferansiyel denklemini, integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$$

alalım.

$$y'(x)|_0^x = \int_0^x u(x)dx$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(x)dx \quad , \quad y'(x) = \int_0^x u(x)dx$$

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \int_0^x u(x)\,dxdx \quad , \quad y(x)|_0^x = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

bulunanları (2.33) de yerine yazalım;

$$u(x) - 5.\int_0^x u(x)\,dx - 4.\int_0^x (x-t)u(t)dt = 4$$

$$u(x) = 4 + 5.\int_0^x u(x)\,dx + 4.\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u(x) = 4 + \int_0^x [\,5 + 4.(x-t)]u(t)dt$$

tipinde II. Cins bir Volterra integral denklem elde edilmiş olur.

Örnek 2.5.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - sinx.\frac{dy}{dx} + e^x y = x \quad , \qquad y(0) = 1 \;\;, \quad y'(0) = -1$$

başlangıç koşullarıyla birlikte verilen diferansiyel denklemini, integral denkleme dönüştürelim.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)$$

alalım.

$$y'(x)|_0^x = \int_0^x u(x)dx$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(x)\,dx$$

$$y'(x) - (-1) = \int_0^x u(x)\, dx$$

$$y'(x) = \int_0^x u(x)\, dx - 1$$

$$\int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \int_0^x u(x)\, dxdx - \int_0^x dx$$

$$y(x) - y(0) = \int_0^x (x-t)u(t)dt - x$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t)u(t)dt - x + 1$$

$$u(x) - sinx\left[\int_0^x u(x)dx - 1\right] + e^x\left[\int_0^x (x-t)u(t)dt - x + 1\right] = x$$

$$u(x) - sinx\int_0^x u(x)dx + sinx + e^x\int_0^x (x-t)\, u(t)dt - x.e^x + e^x = x$$

$$u(x) = x - sinx + e^x(x-1) + \int_0^x \{\, sinx - e^x(x-t)\}\, u(t)dt$$

olarak integral denkleme dönüştürülebilir.

2.7.2 İntegral Denklemin Diferansiyel Denkleme Dönüştürülmesi

İntegral denklemin bir diferansiyel denkleme dönüştürülmesi de olanaklıdır. Bunu için Leibnitz Formülü'nü uygulamamız yeterlidir. Bu formül, integral işareti altında türev alma işlemini gerçekleştirmektedir. Leibnitz formülü;

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,t)dt = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt + F\{x,B(x)\}\frac{dB}{dx} - F\{x,A(x)\}\frac{dA}{dx} \quad (2.34)$$

biçimindedir. Burada $A(x)$ ve $B(x)$ in sabitler olması halinde,

$$\frac{dA}{dx} = 0, \quad \frac{dB}{dx} = 0$$

olacağından formül,

$$\frac{d}{dx}\int_{A}^{B} F(x,t)dt = \int_{A}^{B} \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}dt$$

olarak kullanılır.

Örnek 2.6.

$$u(x) - \int_{0}^{x} u(t)\cot t\; dt = sinx \qquad (2.35)$$

integral denklemi verilmiştir. Başlangıç koşulu $x = 0$ için $u(x) = 0$ olduğuna göre, bu integral denklemi diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Çözüm: İntegral denklemde her iki tarafın türevi alınırsa;

$$\frac{du(x)}{dx} - \frac{d}{dx}\int_{0}^{x} u(t)cot\ t\ dt = \frac{d(sinx)}{dx}$$

$$u'(x) - \frac{d}{dx}\int_{0}^{x} u(t)\cot t\; dt = cosx$$

olur, Leibnitz formülüne göre;

$$\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)\cot t\,dt = \int_0^x 0.dt + u(x)\cot x.1 = u(x)\cot x$$

bulunacağından (2.35) integral denkleminin,

$$u'(x) - u(x)\cot x = \cos x$$

şeklindeki,birinci mertebeden bir doğrusal diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olur.

Örnek 2.7.

$$u(x) = x + \int_0^x xu(t)dt \qquad (2.36)$$

integral denklemini, diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Çözüm: İki tarafın türevini alırsak,

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{d}{dx}x + \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

$$u'(x) = 1 + \lambda\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt$$

olur, Leibnitz formülünü uygularsak;

$$\frac{d}{dx}\int_0^x xu(t)dt = \int_0^x u(t)dt + xu(x)$$

bulunur.

$$u'(x) = 1 + \lambda\left[\int_0^x u(t)dt + xu(x)\right]$$

olur. İfadenin içinde halen integral bulunduğundan, tekrar türev alarak

$$\frac{du'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(1) + \lambda\ \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt + \lambda\frac{d}{dx}\{x\, u(x)\}$$

$$u''(x) = 0 + \lambda\, u(x) + \lambda\,\{u(x) + x\, u'(x)\}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlendiğinde, (2.36) denklemine uyan diferansiyel denklem,

$$u''(x) - \lambda\, x\, u'(x) - 2\,\lambda\, u(x) = 0$$

olarak bulunur.

Örnek 2.8.

$$u(x) = arctanx - \int_0^x x.t.u(t)dt \qquad (2.37)$$

integral denklemini, diferansiyel denkleme dönüştürelim.

Çözüm: Yine her iki tarafın tüevini alırsak;

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} - [\int_0^x t.u(t)dt + x.x.u(x)]$$

$$u'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x t.u(t)dt - x^2.u(x)$$

$$u'(x) + x^2.u(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x t.u(t)dt$$

elde etmiş oluruz. Denklemde halen integral bulunduğundan, bir kez daha türev alınmalıdır.

$$u''(x) + 2x.u(x) + u'(x).x^2 = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - x.u(x)$$

$$u''(x) + u'(x).x^2 + 3x.u(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

şeklinde bir diferansiyel denklemine dönüştürmüş oluruz.

2.8 İntegral Denklem Sistemleri

Uygulamalarda çoğu kez, integral denklem sistemleri ile karşılaşılabilinir. Böyle bir denklem sistemi , i= 1,2,…,n olmak üzere

$$u_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b K_{ik}(x,t)u_k(t)dt \tag{2.38}$$

yapısındadır.

Tek bir integral denklemi çözmek için kullanılan teori ve çözüm yöntemleri, integral denklem sistemleri için de aynen kullanabilmektedir. Gerçekten de,

$$\int_a^b |K_{ik}(x,t)|^2 dt$$

integrali var ise λ parametresi,

$$|\lambda| < \left[\underset{1 \leq i \leq n}{Max} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K_{ik}(x,t)|^2 dx\, dt} \right]^{-1}$$

eşitsizliği ile belirtilecek şekilde yeterince küçük seçilebiliyorsa, ardışık yaklaştırma ile yakınsak olacaktır.

Eğer $K_{ik}(x,t)$ çekirdeği dejenere tipinde ise (2.38) sistemi, bir doğrusal cebirsel denklem sistemine indirgenebilir. Genel olarak, (2.38) sistemi dejenere çekirdekli bir sisteme indirgenebildiği zaman bu çekirdek tipi için uygulanan yöntem, burada da kullanılabilmektedir.

Bir integral denklem sistemi, izlenen yöntem yardımıyla, tek bir denkleme dönüştürülebilmektedir. Göz önüne alınan x ve t değişkenleri, başlangıç aralığı $[a,b]$ nın, $(b-a)$ olan uzunluğunun n katı uzunlukta olan bir aralıkta da bulunacaklardır. Bu aralığı $[a, nb-(n-1)a]$ olarak seçersek,

$$nb-(n-1)a-a = nb-na+a-a$$

$$= nb-na$$

$$= n(b-a)$$

olarak, yukarıda sözü edilen uzunlukta bir aralık olduğu görülebilir. Bu yeni aralığa göre;

$$a+(i-1)(b-a) \leq x < a+i(b-a)$$

$$a+(k-1)(b-a) \leq t < a+k(b-a)$$

olacak şekilde; $u_i(x), f_i(x)\ ve\ K_{ik}(x,t)$ fonksiyonları

$$\Phi(x) = u_i\{x-(i-1)(b-a)\}$$

$F(x) = f_i\{x-(i-1)(b-a)\}$

$K(x,t)=K_{ik}\{x-(i-1)(b-a), t-(k-1)(b-a)\}$

fonksiyonları yardımıyla tek türlü ifade edilebilirler. Bu tanımlamalara göre (2.38) sistemi de;

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda \int_{a}^{nb-(n-1)a} K(x,t)\,\Phi(t)\,dt$$

İntegral denklemi yardımıyla, tek bir denklem olarak gösterilebilir.

2.9 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.9. B bir Banach uzayı ve $P \subset$ B olsun. Eğer

(i) Her $u, v \in P$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ için $\alpha u + \beta v \in P$

(ii) $u, -u \in P$ ise $u = 0$

koşulları sağlanıyorsa P kümesine $koni$ denir.

Tanım 2.10. E bir reel Banach uzayı ve P, E üzerinde bir koni olsun. $\alpha\colon \mathrm{P} \to [0,\infty)$ dönüşümü eğer $\forall$ x, y $\in$ P ve t $\in [0,1]$ için

α sürekli

$\alpha(tx+(1-t)y) \geq t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y)$,

özelliklerini sağlıyorsa α' ya negatif olmayan, sürekli konkav fonksiyonel denir. P_{a} ve $\mathrm{P}(\alpha, \mathrm{a}, \mathrm{b})$ konveks kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$P_\alpha = \{x \in P\colon \|x\| < \alpha\},$$

$$P(\alpha, a, b) = \{x \in P: a \leq \alpha(x), \|x\| \leq b\}$$

Teorem 4.2. (Leggett-Williams Sabit nokta Teoremi)

A: $\overline{\mathrm{P_c}} \to \overline{\mathrm{P_c}}$ tamamen sürekli bir dönüşüm, α P üzerinde $\forall x \in \overline{P_C}$ için $\alpha(x) \leq \|x\|$ özelliğini taşıyan negatif olmayan sürekli konkav bir fonksiyonel olsun.

$$(i)\ x \in P(\alpha, a, b)\ için\ \{x \in P(\alpha, a, b): \alpha(x) > a\} \neq \emptyset\ ve\ \alpha(Ax) > a$$

$$(ii)\ \|Ax\| < d, için\ \|x\| \leq d;$$

$$(iii)\ \alpha(Ax) > a, için\ x \in P(\alpha, a, c)\ \ ile\ \|Ax\| > b.$$

Koşullarını sağlayan $0 < d < a < b \leq c$ sayıları var olsun.Bu durumda A dönüşümünün $\|x_1\| < d, a < \|x_2\|, \|x_3\| > d\ \ ve\ \alpha(x_3) < a$ koşullarını sağlayan en az üç $x_1, x_2, x_3 \in \overline{P_c}$ sabit noktası vardır.

3 FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1 Giriş

Bu bölümde Fredholm ve Volterra tipindeki integral denklemlerinin özelliklerini, çözüm metodlarını göstereceğiz. (2.23) ve (2.24) ile belirtilen integral denklemler gözönüne alınacak olup, çeşitlerine dolaylı olarak değineceğiz. Bu denklemlerin lineer ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun $a \leq x \leq b$, $a \leq t \leq b$ kare bölgede sürekli ve tanımlı olduğu kabul edilmiştir. Aksi durumlar ayrıca belirtilecektir.

3.2 Sabit Çekirdekli İntegral Denklemler

Bir Fredholm integral denkleminde $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun sabit olduğunu farz edelim. C, bu sabiti göstermek üzere,

$$K(x,t) = C$$

için, (2.24) integral denklemi

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b C\, u(t)dt$$

şeklinde olur. Bu denklem,

$$u(x) = f(x) + \lambda\, C \int_a^b u(t)dt$$

ve $\lambda\, C = \mu$ alınmak suretiyle,

$$u(x) = f(x) + \mu \int_a^b u(t)dt$$

olarak yazılabilir. Bu tür denklemlere uygulamada çok rastlanmaktadır.

Belirli integralin, sınır değerleri sabitler olduğundan bu integralin sonucu sonlu bir değer olacaktır. Bu değeri A ile gösterecek olursak,

$$A = \int_a^b u(t)dt \qquad (3.1)$$

olduğu farzedilip, (3.1) bağıntısı

$$u(x) = f(x) + \mu A \qquad (3.2)$$

şeklini alır. Böylece $u(x)$ fonksiyonunun yapısı hakkında bilgi edinmiş oluyoruz. Bu çözümü olan bir fonksiyon ise integral denklemini sağlaması gerekir. (3.2) de yerine yazılırsa,

$$f(x) + \mu A = f(x) + \mu \int_a^b \{f(t) + \mu A\}dt)$$

olup buradan,

$$A\left[1 - \mu \int_a^b dt\right] = \int_a^b f(t)dt$$

veya

$$A = \frac{1}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t)dt \qquad (3.3)$$

bulunur. A nın, bir değerinin olması için $1 - \mu(b-a) \neq 0$ olmalıdır.Diğer taraftan, $f(x)$ fonksiyonu verilmiş olduğundan,integralde bilinmektedir. A için bu değer (3.2) de yerine yazılırsa, çözümü olan $u(x)$ fonksiyonunun

$$u(x) = f(x) + \mu\left[\frac{1}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t)dt\right]$$

$$u(x) = f(x) + \frac{\mu}{1 - \mu(b-a)} \int_a^b f(t)dt$$

olarak bulunur. $\mu = \lambda C$ olduğunu hatırlarsak,

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda C}{1 - \lambda C(b-a)} \int_a^b f(t)dt \qquad (3.4)$$

olarak bulunur. Buradan da görülmektedir ki eşitliğin sağ tarafında hep bilinen değerler bulunduğundan istenilen $u(x)$ fonksiyonunun çözümü hesaplanabilmektedir. Bu nedenle (3.4) sonucuna, sabit çekirdekli integral denklemlerin *çözüm formülü* şeklinde bakmak yanlış olmayacaktır. Bu durum ancak Fredholm denklemleri için söz konusudur. Volterra denklemlerinde integral sınırlarından birinin x olması nedeniyle, (3.3) de görülen A bir sabit değer değil, x in bir fonksiyonu olur ki bu da yukarıdaki işlem yapmamıza engel olur.

Örnek 3.1.

$$u(x) = x^3 + \lambda \int_0^2 3u(t)dt \qquad (3.5)$$

integral denklemi, $K(x,t) = 3$ olan, sabit çekirdekli bir integral denklemdir. Bu denklemi yukarıda açıklandığı şekilde çözelim.

Çözüm:

$$A = \int_0^2 u(t)dt$$

olarak alırsak

$$u(x) = x^3 + 3\lambda A \qquad (3.6)$$

olur. Bu (3.5) de yerine koyulursa,

$$x^3 + 3\lambda A = x^3 + 3\lambda \int_0^2 (t^3 + 3\lambda A)dt$$

gerekli işlemleri yaptığımızda,

$$A = \int_0^2 t^3 dt + 3\lambda A \int_0^2 dt$$

$$A = \frac{t^4}{4}\Big|_0^2 + 3\lambda A$$

$$A(1 - 3\lambda) = 4$$

olur. Buradan,

$$A = \frac{4}{1 - 3\lambda}$$

bulunur. (3.6) da yerine yazarsak, (3.5) denkleminin çözümü olan

$$u(x) = x^3 + \frac{12\lambda}{1 - 3\lambda}$$

fonksiyonu elde edilir.

Örnek 3.2.

$$u(x) = sinx + 5\int_0^3 u(t)dt$$

integral denklemini (3.4) sonucundan faydalanarak çözelim.

Çözüm: Bunun için aşağıdaki hesaplamaları yapalım:

$$\frac{\lambda C}{1 - \lambda C(b - a)} = \frac{5}{1 - 5.3} = -\frac{5}{14}$$

$$\int_0^3 f(t)dt = \int_0^3 sint\, dt = 1 - cos3$$

bu değerleri (3.4) de yerine yazdığımızda çözüm;

$$u(x) = sinx - \frac{5}{14}(1 - cos3)$$

olarak bulunur.

3.3 Dejenere Çekirdekli İntegral Denklemler

Bir integral denklemde, $K(x,t)$ çekirdeği,

$$K(x,t) = r(x).s(t)$$

şeklinde ise, bu çekirdek fonksiyona *Dejenere Çekirdek* denir.

Bu şekilde bir çekirdek fonksiyonu olan integral denklem,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b r(x)\, s(t)\, u(t)\, dt \tag{3.7}$$

olsun. Bu bir Fredholm integral denklemidir. Bu denklem; $r(x)$, t' den bağımsız olduğu için

$$u(x) = f(x) + \lambda\, r(x) \int_a^b s(t)u(t)dt$$

şeklinde yazılır. Bölüm 2.1.2 de uyguladığımız çözüm yöntemiyle düşünecek olursak; aynı şekilde *A* integral sabitini göstermek üzere,

$$A = \int_a^b s(t)u(t)dt$$

alırsak (2.7) denklemi,

$$u(x) = f(x) + \lambda A\, r(x) \tag{3.8}$$

bulunur. Bu da istenilen çözümü gösterir. Öyleyse (3.7) integral denklemini sağlaması gerekir.

Buna göre,

$$f(x) + \lambda A\, r(x) = f(x) + \lambda\, r(x) \int_a^b \{f(t) + \lambda A\, r(t)\} s(t)dt$$

olup, gerekli sadeleşme işlemleri yapılıp ifade yeniden düzenlenirse,

$$A\left[1-\lambda\int_a^b r(t)s(t)dt\right]=\int_a^b f(t)s(t)dt$$

ve $1-\lambda\int_a^b r(t)s(t)dt \neq 0$ olmak üzere,

$$A=\frac{\int_a^b f(t)s(t)dt}{1-\lambda\int_a^b r(t)s(t)dt}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafında bulunan integraller; $f(x), r(x), s(t)$ bilinen fonksiyonlar olduklarından hesaplanabilir. Dolayısıyla A belirlenebilecektir. Bu sonuç (3.8) de yerine yazılırsa $u(x)$ fonksiyonu,

$$u(x)=f(x)+\frac{\lambda\int_a^b f(t)s(t)dt}{1-\int_a^b r(t)s(t)dt}\,r(x) \tag{3.9}$$

olarak bulunur. Bu sonuç, dejenere çekirdekli bir Fredholm integral denkleminin çözüm formülü olarak da kullanılabilir.

Örnek 3.3.

$$u(x)=x^2+\int_0^3 e^{2x+t}\,u(t)dt \tag{3.10}$$

integral denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$K(x,t)=e^{2x+t}=e^{2x}.e^t$$

olarak alınırsa $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu, dejenere tipte olur. Burada,

$$r(x)=e^{2x} \qquad ; \qquad s(t)=e^t$$

dir. (3.10) denklemi,

$$u(x) = x^2 + e^{2x} \int_0^3 e^t \, u(t) \, dt$$

şeklinde yazılır ve

$$A = \int_0^3 e^t u(t) dt$$

denilirse,

$$u(x) = x^2 + Ae^{2x} \tag{3.11}$$

olur. Bu çözümü denklemde yerine yazarsak,

$$x^2 + Ae^{2x} = x^2 + e^{2x} \int_0^3 e^t \{t^2 + Ae^{2t}\} dt$$

ve düzenlenirse,

$$A = \int_0^3 t^2 e^t \, dt + A \int_0^3 e^{3t} dt$$

olur. İntegralleri ayrı ayrı hesaplarsak;

$$\int_0^3 t^2 e^t dt = (t^2 - 2t + 2)e^t \Big|_0^3 = 5e^3 - 2$$

$$\int_0^3 e^{3t} \, dt = \frac{1}{3} e^{3t} \Big|_0^3 = \frac{1}{3}(e^9 - 1)$$

buradan,

$$A = 5e^3 - 2 + \frac{1}{3} A(e^9 - 1)$$

$$A = \frac{15e^3 - 6}{4 - e^9}$$

bulunur. Bu değeri (3.11) da yerine yazarsak çözümü aradığımız $u(x)$ fonksiyonunun

$$u(x) = x^2 + \frac{15e^3 - 6}{4 - e^9} . e^{2x}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.4.

$$u(x) = x + 3 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxcost \; u(t)dt \qquad (3.12)$$

dejenere çekirdekli integral denklemini çözünüz.

Çözüm:

Burada,

$$r(x) = sinx \qquad , \qquad s(t) = cost$$

dir. (3.11) integral denklemi

$$u(x) = x + 3 + sinx \int_0^{\frac{\pi}{2}} cost \, u(t)dt$$

şeklinde yazılır.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cost \, u(t)dt$$

denilirse,

$$u(x) = x + 3 + A \, sinx$$

bulunur ki bu da aranılan çözümdür. (3.11) de yerine yazacak olursak

$$x + 3 + A\,sinx = x + 3 + sinx \int_0^{\frac{\pi}{2}} cost\{t + 3 + A\,sint\}dt$$

gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra,

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+3)cost\,dt + A\int_0^{\frac{\pi}{2}} sint\,cost\,dt \qquad (3.13)$$

yazılabilir. İntegralleri ayrı ayrı hesaplarsak;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+3)cost\,dt = \frac{\pi+4}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sint\,cost\,dt = \frac{1}{2}$$

bulunur, yerlerine yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$A = \pi + 4$$

elde edilir. Buradan da $u(x)$ fonksiyonu

$$u(x) = x + 3 + (\pi + 4)\,sinx$$

şeklinde bulunur.

3.3.1 Dejenere Çekirdeğin Genel Hali(Pincherle-Goursat Çekirdeği)

Dejenere çekirdeğin daha genel hali,

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n} r_i(x)s_i(t)$$

olarak gözönüne alalım.

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denkleminin $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu bu türden bir fonksiyon olsun.

Denklem,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \{r_1(x)s_1(t)+r_2(x)s_2(t)+\cdots + r_n(x)s_n(t)\}\,u(t)dt \qquad (3.14)$$

şeklinde olacaktır. Bu denklem, $r_i(x)$ fonksiyonları t den bağımsız oldukları için integral dışına çıkarılabilir ve belirli integral kuralları gereğince,

$$u(x)=f(x)+\lambda\left[r_1(x)\int_a^b s_1(t)u(t)dt+\cdots + r_n(x)\int_a^b s_n(t)\,u(t)\,dt\right] \qquad (3.15)$$

şekline çevrilebilir.

$$A_1=\int_a^b s_1(t)u(t)dt \quad ;\ A_2=\int_a^b s_2(t)u(t)dt \quad ;\ldots;\ A_n=\int_a^b s_n(t)u(t)dt$$

ile gösterirsek, (3.15) denklemi

$$u(x)=f(x)+\lambda\,\{A_1r_1(x)+A_2r_2(x)+\cdots+A_nr_n(x)\} \qquad (3.16)$$

şeklinde de yazılabilecektir. Bu ise çözümü aranılan $u(x)$ fonksiyonunu verir. Bu da denklemi sağlaması gerektiğinden,

$$f(x) + \lambda \{A_1 r_1(x) + A_2 r_2(x) + \cdots + A_n r_n(x)\} =$$

$$f(x) + \lambda \int_a^b \{r_1(x)s_1(t) + \cdots + r_n(x)s_n(t)\}\big\{f(t) + \lambda \{A_1 r_1(t) + \cdots + A_n r_n(t)\}\big\}\, dt$$

yazılır. Bu ifadeyi düzenlersek;

$$f(x) + \lambda\, A_1 r_1(x) + \lambda\, A_2 r_2(x) + \cdots + \lambda\, A_n r_n(x) =$$

$$f(x) + \lambda\, r_1(x) \int_a^b s_1(t)\{f(t) + \lambda\, A_1 r_1(t) + \cdots + \lambda\, A_n r_n(t)\} dt$$

$$+\lambda\, r_2(x) \int_a^b s_2(t)\{f(t) + \lambda\, A_1 r_1(t) + \cdots + \lambda\, A_n r_n(t)\}\, dt + \cdots$$

$$+ \lambda\, r_n(x) \int_a^b s_n(t)\{f(t) + \lambda\, A_1 r_1(t) + \cdots + \lambda\, A_n r_n(t)\} dt$$

elde edilir. Sadeleştirmeler yapılır ve $r_i(x)$ fonksiyonlarının katsayıları karşılıklı olarak eşitlenirse;

$$A_1 = \int_a^b s_1(t)\, \{f(t) + \lambda\, A_1 r_1(t) + \cdots + \lambda\, A_n r_n(t)\}\, dt$$

$$A_2 = \int_a^b s_2(t)\ \{f(t) + \lambda\, A_1 r_1(t) + \cdots + \lambda\, A_n r_n(t)\} dt \qquad (3.17)$$

....

....

$$A_n = \int_a^b s_n(t)\,\{f(t) + \lambda\, A_1 r_1(t) + \cdots + \lambda\, A_n r_n(t)\}dt$$

bulunur. Bu belirli integraller tek tek ayrılırsa, pek çok belirli integral oluşur. Bu integralleri, aşağıda olduğu şekilde gösterelim:

$$B_1 = \int_a^b s_1(t)f(t)dt \quad ; \quad B_2 = \int_a^b s_2(t)f(t)dt \quad ; \quad B_n = \int_a^b s_n(t)f(t)dt$$

$$C_{11} = \int_a^b s_1(t)r_1(t)dt \quad ; \quad C_{12} = \int_a^b s_1(t)r_2(t)dt \quad ; \quad C_{1n} = \int_a^b s_1(t)\, r_n(t)dt$$

$$C_{21} = \int_a^b s_2(t)r_1(t)dt \quad ; \quad C_{22} = \int_a^b s_2(t)r_2(t)dt \quad ; \quad C_{2n} = \int_a^b s_2(t)r_n(t)dt$$

....
....

....
....

$$C_{n1} = \int_a^b s_n(t)r_1(t)dt \quad ; \quad C_{n2} = \int_a^b s_n(t)r_2(t)dt \quad ; \quad C_{nn} = \int_a^b s_n(t)r_n(t)dt$$

Bu gösteriliş tarzına göre (3.17) bağıntıları,

$A_1 = B_1 + \lambda\, A_1 C_{11} + \lambda\, A_2 C_{12} + \cdots + \lambda\, A_n C_{1n}$

$A_2 = B_2 + \lambda\, A_1 C_{21} + \lambda\, A_2 C_{22} + \cdots + \lambda\, A_n C_{2n}$

....

....

$A_n = B_n + \lambda\, A_1 C_{n1} + \lambda\, A_2 C_{n2} + \cdots + \lambda\, A_n C_{nn}$

şeklini alır. Bu bağıntılar ise yeni bir düzenlemeyle,

$$(1-\lambda\, C_{11})A_1 - \lambda\, C_{12}A_2 - \lambda\, C_{13}A_3 - \cdots - \lambda\, C_{1n}A_n = B_1$$

$$-\lambda\, C_{21}A_1 + (1-\lambda\, C_{22})A_2 - \lambda\, C_{23}A_3 - \cdots - \lambda\, C_{2n}A_n = B_2$$

....

(3.18)

....

$$-\lambda\, C_{n1}A_1 - \lambda\, C_{n2}A_2 - \lambda\, C_{n3}A_3 - \cdots + (1-\lambda\, C_{nn})A_n = B_n$$

den oluşan bir lineer sistem halinde yazılabilir. Bu sistemin çözümünün olması için *Cramer teoremi* gereğince, $D(\lambda)$ bu sistemin katsayılar determinantını göstermek üzere,

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda C_{11} & -\lambda C_{12} \dots\dots & -\lambda C_{1n} \\ -\lambda C_{21} & 1-\lambda C_{22} \dots\dots & -\lambda C_{2n} \\ \vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots & \vdots\;\vdots \\ -\lambda C_{n1} & -\lambda C_{n2} \dots\dots & 1-\lambda C_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

koşuluna bağlıdır. Bu taktirde $A_1, A_2, \dots, A_n$ sabitleri,birbirinden bağımsız olarak hesaplanabilir. Buna *Karakteristik Determinant* denir. $D(\lambda) \neq 0$ koşulu gerçekleşiyorsa, integral denklemin bir çözümü vardır. Bu çözüm (3.16) bağıntısından yazılabilir. Buradan görüldüğü gibi bu tür bir integral denklemin çözümü, lineer cebir kuralları uygulanarak bulunabilecektir.

Cramer teoremi gereğince , $i = 1,2,3, \dots, n$ olmak üzere

$$A_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} \qquad (3.19)$$

yazılır. Burada $D_i(\lambda)$ determinantları, $D(\lambda)$ determinantında i. Sütun elemanları kaldırılarak, yerine B_i lerden oluşan sütunun konmasıyla elde edilen determinantlardır. Bu şekilde hesaplanan A_i değerleri, (3.16) ifadesinde yerlerine yazılarak $u(x)$ çözümü bulunmuş olacaktır.

(3.18) ile belirtilen *karakteristik sistem*, matrisel olarak da aşağıda olduğu şekilde gösterilebilir:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \; ; \; A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere, (3.18) sisteminin matrisiel ifadesi,

$$(1 - \lambda\, C\,).A = B$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 3.5.

$$u(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t)\, u(t)dt = cosx \qquad (3.20)$$

integral denkleminin çözümünü yapalım.

Çözüm:

$$K(x,t) = \sin(x-t) = sinx.cost - cosx.sint$$

olarak dejenere çekirdeğin genel halindedir. Burada,

$$r_1(x) = sinx \;\; ; \;\; s_1(t) = cost \;\; ; \quad r_2(x) = -cosx \;\; ; \;\; s_2(t) = sint$$

dir. Buna göre çekirdek fonksiyon,

$$K(x,t) = r_1(x).s_1(t) + r_2(x).s_2(t)$$

yapısındadır.

Yukarıda incelediğimiz çözüm tekniğini, probleme uygulayalım:

$$u(x) - \lambda \int_0^{\pi} \{sinx\ cost - cosx\ sint\} u(t)dt = cosx$$

$$u(x)-\lambda\left[sinx\int_0^\pi cost\,u(t)dt-cosx\int_0^\pi sint\,u(t)dt\right]=cosx$$

şeklinde yazılabilir.

$$A_1=\int_0^\pi cost\,u(t)dt\quad ;\quad A_2=\int_0^\pi sint\,u(t)dt$$

denirse,

$$u(x)=cosx+\lambda(A_1sinx-A_2cosx) \tag{3.21}$$

bulunur. Bu çözüm olan fonksiyon ise, denklemi sağlaması gerektiğinden,

$$\begin{aligned}&cosx+\lambda(A_1sinx-A_2cosx)\\&\qquad=cosx+\lambda\int_0^\pi \sin(x-t).\{cost+\lambda(A_1sint-A_2cost)\}\,dt\end{aligned}$$

ve sadeleştirmeler yapılarak işleme devam edilirse,

$$A_1sinx-A_2cosx=\int_0^\pi (sinx\,cost-cosx\,sint)(cost+\lambda A_1sint-\lambda A_2cost)dt$$

$$\begin{aligned}&=\int_0^\pi sinxcos^2t\,dt\\&\qquad-\int_0^\pi cosx\,sint\,cost\,dt\\&\qquad+\lambda A_1\int_0^\pi sinx\,cost\,sint\,dt-\lambda A_2\int_0^\pi sinxcos^2t\,dt\end{aligned}$$

$$-\lambda A_1\int_0^\pi cosx\,sin^2t\,dt+\lambda A_2\int_0^\pi cosx\,sint\,cost\,dt$$

bulunur. Buradaki integraller, t ye bağlı olduğu için bu ifade

$$A_1 sinx - A_2 cosx$$
$$= sinx \int_0^\pi cos^2 t\, dt$$
$$- \frac{1}{2} cosx \int_0^\pi \sin 2t\, dt + \lambda A_1 \left[\frac{1}{2} sinx \int_0^\pi \sin 2t\, dt - cosx \int_0^\pi sin^2 t\, dt \right]$$
$$- \lambda A_2 \left[sinx \int_0^\pi cos^2 t\, dt - \frac{1}{2} cosx \int_0^\pi \sin 2t\, dt \right]$$

şeklinde düzenlenir ve belirli integraller tek tek hesaplanırsa;

$$\int_0^\pi cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \int_0^\pi \sin 2t\, dt = 0 \quad ; \quad \int_0^\pi sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$$

olup,

$$A_1 sinx - A_2 cosx = \frac{\pi}{2} sinx - \lambda A_1 \frac{\pi}{2} cosx - \lambda A_2 \frac{\pi}{2} sinx$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \lambda A_2 . \frac{\pi}{2} \right) sinx - \lambda A_1 . \frac{\pi}{2} cosx$$

bulunur. $sinx$ ve $cosx$ li terimlerin katsayıları karşılıklı olarak eşitlenirse,

$$A_1 = \frac{\pi}{2} - \lambda . \frac{\pi}{2} A_2$$

$$A_2 = \lambda \frac{\pi}{2} A_1$$

ve bu da düzenlenerek,

$$A_1 + \lambda \frac{\pi}{2} A_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$-\lambda \frac{\pi}{2} A_1 + A_2 = 0$$

sistemi elde edilir. Katsayılar determinantı,

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi}{2}\lambda \\ -\frac{\pi}{2}\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2\pi^2}{4} \neq 0$$

olup, sistemin bir çözümü vardır. (3.19) a göre A_1, A_2 sabitleri hesaplanabilir.

$$D_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2}\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}$$

$$D_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\lambda & 0 \end{vmatrix} = \frac{\pi^2}{4}\lambda$$

olup, bunlardan

$$A_1 = \frac{D_1(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\lambda^2\pi^2}{4}} = \frac{2\pi}{4 + \lambda^2\pi^2}$$

$$A_2 = \frac{D_2(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\frac{\pi^2}{4}\lambda}{1 + \frac{\lambda^2\pi^2}{4}} = \frac{\lambda\pi^2}{4 + \lambda^2\pi^2}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Bulunan bu değerleri (3.21) de yerlerine yazarsak, $u(x)$ çözümünü bulmuş oluruz.

$$u(x) = cosx + \lambda\left[\frac{2\pi}{4 + \lambda^2\pi^2}\ sinx - \frac{\lambda\pi^2}{4 + \lambda^2\pi^2}\ cosx\right]$$

veya

$$u(x) = cosx + \frac{\lambda\pi}{4 + \lambda^2\pi^2}(2\ sinx - \lambda\pi\ cosx)$$

sonucuna varılır. Bu ifade daha kısa olarak,

$$u(x) = \frac{2}{4 + \lambda^2\pi^2}(2\,cosx + \lambda\pi\,sinx)$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 3.6.

$$u(x) = x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\,cost + t^2 sinx + cosx\,sint)u(t)dt \tag{3.22}$$

integral denkleminin çözümünü yapalım.

Çözüm:

$$K(x,t) = x\,cost + t^2\,sinx + cosx\,sint$$

olarak dejenere çekirdek tipinin en genel halindedir. Verilen integral denklemi,

$$u(x) = x + \lambda\,x \int_{-\pi}^{\pi} cost\,u(t)dt + \lambda\,sinx \int_{-\pi}^{\pi} t^2\,u(t)dt + \lambda\,cosx \int_{-\pi}^{\pi} sint\,u(t)dt$$

şeklinde yazar ve

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} cost\,u(t)dt \quad ; \quad A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} t^2\,u(t)dt \quad ; \quad A_3 = \int_{-\pi}^{\pi} sint\,u(t)dt$$

denirse, $u(x)$ fonksiyonu

$$u(x) = x + \lambda\,\{A_1 x + A_2 sinx + A_3 cosx\} \tag{3.23}$$

şeklini alır. Bu çözüm olması gereken fonksiyon olduğundan (3.22) denklemini sağlaması gerekir. Buna göre,

$x + \lambda\{A_1(x) + A_2 sinx + A_3 cosx\} =$

$$x + \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x\,cost + t^2\,sinx + cosx\,sint)(t + \lambda A_1 t + \lambda A_2 sint + \lambda A_3 cost)dt$$

olmalıdır. İfade sadeleştirilir ve düzenlenirse,

$$A_1 = \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda A_1 t + \lambda A_2 sint + \lambda A_3 cost + t)\; cost\; dt$$

$$A_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda A_1 t + \lambda A_2 sint + \lambda A_3 cost + t)\; t^2 dt$$

$$A_3 = \int_{-\pi}^{\pi} (\lambda A_1 t + \lambda A_2 sint + \lambda A_3 cost + t) sint\; dt$$

olur. Buradan, yeni bir düzenleme ile

$$(1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t\; cost\; dt)A_1 - \lambda A_2 \int_{-\pi}^{\pi} sint\; cost\; dt - \lambda A_3 \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 t\; dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t\; cost\; dt - \lambda A_1 \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt + (1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} t^2 sint\; dt)A_2 - \lambda A_3 \int_{-\pi}^{\pi} t^2\; cost\; dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt - \lambda A_1 \int_{-\pi}^{\pi} t\; sint\; dt - \lambda A_2 \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 t\; dt + (1 - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} cost\; sint\; dt)A_3$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} t\; sint\; dt$$

bulunur. Buradaki integralleri ayrı ayrı hesaplayalım;

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\; cost\; dt = 0 \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} sint\; cost\; dt = 0 \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} cos^2 t\; dt = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^3 dt = 0 \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} t^2 sint\, dt = 0\, ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} t^2\, cost\, dt = -4\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\, sint\, dt = 2\pi \quad ; \quad \int_{-\pi}^{\pi} sin^2 t\, dt = \pi$$

bunlar, yukarıda yerlerine yazılırsa,

$$A_1 - \lambda\pi A_3 = 0$$

$$A_2 + 4\lambda\pi A_3 = 0$$

$$-2\lambda\pi A_1 - \lambda\pi A_2 + A_3 = 2\pi$$

denklem sistemi elde edilir.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda^2\pi^2 \neq 0$$

olarak sistemin çözümü vardır. (3.19) gereğince,

$$A_1 = \frac{D_1(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{1+2\lambda^2\pi^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 0 & 4\lambda\pi \\ 2\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

$$A_2 = \frac{D_2(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{1+2\lambda^2\pi^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 0 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & 2\pi & 1 \end{vmatrix} = \frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

$$A_3 = \frac{D_3(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{1+2\lambda^2\pi^2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 2\pi \end{vmatrix} = \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}$$

bulunur. Bunlar (3.23) de yerine konarak, integral denklemin çözümü olan $u(x)$ fonksiyonu

$$u(x) = x + \lambda\left[\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\, x - \frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}\, sinx + \frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}\, cosx\right]$$

veya

$$u(x) = x + \frac{2\lambda\pi}{1 + 2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi \, sinx + cosx)$$

şeklinde bulunmuş olur.

3.4 Çözücü Çekirdek (Resolvant)

Bir önceki paragrafta sözü edilen $D(\lambda)$ determinantında, $i.$ sütunun kaldırılarak yerine, sistemin ikinci yanında bulunan $B_{1,} B_2, \dots, B_n$ sabitlerinin konmasıyla elde edilen determinant $D_i(\lambda)$ ile gösterilmişti.Bu determinantın, $i.$ sütun elemanlarına göre Laplace açılımını yapalım. Bu elemanlara ait eşçarpanlar Δ ile gösterilirse

$$D_i(\lambda) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} B_i \, \Delta_{ji}$$

yazılabilecektir. Buna göre (2.17) ile verilen A_i sabitleri,

$$A_i = \frac{D_i(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{1}{D(\lambda)} . \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} B_i \Delta_{ji} \tag{3.24}$$

şeklinde hesaplanmıştır. Önceki uygulamalarda da yaptığımız işlemler, gerçekte bu şekilde olmuştur.B_i sabitleri hatırlanacağı gibi,

$$B_i = \int_a^b s_i(t) f(t) dt$$

şeklindeki belirli integraller olarak tanımlanmıştır. Buna göre, (3.24) bağıntısı,

$$A_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \Delta_{ji} \int_a^b s_i(t) f(t) dt$$

olur. Bununla,

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} r_i(x) \int_a^b s_i(t)u(t)dt$$

denklemine gidilirse,

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} r_i(x) A_i$$

$$= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} r_i(x) \left[\frac{1}{D(\lambda)} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \Delta_{ji} \int_a^b s_i(t) f(t) dt \right]$$

$$= f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b \left[\left[\sum_{i=1}^{n} r_i(x) . \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \Delta_{ji} \right] s_i(t) \right] f(t) dt$$

olup, buradaki ilk köşeli parantez içi $D(x,t;\lambda)$ ile gösterirsek,

$$u(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} . \int_a^b D(x,t;\lambda) f(t) dt$$

veya

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \; f(t) dt \tag{3.25}$$

yazılabilir. Burada ki

$$\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

oranı $\Gamma(x,t;\lambda)$ ile gösterilir.

ve buna *Çözücü çekirdek* veya *Resolvant* denir.

$$\Gamma(x,t;\lambda) = \frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{3.26}$$

bununla (3.25) denklemine gidilirse, integral denklem

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda)\, f(t)dt \tag{3.27}$$

şeklini alır.

3.4.1 Çekirdek İle Çözücü Çekirdek Arasındaki İlişki

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

integral denkleminde $t = y$ koyarak, integrasyon değişkenini y ile gösterelim.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy$$

olur. (3.27) bağıntısıyla karşılaştırılarak,

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)u(y)dy = f(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda)f(t)dt$$

yazılabilir. Sadeleştirmeler yapılır ve $u(y)$ yerine de (3.27) ifadesi konursa,

$$\int_a^b K(x,y)\left[f(y) + \lambda \int_a^b \Gamma(t,y;\lambda)f(t)dt\right]dy = \int_a^b \Gamma(x,t;\lambda)f(t)dt$$

$$\int_a^b K(x,y)\left[f(y)+\lambda\int_a^b \Gamma(t,y;\lambda)f(t)dt\right]dy-\int_a^b \Gamma(x,t;\lambda)f(t)dt=0$$

$$\int_a^b \left[K(x,y)+\lambda\int_a^b K(x,y)\Gamma(y,t;\lambda)dy-\Gamma(x,t;\lambda)\right]f(t)dt=0$$

bulunur. Burada $f(t)\neq 0$ dır. Öyleyse ifadenin sıfıra eşit olabilmesi, köşeli parantezin sıfır olması ile mümkün olur. Çünkü belirli integral olarak da sıfır olacaktır. Buna göre,

$$K(x,y)+\lambda\int_a^b K(x,y)\Gamma(y,t;\lambda)dy-\Gamma(x,t;\lambda)=0$$

bağıntısından,

$$\Gamma(x,t;\lambda)=K(x,t)+\lambda\int_a^b K(x,y)\Gamma(y,t;\lambda)dy$$

bağıntısına varılır. Bu $K(x,t)$ çekirdeği ile $\Gamma(x,t,\lambda)$ çözücü çekirdeği arasındaki ilişkiyi belirleyen bağıntıdır.[1]

3.4.2 Çözücü Çekirdeğin Tekliği

Teorem 3.7. $\Gamma(x,t;\lambda)$ olarak tanımlanan çözücü çekirdek, bir integral denklemde tek türlü belirir.

İspat: Aksini iddia ederek, Γ_1 ve Γ_2 gibi iki çözücü çekirdeğin mevcut olabileceğini kabul edelim. Bu takdirde,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma_1(x,t;\lambda)dt$$

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b \Gamma_2(x,t;\lambda)dt$$

bağıntılarının her ikisinin de mevcut olması gerekir. Bu iki ifade taraf tarafa çıkarılırsa, burada, $\lambda \neq 0$ ve $f(x) \neq 0$ olduklarından, bu belirli integral ancak ve ancak

$$\Gamma_1(x, t; \lambda) - \Gamma_2(x, t; \lambda) = 0$$

halinde sıfıra eşit olur. Bu ise,

$$\Gamma_1(x, t; \lambda) = \Gamma_2(x, t; \lambda)$$

denk olacağından, gerçekte bu sonuç Γ_1 ile Γ_2 nin birbirinden farklı olamayacağını dolayısıyla çözücü çekirdeğin tek türlü belireceğinin ifade eder.[1]

4 FREDHOLM İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÜÇ POZİTİF ÇÖZÜMÜ

Son yıllarda sınır değer problemlerinin pozitif çözümleri üzerine bir çok çalışmalar yapılmıştır $[2-6]$.

Fredhom integral denklem sistemleri Agarwal, O'Regan ve Wong [7] tarafından incemiştir:

$$u_i(t) = \int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s)\big) ds, \qquad t \in [0,1], \qquad 1 \le i \le n, \qquad (4.1)$$

Tek, iki ve çoklu çözümlerin varlığı için Leray-Schauder[8] alternatif metodu ve koniler üzerinde Krasnosel'skii [9] sabit nokta teoremi yardımıyla elde edilmiştir.

Sun ve Zao Legget-Williams [10] sabit nokta teoremi yardımıyla (4.1) denkleminin en az üç çözümünün var olabilmesi için f_i doğrusal olmayan fonksiyonları ve g_i çekirdek fonksiyonlarının sağlaması gereken koşulları elde etmişlerdir.

4.1 Üç pozitif çözümün varlığı

Kolaylık için tezin ana teoreminde sağlanması gerekli şartlar aşağıda listelenmiştir.

(C1) Her bir $1 \le i \le n$ için

$$g_i^t(s) \equiv g_i(t,s) \ge 0; \quad \forall\, t \in [0,1] \;\; ve \;\; s \in [0,1] \qquad \text{(hhh)}$$

$$g_i^t(s) \in L^1[0,1], \qquad t \in [0,1],$$

$$[0,1] \to L^1[0,1]$$

$$t \to g_i^t \text{ dönüşümü sürekli olsun.}$$

(C2) $\forall\ 1 \le i \le n$ için

$$g_i(t,s) \ge M_i H_i(s) \ge 0, \qquad t \in [x_1, x_2], \qquad s \in [0,1]. \ (hhh)$$

olacak şekilde $M_i \in (0,1)$, $H_i \in L^1[0,1]$ ve bir $[x_1, x_2] \subseteq [0,1]$ aralığı var olsun.

(C3) $1 \le i \le n$ için

$$g_i(t,s) \le H_i(s), \quad \forall\ t \in [0,1], \quad s \in [0,1]. \ (hhh)$$

(C4) $f_i : [0,1] \times [0,\infty)^n \to [0,\infty)$, $1 \le i \le n$, sürekli olsun ve

$$f_i(s, u_1, u_2, \dots, u_n) < \frac{d}{nD_i}, \qquad s \in [0,1], \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \le d \quad ve$$

$$f_{i_0}(s, u_1, u_2, \dots, u_n) > \frac{a}{C_{i_0}}, \qquad s \in [x_1, x_2], \quad \sum_{k=1}^{n} u_k \in \left[a, \frac{a}{M}\right]$$

olacak şekilde $0 < d < \mathrm{a}$ sayıları ve $i_0 \in \{1,2,\dots,n\}$ sayıları var olsun

Burada

$$D_i = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 g_i(t,s)ds, \qquad C_{i_0} = \max_{t\in[x_1,x_2]} \int_{x_1}^{x_2} g_{i_0}(t,s)ds, \qquad ve \quad M = \min_{1\le i\le n} M_{i,}$$

(C5) Aşağıdaki koşullardan birisi sağlansın

H1) $\lim_{\sum_{k=1}^{n} u_k \to \infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f_i(t,u_1,u_2,\dots,u_n)}{\sum_{k=1}^{n} u_k} < \frac{1}{nD_i}, \qquad 1 \le i \le n,$

H2) $t \in [0,1]$ ve $\sum_{k=1}^{n} u_k \le c$ ise

$$f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) < \frac{c}{nD_i}, \qquad 1 \le i \le n.$$

olacak şekilde $c > a/M$ şartını sağlayan c sayısı vardır.

Sun ve Zao nın ana sonucu aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 4.3. (C1)-(C5) koşulları sağlansın Bu durumda (4.1) integral denklem sisteminin en az üç pozitif çözümü vardır.

İspat: Legett-Williams sabit nokta teoreminin koşullarının sağlandığını göstereceğiz. Bunun için (4.1) integral denklem sistemine denk bir operatör tanımlayacağız.

$$\|u\| = \sum_{k=1}^{n} |u_k|_0$$

normu ile normlanmış $E = (C[0,1])^n$ Banach uzayını ele alalım. Burada $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E$ ve $|u_k|_0 = \max_{t\in[0,1]} |u_k(t)|$.

$$P = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E: u_i(t) \geq 0 \ \ için \ \ t \in [0,1], \quad 1 \leq i \leq n\}$$

kümesini ele alalım. Bu kümenin koni olduğu açıktır.

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in P$ için

$$\alpha(u) = \sum_{k=1}^{n} \min_{t\in[x_1,x_2]} u_k(t),$$

ve

$$(Su)(t) = (Su_1, Su_2, \dots, Su_n), \quad t \in [0,1],$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Burada

$$Su_i(t) = \int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds, \quad t \in [0,1], \quad 1 \leq i \leq n.$$

ile tanımlanır.

α'nın $\alpha(u) \leq \|u\|$; $\forall\, u \in P$ özelliğini sağlayan negatif olmayan sürekli konkav bir fonksiyon olduğu ve $S: P \to P$ tamamen sürekli bir dönüşüm olduğu açıktır.

Eğer S operatörünün üç sabit noktasının varlığını ispatlarsak (4.1) denklem sisteminin üç pozitif çözümünün varlığını ispatlamış oluruz.

Öncelikle (H1) koşulunun sağlandığını varsayalım.Bu durumda $c > a/M$ olacak şekilde bir c sayısı vardır. $S: \overline{P_c} \to P_c$. Bunu göstermek için

$$\lim_{\sum_{k=1}^{\infty} u_k \to \infty} \max_{t\in[0,1]} \frac{f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n)}{\sum_{k=1}^{n} u_k} < \frac{1}{nD_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\tau_i > 0$ vardır ve $\sigma_i < 1/nD_i$ vardır. Öyle ki eğer $u_k \geq 0$ $(1 \leq k \leq n)$ ve $\sum_{k=1}^{n} u_k > \tau_i$ ise

$$\max_{t\in[0,1]} \frac{f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n)}{\sum_{k=1}^{n} u_k} \leq \sigma_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

yani

$f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \sigma_i \sum_{k=1}^{n} u_k$ $t \in [0,1]$, $u_k \geq 0$ $(1 \leq k \leq n)$ ve $\sum_{k=1}^{n} u_k > \tau_i$

$1 \leq i \leq n$ için β_i sayılarını

$\beta_i = max\{f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n): t \in [0,1], \quad u_k \in [0, \tau_i], 1 \leq k \leq n\}$

ile tanımlayalım. Bu durumda

$f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) \leq \sigma_i \sum_{k=1}^{n} u_k + \beta_i$ $\forall$ $t \in [0,1]$ için ve $u_k \geq 0$ $(1 \leq k \leq n)$

c sayısını

$$c > max\left\{\max_{1\le i\le n}\frac{n\beta_i D_i}{1-n\sigma_i D_i},\frac{a}{M}\right\}.$$

olacak şekilde alalım.

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \overline{P_c}$ ise $1 \le i \le n$ için

$$|Su_i|_0 = \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big)ds$$

$$\le \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 g_i(t,s)\left[\sigma_i \sum_{k=1}^{n} u_k(s) + \beta_i\right]ds$$

$$\le \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 g_i(t,s)\left[\sigma_i \sum_{k=1}^{n} |u_k|_0 + \beta_i\right]ds$$

$$= (\sigma_i\|u\| + \beta_i)\max_{t\in[0,1]}\int_0^1 g_i(t,s)ds$$

$$\le (\sigma_i c + \beta_i)D_i < \frac{c}{n}$$

bu durumda $\|Su\| = \sum_{i=1}^{n}|Su_i|_0 < c$.

Daha sonra (H2) nin sağlandığını kabul edelim; yani $1 \le i \le n$ ve her $t \in [0,1]$ için $f_i(t, u_1, u_2, \dots, u_n) < r/nD_i$, koşulunu sağlayan r sayısı var olsun.

$u_k \ge 0$ $(1 \le k \le n)$ ve $\sum_{k=1}^{n} u_k \le r$, için $S: \overline{P_r} \to P_r$ dönüşümü

$$|Su_i|_0 = \max_{t\in[0,1]}\int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big)ds$$

$$< \frac{r}{nD_i}D_i = \frac{r}{n}\,, \quad 1 \le i \le n.$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\|Su\| = \sum_{i=1}^{n} |Su_i|_0 < r.$$

olarak bulunur. Bu da gösteriyor ki (C5) koşulunun sağlanması durumunda $S:\overline{P_c} \to P_c$ dönüşümü için $c > a/M$ olacak şekilde bir c sayısı vardır.

$r = d$ ise S $\overline{P_d}$ den P_d ye içine bir dönüşüm olduğunu göstereceğiz.

$\{u \in P(\alpha, a, a/M): \alpha(u) > a\} \neq \emptyset$ ve $\alpha(Su) > a$ olacak şekildeki bütün u lar için sürekli bir fonksiyon olan $u \in P(\alpha, a, a/M)$.

$$\left(\frac{a + a/M}{2n}, \frac{a + a/M}{2n}, \dots, \frac{a + a/M}{2n}\right) \in \left\{u \in P\left(\alpha, a, \frac{a}{M}\right): \alpha(u) > a\right\}$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in P(\alpha, a, a/M)$

Bütün $t \in [x_1, x_2]$ için

$$\frac{a}{M} \geq \|u\| = \sum_{i=1}^{n} |u_i|_0 \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(t) \geq \sum_{i=1}^{n} \min_{t \in [x_1, x_2]} u_i(t) = \alpha(u) > a,$$

$$\min_{t \in [x_1, x_2]} Su_{i_0}(t) = \min_{t \in [x_1, x_2]} \int_0^1 g_{i_0}(t, s) f_{i_0}\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds$$

$$\geq \min_{t \in [x_1, x_2]} \int_{x_1}^{x_2} g_{i_0}(t, s) f_{i_0}\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds$$

$$> \frac{a}{C_{i_0}} \min_{t \in [x_1, x_2]} \int_{x_1}^{x_2} g_{i_0}(t, s) ds = a.$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$\alpha(Su) = \sum_{i=1}^{n} \min_{t\in[x_1,x_2]} Su_i(t) \geq \min_{t\in[x_1,x_2]} Su_{i_0}(t) > a.$$

Eğer $u \in P(\alpha, a, c)$ ve $\|Su\| > a/M$ ise göstermeliyiz ki $\alpha(Su) > a$ dir.

Bunun için $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in P(\alpha, a, c)$ ve

$\|Su\| > a/M$ için

$$\min_{t\in[x_1,x_2]} Su_i(t) = \min_{t\in[x_1,x_2]} \int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds$$

$$\geq M_i \int_0^1 H_i(s)\, f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds$$

$$\geq M_i \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 g_i(t,s) f_i\big(s, u_1(s), u_2(s), \dots, u_n(s)\big) ds$$

$$= M_i |Su_i|_0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\alpha(Su) = \sum_{i=1}^{n} \min_{t\in[x_1,x_2]} Su_i(t) \geq \sum_{i=1}^{n} M_i\, |Su_i|_0 \geq M \sum_{i=1}^{n} |Su_i|_0 = M\|Su\| > M\frac{a}{M} = a.$$

elde edilir. O halde Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bütün hipotezleri $b = a/M$ sağlanmış olur. Yani S dönüşümünün en az üç pozitif çözümünün varlığını göstermiş olduk. Bu çözümler

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n),\;\; v = (v_1, v_2, \dots, v_n)\;\; ve\; w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

öyle ki

$$\|u\| < d, a < \sum_{i=1}^{n} \min_{t\in[x_1,x_2]} v_i(t), \qquad \|w\| > d \;\; ve \; \sum_{i=1}^{n} \min_{t\in[x_1,x_2]} w_i(t) < a$$

ispatı tamamlamış olduk.

REFERANSLAR

1. Y.Aksoy İntegral denklemler İstanbul 1983

2. J.M. Davis, P.W. Eloe and J. Henderson, Triple positive solutions and dependence on high order derivatives, J. Math. Anal. Appl. 237, 710-720, (1999).

3.H.Lu, D.O'Regan and C.Zhong, Multiple positive solutions for the one-dimensional singular p-Laplacian, Appl. Math. Comput. 133, 407-422, (2002).

4. W.T. Li and J.P. Sun, Multiple positive solutions of BVPs for third-order discrete difference systems, Appl. Math. Comput. 149, 389-398, (2004).

5. J.P.Sun,W.T.Li and S.S.Cheng, Three positive solutions to second order Neumann boundary value problems, Appl. Math. Lett. (to appear).

6. J.P. Sun and W.T. Li, Multiple positive solutions of a discrete difference system, Appl. Math. Comput. 143, 213-221, (2003).

7. R.P. Agarwal, D. O'Regan and P.J.Y. Wong, Constant-sign solutions of a system of Fredholm integral equations, A.C.A.P. (to appear).

8. D.O'Regan and M.Meehan,Existence Theory for Nonlinear Integral and Integrodifferential Equations, Kluwer, Dordrecht, (1998).

9. M.A. Krasnosel'skii, Positive Solutions of Operator Equations, Noordhoff, Groningen, (1964).

10. R.W.Leggett and L.R.Williams, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, Indiana University Math. J. 28, 673-688, (1979).

11. D.Jiang and H.Liu,Existence of positive solutions to second order Neumann boundary value problems, J. Mathematical Research and Exposition 20 (3), 360-364, (2000).

12. J.P.Sun and W.T.Li, Multiple positive solutions to second order Neumann boundary value problems, Appl. Math. Comput. 146, 187-194, (2003).

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında izmirde ailemin 2.çocuğu olarak dünyaya geldim.Alaybey İlkokulundan sonra orta ve lise eğitimimi Karşıyaka lisesinde tamamladım.Isparta Süleyman Demirel Üniversitesinden 2000 yılında mezun olduktan sonra aynı yıl Matematik öğretmeni olarak Milli Eğitim Bakanlığında göreve başladım.Su anda 13 Nisan Anadolu lisesinde Matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım.Evli ve bir çocuk sahibiyim.