YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZAMAN SKALASINDA DİAMOND-α DİNAMİK DENKLEMLER

Ömer Faruk ÇELİK

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YANTIR

Bornova-İZMİR
2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Ahmet YANTIR (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.Dr. Fatma Serap TOPAL

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Refet POLAT

Prof.Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Enstitü Müdürü

ABSTRACT

DIAMOND- α DYNAMIC EQUATIONS ON TIME SCALES

ÇELİK, Ömer Faruk

MSc in Mathematics

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Ahmet YANTIR

August 2016, 58 pages

In this thesis; we study the diamond-alpha dynamic equations on regular time sacales. In order to define diamond-alfa dynamic equations, we first present the concept and main calculus results of time scales. The definitions of delta(Δ) and nabla(∇) derivatives and delta and nabla integrals are introduced. Their alpha linear combination, dimond alpha derivative$(\Diamond_\alpha)$ and diamond alpha integrals are presented. Next the diamond alpha exponential function is introduced. Finally we investigate some class of diamond alpha dynamic equations on regular time scales.

Keywords: Time Scale, Diamond–α derivative, Diamond–α integral, Diamond–α exponential function, Diamond–α dynamic equation

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA DİAMOND- α DİNAMİK DENKLEMLER

Ömer Faruk ÇELİK
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Ahmet YANTIR
Ağustos 2016, 58 sayfa

Bu tezde, düzgün zaman skalasında diamond–α dinamik denklemleri araştırdık. Diamond–α dinamik denklemleri tanımlayabilmek için ilk önce zaman skalasında temel kavramlar ve zaman skalasında analiz ana hatlarıyla sunuldu. Delta ve nabla türev, delta ve nabla integral tanımları verildi ve bunların lineer kombinasyonu olarak diamond–α türev($\Diamond_{\alpha}$) ve diamond–α integral oluşturuldu. Sonrasında diamond–α üstel fonksiyonun tanımı verildi. Son olarak düzgün zaman skalasında diamond–α dinamik denklemlerin bazı durumları araştırıldı.

Anahtar sözcükler: Zaman Skalası, Diamond–α Türev, Diamond–α İntegral, Diamond–α Üstel Fonksiyon , Diamond–α Denklemler

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi esnasında ilgi ve alakasını esirgemeyen, ortaya çıkan her türlü bilimsel problemin çözümünde devamlı yardımlarını gördüğüm değerli hocam Yrd.Doç.Dr.Ahmet YANTIR'a ve ayrıca bana daima destek olan eşim Mehri ÇELİK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ömer Faruk ÇELİK
İzmir,2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Zaman Skalasinda Diamond$-\alpha$ Dinamik Denklemler” adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

04/08/2016

Ömer Faruk ÇELİK

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR VE SEMBOLLER DİZİNİ

Sembol	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{T}$	Zaman Skalası
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	İrrasyonel Sayılar
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	İleri sıçrama fonksiyonu
f^{Δ}	Hilger (Δ) türev
f^{∇}	∇ türev
Δf	İleri fark operatörü
∇f	Geri Fark Operatörü

C_{rd}	Sağ yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
C_{ld}	Sol yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
C_{rl}	Hem sağ hem sol yoğun sürekli fonksiyonların kümesi
$f^{\Diamond\alpha}$	Diamond–α türev

1 GİRİŞ

Uygulamalı matematik, okyanuslardaki dalgaların hareketinden, güç kaynaklarındaki elektrik akımlarına kadar gerçek dünyanın anlaşılmasında matematiğin kullanılmasıyla ilgilenir. Matematik dili kullanılarak gerçek dünya sistemlerine uygun matematiksel modeller tanımlaması sağlar. Bilim adamları dünyadaki sistemleri, var olan matematik teknikleriyle çözülebilen modellerle çalışabilirler. Uygulamalı matematikte temel amaç yeni tipteki matematiksel modeller için teoriler geliştirmektir. Bu da daha fazla tipte olayların çalışılmasını ve gerçek hayatta daha fazla uyan modellerin tercih edilmesini sağlar. Üzerinde çokça çalışılan matematiksel modeller, sürekli değişkenli olanlardır. Bu modeller arkasındaki genel matematilsel teori diferensiyel analizdir. Diferensiyel analizin gelişmesine paralel olarak ayrık değişkenlere bağlı modeller de kullanılmaya başlanmıştır. Ayrık değişkenli fonksiyonel denklemler için standart terim de, fark denklemleridir.

Diferensiyel denklemler ve fark denklemleri teorisi arasındaki ayrılıklar matematiksel modellemenin seçiminde zorlukların ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Hem sürekli hem de ayrık değişkenli denklemler olan hibrit dinamik sistemler alanında çalışılmaya başlanmıştır ancak bu alandaki çalışmalar ayrık ve sürekli değişkenleri aynı anda içeren gerçek dünya sistemleri için yeterli değildir. Bu tür sistemlere standart bir yaklaşım, bu modelleri sürekli ve kesikli değişkenlerle ilgili farklı tanım bölgelerine ayırmaktır. Diğer bir yaklaşım ise modeli ayrık değişkenlerin parçalarını yaklaşımımlarla doldurarak ve ya sürekli değişkenleri ayrık duruma getirerek sadece sürekli ya da sadece ayrık değişkenlere indirgemektir. Ancak bu yaklaşımlar, modeller için doğru olmayabilirler. Modelin, sürekli ve ayrık durumlarının davranışları arasında farklılıklar olabilir. Ayrık durumdan sürekli duruma geçerken değişkenin davranışındaki değşikliklerin tanımlanmasında problemler ortaya çıkabilir. Hilger, sürekli ve ayrık değişkenleri aynı anda içeren modellerin çalışılmasını sağlayan bir teori bulmak için zaman skalası teorisi kurmuştur.

Zaman skalası, 1988 yılında Stefan Hilger tarafından doktora teziyle [11] tanıtılmış ve Aulbach ve Hilger tarafından bilim dünyasına sunulmuştur [4]. Zaman skalası, ‘’Bilinmeyen fonksiyonun yeni türevlerini içeren diferensiyel denklemler tanımlayarak ve yeni kalkülüsü kullanarak alıştığımız diferensiyel denklemler teorisini ve diskrit denklemler (fark denklemleri) teorisini birleştiren ve genelleştiren bir denklemler (dinamik denklemler) teorisi geliştirilebilir[12],[14]’’ vurgusu yapılarak oluşturulmuştur.

Zaman skalası üzerinde çalışılırken zaman skalasını reel sayılar kümesi aldığımızda sürekli analiz, tam sayılar kümesi aldığımızda ise ayrık analiz ortaya çıkmaktadır. Sürekli analizdeki ve ayrık analizdeki hemen hemen her şey (süreklilik, türev, integral, sınır değer problemi ve tümevarım gibi kavramlar) zaman skalasında tekrar tanımlanmıştır ve yeni kavramlar oluşturularak bildiklerimizi daha ileri bir düzeye taşıma imkânı sağlanmıştır. Bu sayede $\mathbb{R}$ de tanımlı diferensiyel denklemler veya $\mathbb{Z}$ de tanımlı fark denklemleri için ayrı ayrı çalışmak yerine, reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olan $\mathbb{T}$ zaman skalasında tanımlanan genel bir denklem göz önüne alınabilir.

Diferansiyel denklemlerin, fark denklemlerinin ve kuvantum denklemlerinin (h-fark ve q-fark denklemleri) zaman skalasına taşınması[13] ile elde edilen denklemin genelleştirilmesi *dinamik denklem* olarak adlandırılır. Diferansiyel denklem ve fark denkleminin dinamik denklem çatısı altında toplanması zaman skalasının *birleştirme*, ek olarak kuvantum denklemlerinin de dinamik denklem olarak düşünülmesi ise zaman skalasının *genişletme* özelliğini ortaya koyar. Bu iki özelliği ile zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin çalışılması, diferansiyel ve fark denklemlerinden iki ayrı sonuç elde edilmesini engeller [5]. Ayrıca zaman skalası sadece R ve Z için değil aynı zamanda mümkün diğer uzaylar için de sonuç verme imkânı sağlar.

Bu tezin ikinci bölümünde zaman skalası kavramı, zaman skalası üzerinde Δ ve ∇ türevler ve bu türevleri tanımlayabilmek için gerekli operatörler tanıtılmış ve tez içeriğini anlaşabilir kılmak için temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise diamond–α dinamik denklemler ele alınmıştır. Bu amaçla öncelikle Δ ve ∇ türevler ve integraller yardımı ile Diamond–α türev ve integral tanıtılmıştır. Tezin ana bölümü olan dördüncü bölümde ise düzgün zaman skalaları üzerinde diamond–α dinamik denklemler ele alınmıştır.

2 ZAMAN SKALASINDA ANALİZ

Bu bölümde ilerideki çalışmalara temel teşkil edecek olan zaman skalasının tanımı, delta(Δ) türevi, delta integrali, delta üstel fonksiyonu ve temel özellikleri ile nabla(∇) türevi, nabla integrali, nabla üstel fonksiyonu ve temel özellikleri hakkında bilgi verilecektir. Zaman skalası analizi ile bağlantılı daha fazla bilgi için [1,2,4,5] referansları okuyuculara destek sağlayabilir.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1. Zaman skalası (Time scale) reel sayıların boş olmayan kapalı keyfi bir alt kümesidir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir[5]. $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ kümeleri sırasıyla, reel sayılar, tam sayılar doğal sayılar ve negatif olmayan tam sayılar olarak adlandırılır ve zaman skalasına örnek olarak verilebilirler. Farklı olarak [0,1] , [2,3] , $\mathbb{N} \cup$ [0,1] ve Cantor kümesi gibi kapalı alt kümeler de birer zaman skalasıdır. $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \mathbb{C}, (0,1)$ kümeleri ise zaman skalası değildir. Bir T zaman skalası, reel sayıların standart topolojisine sahiptir.

Tanım 2.2. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere, $t \in \mathbb{T}$ için

$\sigma: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ ileri sıçrama operatörü

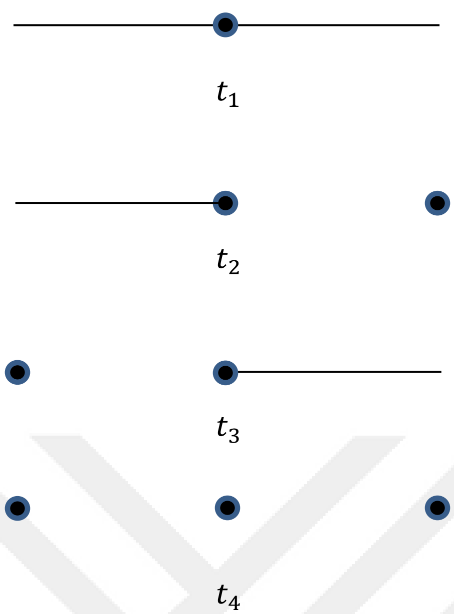
$$\sigma(t) \coloneqq \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$$

$\rho: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ geri sıçrama operatörü

$$\rho(t) \coloneqq \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$$

ile tanımlanır[5].

Eğer t noktası, $\mathbb{T}$ zaman skalasının maksimum noktası ise $\sigma(t) = t$, t noktası $\mathbb{T}$ nin minimum noktası ise $\rho(t) = t$ olarak tanımlanır. Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktasına *sağ yayılmış nokta*, eğer $\rho(t) < t$ ise t noktasına *sol yayılmış nokta* denir. t noktası hem sağ yayılmış nokta hem de sol yayılmış nokta ise *ayrık(yoğun) nokta* adını alır. $t < sup\mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına *sağ yoğun nokta*, eğer $t > inf\mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktasına *sol yoğun nokta* denir. Hem sağ yoğun hem de sol yoğun noktalara *yoğun nokta* adı verilir. Bu nokta tanımları aşağıdaki gibi gösterilebilir:



t_1: yoğun
$\rho(t) = t = \sigma(t)$

t_2: sol-yoğun, sağ-yayılmış
$\rho(t) = t < \sigma(t)$

t_3: sol yayılmış, sağ-yoğun
$\rho(t) < t = \sigma(t)$

t_4: yayılmış
$\rho(t) < t < \sigma(t)$

$\sigma(t)$ ileri sıçrama operatörü ile tanecik fonksiyonu $\mu(t)$, $\rho(t)$ geri sıçrama operatörü ile geri tanecik $\nu(t)$ fonksiyonu tanımlanır:

$\mu: \mathbb{T} \longrightarrow \infty\,,\ t \longrightarrow \mu(t) := \sigma(t) - t$ ve

$\nu: \mathbb{T} \longrightarrow \infty\,,\ t \longrightarrow \nu(t) := t - \rho(t)$ şeklindedir[8].

Şimdi $\mathbb{T}$ üzerinde Δ türev ve ∇ türev tanımlayabilmemiz için yine $\mathbb{T}$ den üretilen $\mathbb{T}^k$ ve $\mathbb{T}_k$ kümelerini tanımlayalım. Eğer $\mathbb{T}$ sola yayılımlı bir m supremum değerine sahip ise o zaman $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - m$; diğer durumlarda ise $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır. $\mathbb{T}$ sağa yayılımlı bir n infimum değerine sahip ise o zaman $\mathbb{T}_k = \mathbb{T} - n$; diğer durumlarda ise $\mathbb{T}_k = \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır[5]. Özetleyecek olursak;

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T} - sup\mathbb{T}, & sup\mathbb{T} < \infty \ ve\ sup\mathbb{T}\ sol\ yayılımlı\ ise \\ \mathbb{T}, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

$$\mathbb{T}_k = \begin{cases} \mathbb{T} - inf\mathbb{T}, & -\infty < inf\mathbb{T}\ ve\ inf\mathbb{T}\ sağ\ yayılımlı\ ise \\ \mathbb{T}, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

şeklindedir.

Ayrıca $\mathbb{T}_k^k = \mathbb{T}^k \cap \mathbb{T}_k$ şeklinde tanımlıdır ve Diamond-alfa ($\lozenge_\alpha$) türev bu küme üzerinde tanımlanır.

Burada $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^\sigma: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ şeklinde tanımlanır ve $f^\sigma = f \circ \sigma$ şeklindeki bileşke fonksiyondur ve $f^{\rho}: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için $f^{\rho}(t) = f(\rho(t))$ şeklinde tanımlanır. Burada $f^{\rho} = f\ o\ \rho$ şeklindeki bileşke fonksiyondur[5].

Örnek 2.3. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için σ, ρ, μ, ν operatörlerini inceleyelim.

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$
$$\rho(t) \coloneqq \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\} = \sup(-\infty, t) = t$$
$$\mu(t) = \sigma(t) - t = t - t = 0$$
$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - t = 0$$

$\rho(t) = t = \sigma(t)$ olduğundan ve $\forall t \in \mathbb{R}$ için sağlandığından $\mathbb{R}$ tüm noktalarında yoğundur ve her zaman $\mu(t) = \nu(t) = 0$ dır.

ii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\ \{t+1, t+2, \dots, \infty\} = t+1$$
$$\rho(t) \coloneqq \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\ \{-\infty, \dots, t-2, t-1\} = t-1$$
$$\mu(t) = \sigma(t) - t = (t+1) - t = 1$$
$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - (t-1) = 1$$

ve $\forall t \in \mathbb{Z}$ için $\rho(t) < t < \sigma(t)$ olduğundan $\mathbb{Z}$ tüm noktalarında yayılımlıdır ve her zaman $\mu(t) = \nu(t) = 1$ dir.

Yukarıdaki iki durumda da $\mu(t), \nu(t)$ fonksiyonları sabittir. Her iki fonksiyon da zaman skalasında türevlerde kullanılır. Sabit ya da değişken olması farklı sonuçlar oluşturacağı için bu iki fonksiyonun zaman skalasında ayrı bir önemi vardır.

Örnek 2.4. Aşağıda tanımlanan her bir $\mathbb{T}$ zaman skalası için σ, ρ, μ, ν operatörlerini bulalım.

i. $t \in \mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ olsun. $t = 2^n$ için,

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\ \{2^{n+1}, 2^{n+2}, \dots \infty\} = 2^{n+1} = 2.2^n = 2t$$
$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\ \{-\infty, \dots, 2^{n-2}, 2^{n-1}\} = 2^{n-1} = \frac{1}{2}.2^n = \frac{t}{2}$$
$$\mu(t) = \sigma(t) - t = 2t - t = t$$
$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - \frac{t}{2} = \frac{t}{2}$$

ii. $\mathbb{T} = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$ olsun. $t = \frac{1}{n}$ için $n = \frac{1}{t}$ olur.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\left\{\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots\right\} = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{\frac{1}{t}-1} = \frac{t}{1-t}$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\left\{\dots, \frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right\} = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{\frac{1}{t}+1} = \frac{t}{1+t}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \frac{t}{1-t} - t = \frac{t^2}{1-t}$$

$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - \frac{t}{1+t} = \frac{t^2}{1+t}$$

iii. $\mathbb{T} = \left\{\sqrt[3]{n} : n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$ olsun. $t = \sqrt[3]{n}$ için $n = t^3$ olur.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\left\{\sqrt[3]{n+1}, \sqrt[3]{n+2}, \dots\right\} = \sqrt[3]{n+1} = \sqrt[3]{t^3+1}$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\left\{\dots, \sqrt[3]{n-2}, \sqrt[3]{n-1}\right\} = \sqrt[3]{n-1} = \sqrt[3]{t^3-1}$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = \sqrt[3]{t^3+1} - t$$

$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - \sqrt[3]{t^3-1}$$

iv. $\mathbb{T} = \{n^3 : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$ olsun. $t = n^3$ için $n = \sqrt[3]{t}$ olur.

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\} = \inf\{(n+1)^3, (n+2)^3, \dots\} = (n+1)^3 = (\sqrt[3]{t}+1)^3$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z} : s < t\} = \sup\{\dots, (n-2)^3, (n-1)^3\} = (n-1)^3 = (\sqrt[3]{t}-1)^3$$

$$\mu(t) = \sigma(t) - t = (\sqrt[3]{t}+1)^3 - t$$

$$\nu(t) = t - \rho(t) = t - (\sqrt[3]{t}-1)^3$$

2.2 Δ ve ∇ Türev

Bu bölümde farklı iki fonksiyon ile tanımlama yapacağız. Bunlardan birincisi σ ileri sıçrama operatörü ile tanımlanan Δ türev, diğeri ise ρ geri sıçrama operatörü ile tanımlanan ∇ türevdir. Teoremlerin ispatlarını sadece Δ türev için yapacağız.

Tanım 2.5. $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$olsun. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ ve t noktasının bir $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ $(\delta > 0)$ komşuluğundaki her s elemanı için

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right]\right| - f^{\Delta}(t).\left[\sigma(t) - s\right] \leq \varepsilon.\left|\sigma(t) - s\right|$$

olacak şekilde bir $f^{\Delta}(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonunun *t* noktasındaki Δ (Delta) türevi denir. Bununla birlikte her $t\epsilon\mathbb{T}^k$ için $f^{\Delta}(t)$ türevi mevcut ise f'ye $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ türevlenebilirdir denir ve $f^{\Delta}\colon \mathbb{T}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu f'nin $\mathbb{T}^k$ üzerindeki Δ türevi olarak adlandırılır[5].

Tanım 2.6. $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\forall t\epsilon\mathbb{T}_k$ olsun. Bu durumda verilen her $\varepsilon > 0$ ve t noktasının bir $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ $(\delta > 0)$ komşuluğundaki her s elemanı için

$$\left|\left[f\big(\rho(t)\big) - f(s)\right]\right| - f^{\nabla}(t).\left[\rho(t) - s\right] \leq \varepsilon.\left|\rho(t) - s\right|$$

olacak şekilde bir $f^{\nabla}(t)$ sayısı mevcut ise, bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki ∇(Nabla) türevi denir. Bununla birlikte her $t\epsilon\mathbb{T}_k$ için $f^{\nabla}(t)$ türevi mevcut ise f'ye $\mathbb{T}_k$ üzerinde ∇ türevlenebilirdir denir ve $f^{\nabla}\colon \mathbb{T}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu f'nin $\mathbb{T}_k$ üzerindeki ∇ türevi olarak adlandırılır[1].

Örnek 2.7. $\Delta-$türevin tek olduğunu gösterelim. Bu amaçla $f\colon \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonunun $\forall t\epsilon\ \mathbb{T}$ noktasında $f^{\Delta}(t)$ ve $\tilde{f}^{\Delta}(t)$ gibi iki tane türevi olduğunu kabul edelim. O zaman t noktasının bir *U* komşuluğu ve $\forall\varepsilon> 0$ için

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - \tilde{f}^{\Delta}(t).\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.\left|\sigma(t) - s\right|,\ \ (\sigma(t) \neq s)$$

ve

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big) - f(s)\right] - f^{\Delta}(t).\left[\sigma(t) - s\right]\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.\left|\sigma(t) - s\right|,\ \ (\sigma(t) \neq s)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliklerden hareketle,

$$\left|f^{\Delta}(t) - \tilde{f}^{\Delta}(t)\right| = \left|f^{\Delta}(t) - \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} + \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \tilde{f}^{\Delta}(t)\right|$$

$$\leq \left|\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} - f^{\Delta}(t)\right| + \left|\frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(s)}{\sigma(t) - s} - \tilde{f}^{\Delta}(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu da $f^{\Delta}(t) = \tilde{f}^{\Delta}(t)$ demektir. O halde Δ türevi tekdir.

Örnek 2.8. Eğer, $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \epsilon\ \mathbb{T}$ için $f(t) = c$ ise $f^{\Delta}(t) = 0$ dır. Gerçekten Δ türevin tanımından, $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$|f((\sigma(t)) - f(s) - 0.(\sigma(t) - s)| = |c - c| = 0 \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

olup, $\forall s \in \mathbb{T}$ için yukarıdaki eşitsizlik doğrudur.

Eğer, $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \epsilon\ \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ olarak tanımlanırsa, $f^{\Delta}(t) = 1$ dir. Gerçekten de bu durumda $\varepsilon > 0$ için,

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - 1.(\sigma(t) - s)\right| = |\sigma(t) - s - (\sigma(t) - s)| = 0 \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

dir.

Örnek 2.9. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}, f(t) = t^2$ olarak tanımlanan fonksiyonun $\forall t \in \mathbb{T}$ için Δ türevini bulalım.

$\forall \varepsilon > 0, \forall s \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon),\ \sigma(t) \neq s$ için

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t).[(\sigma(t) - s)]\right| = \left|(\sigma^2(t) - s^2) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| =$$

$$|\sigma(t) - s|.\left|(\sigma(t) + s) - f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s| \Rightarrow \left|(\sigma(t) + s) - f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon$$

olur. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan mutlak değer özelliğinden $f^{\Delta}(t) = \sigma(t) + t$ olarak bulunur.

Örnek 2.10. $t \in \mathbb{T}^k$ $(t \neq \inf \mathbb{T})$ noktası için $g(t) = t < \sigma(t)$ ifadesinin sağlandığını, fakat σ sıçrama operatörünün t de Δ türevinin olmadığını gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır ki $s \in U = (t - \delta, t + \delta)$ olduğunda

$$\left|\Big(\sigma(\sigma(t)) - \sigma(s)\Big) - \sigma^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

olur. Ancak $s \in (t - \delta, t]$ ise

$$\left|\Big(\sigma(\sigma(t)) - \sigma(s)\Big) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon.|\sigma(t) - s|$$

ifadesinde $\sigma(s) = s \rightarrow t$ olur. $s \epsilon [t, t + \delta)$ ise $\sigma(s) = s \rightarrow \sigma(t) > t$ olur. Böylece; $\sigma^{\Delta}(t)$ değeri, sağdan ve soldan yaklaşıldığında farklı değerler aldığından $t \in \mathbb{T}^k$ için $\sigma(t)$ nin Δ türevi yoktur.

Teorem 2.11. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Bu durumda;

i. f, t noktasında Δ türevlenebilir ise f, t noktasında süreklidir.

ii. f, t noktasında sürekli ve t sağ yayılmış nokta ise o zaman f, t noktasında Δ türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\mu(t)}$$

şeklindedir.

iii. Eğer, t noktasında sağ yoğun ise f fonksiyonunun t noktasında Δ türevlenebilir olması ancak ve ancak

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin sonlu olması ile mümkündür. Bu durumda $\Delta -$türev

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

şeklindedir.

iv. f, t noktasında Δ türevlenebilir ise

$$f\big(\sigma(t)\big) = f(t) + \mu(t). f^{\Delta}(t)$$

şeklindedir[5].

İspat:

i. f, t noktasında Δ türevlenebilir olsun. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan $\varepsilon \in (0,1)$ alalım ve ε^* sayısını

$$\varepsilon^* = \varepsilon. \big[1 + \big|f^{\Delta}(t) + 2\mu(t)\big|\big]^{-1}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $\varepsilon^* \in (0,1)$ dir. Türev tanımına göre $\forall s \in U$ için,

$$\big|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - [\sigma(t) - s]. f^{\Delta}(t)\big| \leq \varepsilon^*. |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. $\forall s \in U \cap (t - \varepsilon^*, t + \varepsilon^*)$ için

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &= \big|\big\{f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t). [\sigma(t) - s]\big\} \\ &\quad - \big\{f\big(\sigma(t)\big) - f(t) - \mu(t). f^{\Delta}(t)\big\} + (t - s). f^{\Delta}(t)\big| \\ &\leq \varepsilon^*. |\sigma(t) - s| + \varepsilon^*. \mu(t) + |t - s|. f^{\Delta}(t) \\ &\leq \varepsilon^*. \big[\mu(t) + |t - s| + \big|f^{\Delta}(t)\big|\big] \\ &\leq \varepsilon^*. \big[1 + \big|f^{\Delta}(t)\big| + 2\mu(t)\big] = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Bu da f fonksiyonunun t noktasında sürekli olduğunu gösterir.

ii. f, t noktasında sürekli ve t sağ yayılmış nokta olsun. Süreklilikten

$$\lim_{s\to t}\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(s)}{\sigma(t)-s}=\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(s)}{\mu(t)}$$

olur. Buradan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall s \in U$ için,

$$\left[\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(s)}{\sigma(t)-s}-\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(s)}{\mu(t)}\right]\le \varepsilon$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. Dolayısıyla $\forall s \in U$ için,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big)-f(s)\right]-\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(t)}{\mu(t)}.\sigma(t)-s\right|\le \varepsilon.|\sigma(t)-s|$$

sağlanır. Bunun anlamı

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(t)}{\mu(t)}$$

demektir.

iii. f, t noktasında Δ türevlenebilir olsun. t sağ yoğun nokta ve $\varepsilon > 0$ verilsin. f, t noktasında Δ türevlenebilir olduğundan, $\forall s \in U$ için,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big)-f(s)\right]-f^{\Delta}(t).[\sigma(t)-s]\right|\le \varepsilon.|\sigma(t)-s|$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. $\forall s \in U$ için $\sigma(t)=t$ olduğundan,

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big)-f(s)\right]-f^{\Delta}(t).[t-s]\right|\le \varepsilon.|t-s|$$

yazılır. Burada $s \in U, t \neq s$ olduğundan yukarıda ki eşitsizliğin her tarafını $|t-s|$ ye bölersek

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}-f^{\Delta}(t)\right|\le \varepsilon$$

olduğunu görürüz. Bu da,

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

eşitliğini verir.

iv. Eğer $\sigma(t)=t$ ise $\mu(t)=\sigma(t)-t=t-t=0$ dır ve

$$f(\sigma(t))=f(t)=f(t)+\mu(t).f^{\Delta}(t)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan eğer $\sigma(t) > t$ ise o zaman (ii) den

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t).\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = f(t) + \mu(t).f^{\Delta}(t)$$

olur ki bu da (iv) ispatını tamamlar.

Teorem 2.12. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ olsun. Bu durumda;

i. f, t noktasında ∇ türevlenebilir ise f, t noktasında süreklidir.

ii. f, t noktasında sürekli ve t sol yayılmış nokta ise o zaman f, t noktasında ∇ türevlenebilirdir ve

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)}$$

şeklindedir.

iii. Eğer, t noktasında sol yoğun ise f fonksiyonunun t noktasında ∇ türevlenebilir olması ancak ve ancak

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin sonlu olması ile mümkündür. Bu durumda

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

şeklindedir.

iv. f, t noktasında ∇ türevlenebilir ise

$$f(\rho(t)) = f(t) - \nu(t).f^{\nabla}(t)$$

şeklindedir[5].

Örnek 2.13. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda Δ türev;

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t),$$

ii. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

olarak bulunur.

Örnek 2.14. $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki tanımları kullanarak (i) ve (ii) için $f^{\Delta}(t)$ türevini, (iii) ve (iv) için $f^{\nabla}(t)$ türevini bulalım.

i. $f(t)=\sigma(t),\ \ \mathbb{T}:=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}, t\in\mathbb{T}$

ii. $f(t)=t^2, \mathbb{T}:=\mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}=\left\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}_0\right\}, t\in\mathbb{T}$

iii. $f(t)=t^2, \mathbb{T}:=\left\{\frac{n}{2}:n\in\mathbb{N}_0\right\}, t\in\mathbb{T}$

iv. $f(t)=t^3, \mathbb{T}:=\mathbb{N}_0^{\frac{1}{3}}=\left\{\sqrt[3]{n}:n\in\mathbb{N}_0\right\}, t\in\mathbb{T}$

Çözüm:

i. $f(t)=\sigma(t),\ \ \mathbb{T}:=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}, t\in\mathbb{T}\backslash\{0\}$ için her nokta yoğun olduğundan sağ yayılmıştır.

$$\sigma(t)=\frac{1}{\frac{1}{t}-1}=\frac{t}{1-t}\Longrightarrow\mu(t)=\sigma(t)-t=\frac{t^2}{1-t}$$

$$\sigma\big(\sigma(t)\big)=\frac{\frac{1}{1-t}}{1-\frac{t}{1-t}}=\frac{t}{1-2.t}$$

$$\sigma^{\Delta}(t)=\frac{\sigma(\sigma(t))-\sigma(t)}{\mu(t)}=\frac{\frac{t}{1-2.t}-\frac{t}{1-t}}{\frac{t^2}{1-t}}=\frac{t}{1-2.t}$$

bulunur. Özel olarak $t=0$ için

$$\sigma^{\Delta}(t)=\lim_{s\to 0}\frac{f(0)-f(s)}{0-s}=\lim_{s\to 0}\frac{\sigma(s)}{s}=\frac{\frac{s}{1-s}}{s}=1$$

olur.

ii. $f(t)=t^2, \mathbb{T}:=\mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}=\left\{\sqrt{n}:n\in\mathbb{N}_0\right\}, t\in\mathbb{T}$ kümesine ait her nokta yoğun olup,

$$\sigma(t)\ \ =\sqrt{t^2+1}\Longrightarrow\mu(t)\ \ =\sigma(t)-t=\sqrt{t^2+1}-t$$

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f\big(\sqrt{t^2+1}\big)-f(t)}{\sqrt{t^2+1}-t}=\frac{t^2+1-t^2}{\sqrt{t^2+1}-t}=t+\sqrt{t^2+1}$$

bulunur.

iii. $f(t)=t^2, \mathbb{T}:=\left\{\frac{n}{2}: n\in\mathbb{N}_0\right\}, t\in\mathbb{T}$ her noktada yoğun olup

$$\rho(t)=\frac{2t-1}{2} \Longrightarrow \nu(t)=t-\rho(t)=t-\frac{2t-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f\big(\rho(t)\big)}{\nu(t)}=\frac{t^2-\left(\frac{2t-1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}=\frac{t^2-t^2+t-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=2t-\frac{1}{2}$$

iv. $f(t)=t^3, \mathbb{T}:=\mathbb{N}_0^{\frac{1}{3}}=\left\{\sqrt[3]{n}: n\in\mathbb{N}_0\right\}, t\in\mathbb{T}$, her nokta yoğun olup

$$\rho(t)=\sqrt[3]{t^3-1} \Longrightarrow \nu(t)=t-\rho(t)=t-\sqrt[3]{t^3-1}$$

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(t)-f\big(\rho(t)\big)}{\nu(t)}=\frac{t^3-\left(\sqrt[3]{t^3-1}\right)^3-}{t-\sqrt[3]{t^3-1}}=(t^3-1)^{\frac{2}{3}}+(t^3-1)^{\frac{1}{3}}.t+t^2$$

olarak bulunur.

Örnek 2.15. $\forall n\in\mathbb{N}$ için,

$$H_0=0, \qquad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

ifadesi Harmonik Sayılar olarak adlandırılır. Buna göre zaman skalasını, $\mathbb{T}=\{H_n: n\in\mathbb{N}_0\}$ şeklinde alalım. O zaman $\forall n\in\mathbb{N}_0$ için $\sigma(H_n)=H_{n+1}$, $\rho(H_n)=H_{n-1}$, $\rho(H_0)=H_0$, ve $\mu(H_n)$ yi bulmak için

$$\mu(H_n)=\sigma(H_n)-H_n$$

$$\mu(H_n)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$$

olur. Şimdi $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlanan $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $\Delta-$türevine bakalım.

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f\big(\sigma(t)\big)-f(t)}{\mu(t)} \Longrightarrow f^{\Delta}(H_n)=\frac{f\big(\sigma(H_n)\big)-f(H_n)}{\mu(H_n)}=\frac{f(H_{n+1})-f(H_n)}{\frac{1}{n+1}}$$

$$=(n+1)(f(H_{n+1})-f(H_n))$$

olacaktır.

Teorem 2.16.

i. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, tüm $t \in \mathbb{T}^k$ üzerinde $\Delta -$türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\sigma(\rho(t)) = t$ şartını sağlayan her $t \in \mathbb{T}_k$ için $\nabla -$türevlenebilirdir ve

$$f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}\big(\rho(t)\big)$$

şeklindedir. Buna ek olarak f^{Δ}, $\mathbb{T}^k$ üzerinde sürekli ise herhangi bir $t \in \mathbb{T}_k$ noktası için $f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}\big(\rho(t)\big)$ sağlanır.

ii. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, tüm $t \in \mathbb{T}_k$ üzerinde $\nabla -$türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $\rho(\sigma(t)) = t$ şartını sağlayan her $t \in \mathbb{T}^k$ için $\Delta -$türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}\big(\sigma(t)\big)$$

şeklindedir. Buna ek olarak f^{∇}, $\mathbb{T}_k$ üzerinde sürekli ise herhangi bir $t \in \mathbb{T}^k$ noktası için $f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}\big(\sigma(t)\big)$ sağlanır.

İspat: [5]

Teorem 2.17. $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ üzerinde Δ türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f + g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, t noktasında Δ türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

şeklindedir.

ii. $\forall c$ sabiti için $cf: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebilirdir ve

$$(cf)^{\Delta}(t) = c.f^{\Delta}(t)$$

şeklindedir.

iii. $f.g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında Δ türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned}(f.g)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t).g(t) + f\big(\sigma(t)\big).g^{\Delta}(t) \\ &= f(t).g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t).g\big(\sigma(t)\big)\end{aligned}$$

şeklindedir.

iv. Eğer $f(t).f\big(\sigma(t)\big) \neq 0$ ise, $\frac{1}{f}$, t noktasında Δ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t) = -\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t).f\big(\sigma(t)\big)}$$

şeklindedir.

v. Eğer $f(t).f\big(\sigma(t)\big) \neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$, t noktasında Δ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t).g\big(\sigma(t)\big)}$$

şeklindedir[5].

İspat: $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^k$ üzerinde Δ türevlenebilir olsunlar.

i. $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, $\forall s \in U_1$ için (f fonksiyonunun Δ türevlenebilirliğinden),

$$\left|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s|$$

ve $\forall s \in U_2$ için (g fonksiyonunun $\Delta -$türevlenebilirliğinden),

$$\left|g\big(\sigma(t)\big) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t noktasının U_1 ve U_2 komşulukları vardır. $U = U_1 \cap U_2$ olsun. Bu durumda her $s \in U$ için

$$\begin{aligned}
&\left|(f+g)\big(\sigma(t)\big) - (f+g)(s) - [f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)].(\sigma(t) - s)\right| \\
&\quad = \left|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s) + g\big(\sigma(t)\big) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \\
&\quad \leq \left|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| + \left|g\big(\sigma(t)\big) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \\
&\quad \leq \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s| + \frac{\varepsilon}{2}.|\sigma(t) - s| \\
&\quad = \varepsilon.|\sigma(t) - s|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $f + g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, t noktasında Δ türevlenebilirdir ve t noktasında $(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$ sağlanır.

ii. f, Δ türevlenebilir olduğundan tanımdan $\forall \varepsilon > 0$ için t nin bir U komşuluğu vardır ki $c \neq 0$ için

$$\left|f\big(\sigma(t)\big) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t) - s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{|c|}.|\sigma(t) - s|$$

yazılabilir. Türevlenebilir iki fonksiyonun çarpımının Δ türevlenebilirliğinden (Burada c yi sabit bir fonksiyon gibi düşünebiliriz.)

$$\left|(cf).\big(\sigma(t)\big) - (cf)(s) - (cf)^{\Delta}(t).\big(\sigma(t)\big) - s\right|$$

$$= \left|c(\sigma(t)).f(\sigma(t)) - c(s).f(s) - c^{\Delta}(t).f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|$$
$$= \left|c\left(f(\sigma(t)) - f(s)\right) - 0.f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right|$$
$$= |c|.\left|f(\sigma(t)) - f(s)\right|$$
$$= |c|.\frac{\varepsilon}{|c|}.|\sigma(t)-s| = \varepsilon.|\sigma(t)-s|$$

dir. Burada $c(\sigma(t)) = c$, $c(s) = c$ ve $c^{\Delta}(t) = 0$ dır. Bu da $(cf)^{\Delta}(t) = c.f^{\Delta}(t)$ olduğunu verir.

iii. $\varepsilon \in (0,1)$ alalım ve $\varepsilon^{*} = \varepsilon.\left[|f(t)| + \left|g(\sigma(t))\right| + \left|g^{\Delta}(t)\right|\right]^{-1}$ şeklinde ε^{*} tanımlayalım. Bu durumda $\varepsilon^{*} \in (0,1)$ olur ve aşağıdakiler olacak şekilde t nin U_1,U_2 ve U_3 komşulukları vardır. Tüm $s \in U_1$ için

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|$$

ve tüm $s \in U_2$ için

$$\left|g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right| \leq \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|$$

dir. f, t noktasında Δ türevlenebilir ise süreklidir. Tüm $s \in U_3$ için

$$f(t) - f(s) \leq \varepsilon^{*}$$

yazılabilir. Şimdi $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ ve $s \in U$ alalım. Bu durumda,

$$\left|(fg)(\sigma(t)) - (fg)(s) - \left[f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)) + f(t)g^{\Delta}(t)\right](\sigma(t)-s)\right|$$
$$= \left|\left[f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right]g(\sigma(t))\right.$$
$$+ \left[g(\sigma(t)) - g(s) - g^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right]f(t)$$
$$+ \left[g(\sigma(t)) - g(s)g^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)\right].[f(s) - f(t)]$$
$$\left. + (\sigma(t)-s).g^{\Delta}(t).[f(s) - f(t)]\right|$$
$$\leq \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left|g(\sigma(t))\right| + \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.|f(t)| + \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|$$
$$+ \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left|g^{\Delta}(t)\right|$$
$$= \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left[\left|g(\sigma(t))\right| + |f(t)| + \varepsilon^{*} + \left|g^{\Delta}(t)\right|\right]$$
$$\leq \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|.\left[1 + \left|g(\sigma(t))\right| + |f(t)| + \left|g^{\Delta}(t)\right|\right] = \varepsilon^{*}.|\sigma(t)-s|$$

olur. Bu da t noktasında $(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$ eşitliğini verir.

iv. f, t noktasında Δ türevlenebilir ise

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f^{\Delta}(t)$$

dir. Buradan

$$\lim_{s\to t}\frac{\frac{1}{f(\sigma(t))}-\frac{1}{f(s)}}{t-s}=\lim_{s\to t}\frac{-\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{f(\sigma(t)).f(s)}}{\sigma(t)-s}$$

$$=\left(\lim_{s\to t}\frac{f(\sigma(t))-f(s)}{\sigma(t)-s}\right).\left(\lim_{s\to t}\frac{-1}{f(\sigma(t)).f(s)}\right)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(\sigma(t)).f(t)}$$

yazılır.

v.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\left(f.\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)=f(t).\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t).\left(\frac{1}{g(t)}\right)\circ(\sigma(t))$$

$$=f(t).\left(-\frac{g^{\Delta}(t)}{g(\sigma(t)).g(t)}\right)+f^{\Delta}(t).\frac{1}{g(\sigma(t))}$$

$$=-f(t).\left(\frac{g^{\Delta}(t)}{g(\sigma(t)).g(t)}\right)+f^{\Delta}(t).\frac{1}{g(\sigma(t))}$$

$$=\frac{f^{\Delta}(t).g(t)-f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t).g(\sigma(t))}$$

elde edilir.

Teorem 2.18. $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $t\in\mathbb{T}^{k}$ üzerinde ∇ türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, t noktasında ∇ türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)+g^{\nabla}(t)$$

şeklindedir.

ii. $\forall c$ sabiti için $cf:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında ∇ türevlenebilirdir ve

$$(cf)^{\nabla}(t)=c.f^{\nabla}(t)$$

şeklindedir.

iii. $f.g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu t noktasında ∇ türevlenebilirdir ve

$$(f.g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t).g(t)+f(\rho(t)).g^{\nabla}(t)$$

$$=f(t).g^{\nabla}(t)+f^{\nabla}(t).g(\rho(t))$$

şeklindedir.

iv. Eğer $f(t).f(\rho(t))\neq 0$ ise, $\frac{1}{f}$, t noktasında ∇ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\nabla}(t) = -\frac{f^{\nabla}(t)}{f(t).f\big(\rho(t)\big)}$$

şeklindedir.

v. Eğer $g(t).g\big(\rho(t)\big) \neq 0$ ise, $\frac{f}{g}$, t noktasında ∇ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t).g(t) - f(t).g^{\nabla}(t)}{g(t).g\big(\rho(t)\big)}$$

şeklindedir.

İspat:[5]

Örnek 2.19. x, y, z fonksiyonları t noktasında Δ türevlenebilsin. Bu durumda t noktasında

$$(xyz)^{\Delta} = x^{\Delta}yz + x^{\sigma}y^{\Delta}z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}$$

olduğunu gösterelim ve bu durumu n tane fonksiyon için genelleştirelim.

$$\begin{aligned}(xyz)^{\Delta} &= (xy)^{\Delta}z + (xy)^{\sigma}z^{\Delta} = (x^{\Delta}y + x^{\sigma}y^{\Delta})z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta} \\ &= x^{\Delta}yz + x^{\sigma}y^{\Delta}z + x^{\sigma}y^{\sigma}z^{\Delta}\end{aligned}$$

olur. Şimdi bu formülü n tane fonksiyonun çarpımı için genelleştirelim.

$$(x_1x_2x_3\,.\,.\,.\,x_n) = x_1^{\Delta}.x_2.\,.\,.x_n + x_1^{\sigma}x_2^{\Delta}.\,.\,.x_n + .\,.\,. + x_1^{\sigma}x_2^{\sigma}.\,.\,.x_{n-1}^{\sigma}x_n^{\Delta}$$

olur. Bunu daha da kısa olarak,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\Delta} = \sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1} x_i^{\sigma}\right)x_k^{\Delta}\left(\prod_{i=k+1}^{n} x_i\right)$$

şeklinde gösterebiliriz.

Örnek 2.20. f fonksiyonunun $(n+1)$ inci dereceden Δ türevini bulalım.

$(f^2)^{\Delta} = (f.f)^{\Delta} = f^{\Delta}f + f^{\sigma}f^{\Delta} = (f + f^{\sigma})f^{\Delta}$ bulunur.

Buradan $n \in \mathbb{N}$ için

$$(f^{n+1})^{\Delta} = f^{\Delta}\sum_{k=0}^{n}(f^{\sigma})^{k}(f^{n-k})$$

elde edilir.

Teorem 2.21. c keyfi bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

i. $f(t) = (t-c)^m$ ise

$$f^{\Delta}(t) = \sum_{v=0}^{m-1} (\sigma(t)-c)^v . (t-c)^{m-v-1}$$

ii. $g(t) = \frac{1}{(t-c)^m}$ ise

$$g^{\Delta}(t) = -\sum_{v=0}^{m-1} \frac{1}{(\sigma(t)-c)^{m-v} . (t-c)^{v+1}}$$

şeklindedir.

İspat:[5]

Örnek 2.22. Aşağıda verilen ifadeler için Δ ve ∇ türevlerin nasıl bulunduğunu inceleyelim.

i. $f(t) = t^2, \mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}}$ için f fonksiyonunun Δ türevini bulalım.

$\sigma(t) = \sqrt{t^2+1}$ olup $f(t) = (t-0)^2$ formunda yazılırsa, $m = 2, \alpha = 0$ olur. Bu durumda istenenler yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} f^{\Delta}(t) = (t^2)^{\Delta} &= \sum_{v=0}^{1} (\sigma(t)-0)^v . (t-0)^{2-1-v} \\ &= \sum_{v=0}^{1} \left(\sqrt{t^2+1}\right)^v . t^{1-v} \\ &= t + \sqrt{t^2+1} \end{aligned}$$

ii. $f(t) = t^2, \mathbb{T} = \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$ için f fonksiyonunun ∇ türevini bulalım.

$$\rho(t) = t - \frac{1}{2}\,, \;\; m = 2, \alpha = 0$$

$$\begin{aligned} f^{\nabla}(t) = (t^2)^{\nabla} &= \sum_{v=0}^{m-1} (\rho(t)-0)^v . (t-0)^{m-1-v} \\ &= \sum_{v=0}^{1} \left(t - \frac{1}{2}\right)^v . t^{1-v} = 2. t - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Sonuç 2.23. $t \in \mathbb{T}_k^k$ ve $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun t noktasında Δ türevinin var olması ∇ türevinin de var olduğu anlamına gelmez. Aynı şekilde f fonksiyonunun t noktasında ∇ türevinin var olması Δ türevinin de var olduğu anlamına gelmez[14].

İspat: $\mathbb{T} = [-2, -1] \cup [0,1]$ zaman skalası için

$$f(t) = \begin{cases} t\sin\left(\frac{1}{t}\right), & t \neq 0 \\ 0 \qquad\quad , & t = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu olmak üzere bu f fonksiyonu 0 noktasında süreklidir ve $0 \in \mathbb{T}$ noktasında sağ yoğun, soldan yayılımlıdır. $f,\ t$ noktasında sürekli ve t noktası sol yayılımlı ise o zaman $f,\ t$ noktasında $\nabla -$türevlenebilirdir. Bundan dolayı f fonksiyonu 0 noktasında $\nabla -$türevlenebilirdir. Fakat 0 noktasında

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

sonlu bir limiti yoktur. Böylece f, 0 noktasında $\Delta -$türevlenebilir değildir.

$\mathbb{T} = [-2, -1] \cup [0,1]$ zaman skalası alındığında aynı f fonksiyonu için Δ türevi olup ∇ türevi olmamaktadır.

Tanım 2.24. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ikinci Δ ve ∇ türevleri için, f^{Δ} nin $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ üzerindeki Δ türevinden ve f^{∇} nın $(\mathbb{T}_k)_k = \mathbb{T}_{k^2}$ üzerindeki ∇ türevinden bahsedeceğiz. f^{Δ} nin $(\mathbb{T}^k)^k = \mathbb{T}^{k^2}$ üzerindeki Δ türevi $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}: \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}$ şeklinde, benzer şekilde daha yüksek mertebeden türevler, $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{k^n} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. f^{∇}nin $(\mathbb{T}_k)_k = \mathbb{T}_{k^2}$ üzerindeki ∇ türevi $f^{\nabla\nabla} = (f^{\nabla})^{\nabla}: \mathbb{T}_{k^2} \to \mathbb{R}$ şeklinde, benzer şekilde daha yüksek mertebeden türevler, $f^{\nabla^n}: \mathbb{T}_{k^n} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$ için,

$$\sigma(\sigma(t)) = \sigma^2(t) \quad \text{ve} \quad \rho(\rho(t)) = \rho^2(t)$$

veya genel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $\rho^n(t)$ ve $\sigma^n(t)$ yukarıda ifade edildiği gibi tanımlanabilir. Ayrıca yukarıdaki tanımlamalar için,

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t$$

$$f^{\Delta^0} = f$$

$$\mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$$

eşitlikleri vardır.

Örnek 2.25. Keyfi bir zaman skalası için aşağıdaki fonksiyonların sırasıyla ikinci mertebeden türevlerini bulalım.

i. $f(t) = 1,\ f^{\Delta}(t) = 0,\ f^{\Delta^2}(t) = \left(f^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} = 0$

ii. $f(t) = t,\ f^{\nabla}(t) = 1,\ f^{\nabla^2}(t) = \left(f^{\nabla}(t)\right)^{\nabla} = (1)^{\nabla} = 0$

iii. $f(t) = t^2,\ f^{\Delta}(t) = t + \sigma(t),\ f^{\Delta^2}(t) = \left(f^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} = [t + \sigma(t)]^{\Delta}$
$= 1 + \sigma^{\Delta}(t)$

Örnek 2.26. Aşağıda belirli bir zaman skalasıyla verilen fonksiyonun sırasıyla ikinci mertebeden ∇ türevini bulalım.

$f(t) = t^2,\ \ \mathbb{T} = \frac{1}{2}\mathbb{N}_0$ ise $f^{\nabla\nabla}$ türevi bulalım.

$\rho(t) = t - \frac{1}{2}$ olup $f^{\nabla}(t) = 2.t - \frac{1}{2}$ idi.

$$f^{\nabla^2}(t) = [f^{\nabla}(t)]^{\nabla} = \left[2t - \frac{1}{2}\right]^{\nabla} = (2t)^{\nabla} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\nabla} = 2 - 0 = 2$$

Sonuç 2.27. f ve g fonksiyonları ikinci mertebeden türevlenebildikleri halde $f.g$ çarpım fonksiyonu genelde ikinci mertebeden türevlenemeyebilir.

i. Eğer f ve g fonksiyonlarının Δ türevleri de Δ türevlenebiliyorsa, yani ikinci mertebeden Δ türevlenebilir ise ve f^{σ}, Δ türevlenebilir ise

$$\begin{aligned}((f.g)^{\Delta})^{\Delta} &= (f^{\Delta}.g + f^{\sigma}.g^{\Delta})^{\Delta} = f^{\Delta\Delta}.g + f^{\Delta\sigma}.g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}.g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}.g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta}).g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}.g^{\Delta\Delta}\end{aligned}$$

şeklindedir.

ii. Eğer f ve g fonksiyonlarının ∇ türevleri de ∇ türevlenebiliyorsa, yani ikinci mertebeden ∇ türevlenebilir ise ve f^{ρ}, ∇ türevlenebilir ise

$$\begin{aligned}((f.g)^{\nabla})^{\nabla} &= (f^{\nabla}.g + f^{\rho}.g^{\nabla})^{\nabla} = f^{\nabla\nabla}.g + f^{\nabla\rho}.g^{\nabla} + f^{\rho\rho}.g^{\nabla\nabla} \\ &= f^{\nabla\nabla}.g + (f^{\nabla\rho} + f^{\rho\nabla}).g^{\nabla} + f^{\rho\rho}.g^{\nabla\nabla}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 2.28(Leibniz Teoremi). $S_k^{(n)}$ ile k tane σ, $n-k$ tane Δ içeren tüm kombinasyonların kümesini gösterelim. Eğer, $\forall\Lambda \in S_k^{(n)}$ için f^{Λ} mevcut ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(f.g)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k}$$

sağlanır.

İspat:[5]

Örnek 2.29. Eğer, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\forall\Lambda \in S_k^{(n)}$ için $f^{\Lambda} = f^{(n-k)}$ olacaktır. Burada $f^{(n)}$, f fonksiyonunun klasik n. türevi olarak ifade edilir. Bu durumda $S_k^{(n)}$ kümesi

$$\left|S_k^{(n)}\right| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.\,k!}$$

şeklinde olacaktır. Dolayısıyla

$$\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda} = \sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{(\mathrm{n-k})} = f^{(\mathrm{n-k})} \sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} 1 = \binom{n}{k} f^{(n-k)}$$

olarak bulunur. O halde,

$$(f.g)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\Lambda\in S_k^{(n)}} f^{\Lambda}\right) g^{\Delta^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

olur.

2.3 Δ ve ∇ İntegral

Δ ve ∇ integrallenebilir fonksiyonları tanımlamak için iki temel tanım ile başlayacağız. Bu konu ile bağlantılı daha fazla bilgi için [3,10] referansları okuyuculara destek sağlayabilir.

Tanım 2.30. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limitleri var(sonlu) ve $\mathbb{T}$ üzerindeki tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limitleri var(sonlu) ise bu f fonksiyonuna *regulated fonksiyon* denir.

Tanım 2.31. Eğer $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$ üzerindeki sağ yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ üzerindeki sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise bu f fonksiyonuna *rd-sürekli fonksiyon*, sol yoğun noktalarda sürekli ve $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise bu f fonksiyonuna *ld-sürekli fonksiyon*, hem sağ hem sol yoğun noktalarda sürekli ise bu f fonksiyonuna *rl-sürekli fonksiyon* denir. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi *rd-sürekli, ld-sürekli, rl-sürekli* ise sırasıyla

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

$$C_{rl} = C_{rl}(\mathbb{T}) = C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \cap C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilirler. Türevleri de *rd-sürekli* ise ${C^1}_{rd}$, *ld-sürekli* ise ${C^1}_{ld}$, *rl-sürekli* ise ${C^1}_{rl}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 2.32. σ, ρ, μ operatörlerinin sürekli, rd-sürekli ve regulated olup olmadıklarını inceleyelim.

σ operatörü için:

i. $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{Z} : s > t\}$ her zaman sürekli değildir.

ii. Sağ yoğun noktalarda $\sigma(t) = t$ olduğundan $\sigma(t)$ nin sağ yoğun noktalarda sürekliliği vardır. Sol yoğun noktalarda ise $\sigma(t)$ sonlu olup $\sigma(t)$ rd-süreklidir.

iii. $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ olduğundan sağ ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahiptir. Bu yüzden $\sigma(t)$ regulateddir.

ρ operatörü için:

i. $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{Z}: s < t\}$ her zaman sürekli değildir.

ii. Sağ yoğun noktalarda $\rho(t) \leq t$ olduğundan sürekli değildir. Sol yoğun noktalarda ise $\sigma(t) = t$ olup $\rho(t)$ rd-sürekli değildir.

iii. $\rho(t) \in \mathbb{T}$ olduğundan $\rho(t)$ regulateddir.

μ operatörü için:

i. $\mu(t) = \sigma(t) - t$ olup $\sigma(t)$ her zaman sürekli olmadığında $\mu(t)$ her zaman sürekli değildir.

ii. $\mu(t)$ sağ yoğun noktalarda sürekli ve $\mu(t) \equiv 0$ dır. Sol yoğun noktalarda ise $\sigma(t) - t < \infty$ olmasından $\mu(t) < \infty$ sonlu limite sahiptir. $\mu(t)$ rd-süreklidir.

iii. $\mu(t)$ regulateddir.

Teorem 2.33. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

i. f sürekli ise rd(ld,rl)-süreklidir.

ii. f rd(ld,rl)-sürekli ise f regulateddir.

iii. σ operatörü rd-sürekli(ρ operatörü ld-sürekli)dir.

iv. f sürekli bir fonksiyon olmak üzere $g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated veya sürekli ise $f\ o\ g$ bileşke fonksiyonu aynı özelliğe sahiptir.[5]

İspat:

i. f sürekli ise her noktada sonlu limiti vardır. Dolayısıyla rd- sürekli dur.

ii. f rd-sürekli ise f nin sol yoğun noktalarda sonlu limiti var ve sağ yoğun noktalarda sürekli fonksiyonun sürekli olduğu noktalarda sonlu limiti olacağından f regulateddir.

iii. σ operatörünün rd- sürekli olduğu önceki örnekte gösterildi.

iv. f regulated ise sağ ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahiptir. Sağ yoğun noktalar için $\sigma(t) = t$ olduğundan, $f(t) = f(\sigma(t))$ yazılabilir ve $f = f^{\sigma}$ olur. Dolayısıyla f^{σ} de sonlu limite sahiptir. Sol yoğun noktalar için t sol yoğun nokta olsun. Bu durumda $\sigma(t)$ ya sağ yoğun ya da sol yayılımlıdır. $\sigma(t)$ sağ yoğun ise f regulated olduğundan $f^{\sigma}(t) = f\big(\sigma(t)\big) < \infty$ olur.

v. f sürekli ve g regulated olsun. t sağ veya sol yoğun ise $g(t) < \infty$ dur ve $f\big(g(t)\big) < \infty$ olup $f\ o\ g$ bileşke fonksiyonu sürekli veya regulated olur.

Tanım 2.34. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, D (Türevlenebilirlik Bölgesi) üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\mathbb{T}^k \backslash D$ kümesi sayılabilir ve sağ yayılmış nokta içermiyorsa f fonksiyonuna $t \in D$ noktasında pre-türevlenebilir denir ($D \subset \mathbb{T}^k$)[5].

Teorem 2.35. Kompakt bir aralık üzerinde tanımlı her regulated fonksiyon sınırlıdır[5].

İspat: $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olmasın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f(t_n)| > n$ olacak şekilde $t_n \in [a,b]$ vardır. $\{t_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a,b]$ olduğundan $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ şeklinde yakınsak bir alt dizisi vardır. Yani $\exists t_0 \in [a,b]$ için $\lim_{k\longrightarrow\infty} t_{n_k} = t_0$ olur. $\mathbb{T}$ kapalı ve $\{t_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{T}$ olmasından $t_0 \in \mathbb{T}$ dir. $\lim_{k\longrightarrow\infty} t_{n_k} = t_0$ olduğu için t_0 yoğun nokta olamaz ve dolayısıyla bu t_0 noktasına alttan ve ya üstten yakınsayan birer dizi vardır. Bu durumda $t \longrightarrow t_0$ için, $f(t)$ nin regulated olmasından sonludur. Bu da bir çelişkidir.

Teorem 2.36.(Ortalama Değer Teoremi) f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ de tanımlı ve ikisi de D üzerinde pre-türevlenebilir reel değerli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda $\forall t \in D$ için

$$\left|f^{\Delta}(t)\right| \leq g^{\Delta}(t)$$

ise $\forall r, s \in \mathbb{T}, r \leq s$ için,

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

eşitsizliği sağlanır[5].

Sonuç 2.37. f ve g, D bölgesinde pre-türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i. Eğer U uç noktaları $r, s \in \mathbb{T}$ olan kompakt bir aralık ise

$$|f(t) - f(s)| \leq \left\{ \sup_{\tau \in U^K \cap D} \left|f^{\Delta}(t)\right| \right\} |s - r|$$

eşitsizliği sağlanır.

ii. $\forall t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = 0$ ise, f sabit fonksiyondur.

iii. $\forall t \in D$ için $f^{\Delta}(t) = g^{\Delta}(t)$ ise, o zaman $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$g(t) = f(t) + C$$

dir. Burada C sabittir.

İspat: [5]

Tanım 2.38. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu regulated olsun. Bu durumda F fonksiyonu f nin pre-antitürevi ve C keyfi bir sabit olmak üzere, f fonksiyonunun belirsiz integrali

$$\int f(t)\Delta t = F(t) + C$$

şeklinde tanımlanır. Cauchy integrali $\forall r, s \in \mathbb{T}$ için

$$\int_r^s f(t)\Delta t = F(s) - F(r)$$

şeklindedir. Bir $F: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}^K$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ şartını sağlıyorsa F fonksiyonuna $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun antitürevi denir.[5]

Örnek 2.39. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $a \neq 1$ olsun. Bu durumda

$$\int a^t \Delta t$$

belirsiz integralini hesaplayalım.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan $f^{\Delta}(t) = \Delta f(t)$ yazılır. Buna göre $a \neq 1$ sabiti için

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

eşitliği yardımıyla

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + C$$

olur. Burada C keyfi bir sabit sayıdır.

Örnek 2.40. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikleri gösterelim.

i.

$$\int (t+a)^k \Delta t = \frac{(t+a)^{k+1}}{k+1} + C$$

ii.

$$\int \binom{t}{a} \Delta t = \binom{t}{a+1} + C$$

Çözüm:

i.

$$\Delta\left(\frac{(t+a)^{k+1}}{k+1}\right)=\frac{(t+a+1)^{k+1}-(t+a)^{k+1}}{k+1}$$

$$=\frac{1}{k+1}[(t+a+1)^{k}-((t+a)(t+a-1)(t+a-2)\dots(t+a-k))]$$

$$=\frac{1}{k+1}[(t+a+1)(t+a)(t+a-1)\dots(t+a-k+1)$$

$$-((t+a)(t+a-1)(t+a-2)\dots(t+a-k))]$$

$$=\frac{1}{k+1}[(t+a)(t+a-1)\dots(t+a-k+1).((t+a+1)-(t+a-k))]$$

$$=\frac{1}{k+1}[(t+a)(t+a-1)\dots(t+a-k+1).(k+1)]$$

$$=(t+a)^{k}$$

Bu eşitliğin her iki tarafının integralini alırsak,

$$\int(t+a)^{k}\Delta t=\frac{(t+a)^{k+1}}{k+1}+C$$

bulunur.

ii. Benzer şekilde,

$$\Delta\binom{t}{a+1}=\binom{t+1}{a+1}-\binom{t}{a+1}=\frac{(t+1)^{a+1}}{\Gamma(a+2)}-\frac{t^{a+1}}{\Gamma(a+2)}=\frac{(t+1)t^{a}-t^{a}(t-a)}{\Gamma(a+2)}$$

$$=\frac{(a+1)t^{\,a}}{\Gamma(a+2)}=\frac{(a+1)t^{a}}{(\alpha+1)\Gamma(a+1)}=\frac{t^{a}}{\Gamma(a+1)}=\binom{t}{a}$$

olduğundan, ifadenin sağlandığını görürüz.

Teorem 2.41.(Antitürevlerin Varlığı) Her rd-sürekli fonksiyon antitüreve sahiptir.(Her ld-sürekli fonksiyon anti türeve sahiptir.) Özel olarak $t_0\in\mathbb{T}$ ise, $t\in\mathbb{T}$ için f fonksiyonunun antitürevi olan F fonksiyonu

$$F(t):=\int_{t_0}^{t}f(\tau)\Delta\tau$$

şeklinde tanımlanır.

İspat: [5]

Teorem 2.42. Eğer $f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}^k$ ise aşağıdaki integral

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

şeklindedir.[5]

İspat: Bir önceki teoremden f nin F gibi bir antitürevi vardır ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = F\big(\sigma(t)\big) - F(t) = \mu(t)F^{\Delta}(t) = \mu(t)f(t)$$

şeklindedir.

Teorem 2.43. Eğer $f \in C_{ld}$ ve $t \in \mathbb{T}_k$ ise aşağıdaki integral

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla\tau = \nu(t)f(t)$$

şeklindedir.

İspat: [5]

Teorem 2.44. Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}, \alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_{rd}$ $(f, g \in C_{ld})$ olsun. Bu durumda;

i.

$$\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$$

$$\left(\int_a^b [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t\right)$$

ii.

$$\int_a^b (\alpha f)(t)\Delta t = \alpha \int_a^b f(t)\Delta t \qquad \left(\int_a^b (\alpha f)(t)\nabla t = \alpha \int_a^b f(t)\nabla t\right)$$

iii.

$$\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t \qquad \left(\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t\right)$$

iv.

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^c f(t)\Delta t + \int_c^b f(t)\Delta t \qquad \left(\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t\right)$$

v.

$$\int_a^b f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$$

$$\left(\int_a^b f(\rho(t))g^{\nabla}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(t)\nabla t\right)$$

vi.

$$\int_a^b f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$$

$$\left(\int_a^b f(t)g^{\nabla}(t)\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\nabla}(t)g(\rho(t))\nabla t\right)$$

vii.

$$\int_a^a f(t)\Delta t = 0 \qquad \left(\int_a^a f(t)\nabla t = 0\right)$$

İspat: [5]

Teorem 2.45. $\forall t \in [a, b)$ olsun. Bu durumda

i. $|f(t)| \leq g(t)$ ise aşağıdaki eşitsizlik

$$\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$$

şeklindedir.

ii. $f(t) \geq 0$ ise aşağıdaki eşitsizlik

$$\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$$

şeklindedir.

İspat: [5]

Teorem 2.46. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun. Bu durumda;

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

ii. Eğer $[a, b]$ yalnızca yoğun noktalar içeriyorsa,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t) & a < b \ ise \\ 0 & a = b \ ise \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t) & a > b \ ise \end{cases}$$

iii. Eğer $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk: k \in \mathbb{Z}\}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)h & a < b \ ise \\ 0 & a = b \ ise \\ -\sum_{k=\frac{b}{h}}^{\frac{a}{h}-1} f(kh)h & a > b \ ise \end{cases}$$

iv. Eğer için $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t) & a < b \ ise \\ 0 & a = b \ ise \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t) & a > b \ ise \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: [5]

Teorem 2.47. $a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{ld}$ olsun. Bu durumda;

i. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^b f(t)dt$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

ii. Eğer $[a, b]$ yalnızca yoğun noktalar içeriyorsa,

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum\limits_{t\in(a,b]} \nu(t)f(t) & a < b \; ise \\ 0 & a = b \; ise \\ -\sum\limits_{t\in(b,a]} \nu(t)f(t) & a > b \; ise \end{cases}$$

iii. Eğer $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise,

$$\int_a^b f(t)\nabla t = \begin{cases} \sum\limits_{k=\frac{a}{h}+1}^{\frac{b}{h}} f(kh)h & a < b \; ise \\ 0 & a = b \; ise \\ -\sum\limits_{k=\frac{b}{h}+1}^{\frac{a}{h}} f(kh)h & a > b \; ise \end{cases}$$

iv. Eğer için $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a+1}^{b} f(t) & a < b\ ise \\ 0 & a = b\ ise \\ -\sum_{t=b+1}^{a} f(t) & a > b\ ise \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat: [5]

Örnek 2.48. $a \in \mathbb{T}$ alalım. Burada, $\mathbb{T}$ keyfi bir zaman skalası olmak üzere,

$$\int_a^t 1\Delta s = t - a \qquad ((t-a)^\Delta = t^\Delta - a^\Delta = 1 - 0 = 1)$$

şeklindedir. Ayrıca $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \int_a^t sds = \frac{t^2}{2}$$

şeklindedir. Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \sum_{s=0}^{t-1} s = 0 + 1 + 2 + \cdots + (t-2) + (t-1) = \frac{(t-1)t}{2}$$

şeklindedir. Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} f(sh)h = \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} sh^2 = h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} s = h^2\left(0 + 1 + 2 + \cdots + \left(\frac{t}{h} - 1\right)\right)$$

$$= h^2\left(\frac{t}{h} - 1\right)\frac{t}{h}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t-h)t$$

şeklindedir. $\mathbb{T} = [0,1] \cup [2,3]$ ise

$$\int_a^t s\Delta s = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} & , \quad 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

olarak bulunur.

Teorem 2.49. $f, f^{\Delta}, f^{\nabla}$ fonksiyonları sürekli olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler;

i.

$$\left[\int_a^t f(t,s)\Delta s\right]^{\Delta} = f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s$$

ii.

$$\left[\int_a^t f(t,s)\Delta s\right]^{\nabla} = f(\rho(t),\rho(t)) + \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\Delta s$$

iii.

$$\left[\int_a^t f(t,s)\nabla s\right]^{\Delta} = f\big(\sigma(t),\sigma(t)\big) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s$$

iv.

$$\left[\int_a^t f(t,s)\nabla s\right]^{\nabla} = f(\rho(t),t) + \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\nabla s$$

şeklindedir.

İspat: [5]

2.4 Δ ve ∇ Üstel Fonksiyon

Bu kısımda zaman skalası üzerine tanımlanan genelleşmiş Δ ve ∇ üstel fonksiyonların tanımlarını ve özelliklerini vereceğiz. Zaman skalasında üstel fonksiyonlarla ilgili sonuçlara ulaşmak için [5,6] kitaplarına bakılabilir.

Tanım 2.50. $h > 0$ için Hilger karmaşık sayıları

$$\mathbb{C}_h = \left\{z \in \mathbb{C}:\ z \neq -\frac{1}{h}\right\}$$

ile tanımlanır. $h = 0$ ise $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}$ ile verilir.

Tanım 2.51. $h > 0$ için Hilger tam sayıları

$$\mathbb{Z}_h = \left\{z \in \mathbb{C}: \ -\frac{\pi}{h} < z < \frac{\pi}{h}\right\}$$

ile tanımlanır. $h = 0$ ise $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$ ile verilir.

Tanım 2.52. $h > 0$ olmak üzere silindir (ξ_h) ve ν −silindir $(\hat{\xi}_h)$ dönüşümleri:

i. $\xi_h: \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{Z}_h$ için $\xi_h(z) := \frac{1}{h} Log(1 + zh)$,

ii. $\hat{\xi}_h: \mathbb{C}_h \longrightarrow \mathbb{Z}_h$ için $\hat{\xi}_h(z) := -\frac{1}{h} Log(1 - zh)$,

ile tanımlanırlar. $h = 0$ için $\forall z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\xi_0(z) = \hat{\xi}_0(z) = z$ dir.

Tanım 2.53.

i. Eğer $p: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$1 + \mu(t)p(t) \neq 0$$

koşulunu sağlıyorsa $p(t)$ fonksiyonuna regresif denir. Tüm rd-sürekli ve regresif fonksiyonların ailesi $\mathcal{R}$ ile gösterilir. $p \in \mathcal{R}$ ise $s, t \in \mathbb{T}$ için genelleşmiş Δ üstel fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$e_p(t, s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau\right)$$

ii. Eğer $q: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_k$ için

$$1 - \nu(t)q(t) \neq 0$$

koşulunu sağlıyorsa $q(t)$ fonksiyonuna $\nu -$ regresif denir. Tüm ld-sürekli ve $\nu -$ regresif fonksiyonların ailesi $\mathcal{R}_\nu$ ile gösterilir. $q \in \mathcal{R}$ ise $s, t \in \mathbb{T}$ için genelleşmiş ∇ üstel fonksiyon aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$e_q(t, s) = \exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}\big(q(\tau)\big)\nabla\tau\right)$$

Tanım 2.54.

i. $p \in \mathcal{R}$ için birinci mertebeden lineer $y^\Delta(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemine *regresif dinamik denklem* denir.

ii. $p \in \mathcal{R}_v$ için birinci mertebeden lineer $y^{\nabla}(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemine *v-regresif dinamik denklem* denir.

Teorem 2.55.

i. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y^{\Delta}(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemi regresif olsun. Bu durumda Δ üstel fonksiyonu $e_p(t, t_0)$

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t), \;\; y(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

ii. $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y^{\nabla}(t) = p(t)y(t)$ dinamik denklemi v-regresif olsun. Bu durumda ∇ üstel fonksiyonu $\hat{e}_p(t, t_0)$

$$y^{\nabla}(t) = p(t)y(t), \;\; y(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

İspat: [5]

Teorem 2.56.

i. p fonksiyonu sürekli ve regresif olsun. Bu durumda

$e_p(t, t_0) = \hat{e}_{\frac{p^{\rho}}{1+p^{\rho}v}}(t, t_0)$,

ii. q fonksiyonu sürekli ve v-regresif olsun. Bu durumda

$\hat{e}_q(t, t_0) = e_{\frac{q^{\sigma}}{1+q^{\sigma}\mu}}(t, t_0)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: [5]

Teorem 2.57. $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_v$ olsun. Bu durumda

i. $e_p^{\rho}(t, t_0) = \frac{1}{1+p^{\rho}(t)v(t)} e_p(t, t_0)$ ve $e_p^{\rho}(t_0, t_0) = \frac{1}{1+p^{\rho}(t_0)v(t_0)}$;

ii. $\hat{e}_p^{\rho}(t, t_0) = 1 - p(t)v(t)\hat{e}_q(t, t_0)$ ve $\hat{e}_p^{\rho}(t_0, t_0) = 1 - p(t_0)v(t_0)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: [5]

3 DİAMOND-α DİNAMİK DENKLEMLER

Tezin bu kısmında ilerideki çalışmalara temel teşkil eden standart Δ ve ∇ türevlerinden bağımsız olarak diamond–α türevin tanımı verildi ve Δ ve ∇ türevleri ile bağlantılı diamond–α türevin temel özellikleri incelendi. Bu konu ile bağlantılı daha fazla bilgi için [6,7,9,15,16,17] referansları okuyuculara destek sağlayabilir.

3.1 Diamond-α Türev

Tanım 3.1. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k^k$ olsun. Bu durumda $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\exists \delta > 0$ için t noktasının bir U komşuluğundaki her s elemanı için $\mu_{ts} = \sigma(t) - s$ ve $\nu_{ts} = \rho(t) - s$ olmak üzere

$$\left|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - f^{\Diamond_\alpha}(t)\mu_{ts}\nu_{ts}\right| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

eşitsizliği sağlanırsa $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ ifadesine $\mathbb{T}_k^k$ üzerinde f fonksiyonunun *diamond-α türevi* denir[7].

Diamond-α türevi türevlerinde olduğu gibi tek türlü belirlenir. Gerçekten $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde t'nin U_1 ve U_2 komşuluklarındaki her bir $\phi_1(t)$ ve $\phi_2(t)$ değerler olmak üzere $\forall s \in U_1$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\,\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

ve $\forall s \in U_2$ için

$$|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\,\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

yazılabilir. $\forall \varepsilon > 0$ için $\varepsilon_* = \frac{\varepsilon}{2}$ olsun. Bu taktirde $\forall s \in U = U_1 \cap U_2$ için

$$\begin{aligned}
&|\phi_1(t) - \phi_2(t)||\mu_{ts}\nu_{ts}| = |\phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&= |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\,\mu_{ts}\nu_{ts} \\
&\quad -(\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts})| \\
&< |\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_1(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&\quad +|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - \phi_2(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&< \varepsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| + \varepsilon_*|\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $|\phi_1(t) - \phi_2(t)| < \varepsilon$ ve $\varepsilon \to 0$ iken $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ olur[14].

Teorem 3.2. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere f fonksiyonunu $t \in \mathbb{T}$ de Δ ve ∇ türevlenebilsin. Bu durumda f fonksiyonu t de $\Diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha) f^\nabla(t)$$

şeklindedir[7].

İspat: $f^\Delta(t)$ ve $f^\nabla(t)$ türevleri mevcut olsun. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde t'nin U_1 ve U_2 komşuluklarındaki $\forall s \in U_1$ için

$$\left|[f^\sigma(t) - f(s)] - f^\Delta(t)\mu_{ts}\right| < \varepsilon|\mu_{ts}|$$

ve $\forall s \in U_2$ için

$$|[f^\rho(t) - f(s)] - f^\nabla(t)\nu_{ts}| < \varepsilon|\nu_{ts}|$$

yazılır. Bu takdirde $\forall s \in U_1$ için

$$\left|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\nu_{ts}\mu_{ts}\right| < \alpha\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

ve $\forall s \in U_2$ için

$$|(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1-\alpha)f^\nabla(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| < (1-\alpha)\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|$$

elde edilebilir. Böylece $\forall s \in U = U_1 \cap U_2$ için

$$\begin{aligned}
&\left|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} + (1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - [\alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)]\mu_{ts}\nu_{ts}\right| \\
&\quad \leq \left|\alpha[f^\sigma(t) - f(s)]\nu_{ts} - \alpha f^\Delta(t)\nu_{ts}\mu_{ts}\right| \\
&\qquad + |(1-\alpha)[f^\rho(t) - f(s)]\mu_{ts} - (1-\alpha)f^\nabla(t)\mu_{ts}\nu_{ts}| \\
&\quad < \alpha\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}| + (1-\alpha)\varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}| < \varepsilon|\mu_{ts}\nu_{ts}|
\end{aligned}$$

olur. Buradan $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ türevi vardır ve $f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)$ bulunur.

Tanım 3.1' den ve Teorem 3.2' den yararlanarak diamond-α türevi için aşağıdaki tanımlamayı verebiliriz.

Tanım 3.3.(Diamond-α Türev)

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $f(t), \mathbb{T}$ üzerinde Δ ve ∇ türevlenebilir olsun. Bu durumda $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)$ fonksiyonunun $f^{\Diamond_\alpha}(t)$ türevi

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\nabla(t)$$

olarak tanımlanır. Böylece f $\Diamond_\alpha$ türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun Δ ve ∇ türevlenebilir olmasıdır[15].

Bu tanımda $\alpha = 1$ alınırsa, $f^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Delta}(t)$ ve $\alpha = 0$ alınırsa, $f^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\nabla}(t)$ bulunur. Bu da $\alpha = 1$ için diamond-α türevinin $\Delta -$türevine , $\alpha = 0$ için diamond-α türevinin ∇ türevine eşit olduğunu gösterir. Ayrıca $\alpha = \frac{1}{2}$ olduğunda, kombine dinamik türevler, herhangi bir ayrık zaman skalası üzerinde bize merkezi bir formül verir.

Sonuç 3.4. $t \in \mathbb{T}$ noktası yoğun olsun. Bu durumda $f'(t)$ varsa

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}(t) = f'(t)$$

şeklindedir[7].

İspat: $t \in \mathbb{T}$ noktası yoğun ve $f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$ sonlu bir değer olarak limiti mevcut olsun. t noktasının yeterli küçük bir U komşuluğundaki $\forall s, t \in U$ için $h = s - t$ alınırsa

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{s\to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

olur. Bu da $f^{\Delta}(t)$, aynı zamanda $f^{\nabla}(t)$ demektir. $f^{\Diamond_\alpha}$ için Teorem 3.1.1. göz önüne alınırsa

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla}(t) = \alpha f'(t) + (1-\alpha) f'(t) = f'(t)$$

bulunur.

Teorem 3.5. $f, g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ birer fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha -$türevlenebilir olsunlar. Bu durumda

i. $f + g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Diamond_\alpha}(t) + g^{\Diamond_\alpha}(t)$$

şeklindedir.

ii. c herhangi bir sabit sayı olmak üzere, $cf: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$(cf)^{\Diamond_\alpha}(t) = c f^{\Diamond_\alpha}(t)$$

şeklindedir.

iii. $f.g: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$(f.g)^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)$$

şeklindedir.

iv. $g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{g}: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) = -\frac{\big(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\big)g^{\Diamond_\alpha} - \alpha g^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) - (1-\alpha)g^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

şeklindedir.

v. $g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha$ türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) = -\frac{f^{\Diamond_\alpha}(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) - \alpha f^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)g^{\Delta}(t) - (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

şeklindedir[7].

İspat:

i. $$\begin{aligned}(f+g)^{\Diamond_\alpha}(t) &= \alpha(f+g)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)(f+g)^{\nabla}(t)\\ &= \alpha f^{\Delta}(t) + \alpha g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)\\ &= \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) + \alpha g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)\\ &= f^{\Diamond_\alpha}(t) + g^{\Diamond_\alpha}(t)\end{aligned}$$

ii. $$\begin{aligned}(cf)^{\Diamond_\alpha}(t) &= \alpha(cf)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)(cf)^{\nabla}(t)\\ &= \alpha cf^{\Delta}(t) + (1-\alpha)cf^{\nabla}(t) = c\left(\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)\right) =\end{aligned}$$

$cf^{\Diamond_\alpha}(t)$

iii. $$\begin{aligned}(fg)^{\Diamond_\alpha}(t) &= \alpha(fg)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)(fg)^{\nabla}(t)\\ &= \alpha f^{\Delta}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)g(t)\\ &\quad + (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\Delta}(t)\\ &= f^{\Diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^{\sigma}(t)g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\Delta}(t)\end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) &= \alpha\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)\left(\frac{1}{g}\right)^{\nabla}(t)\\ &= -\alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} - (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}\end{aligned}$$

$$= -\alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} - (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} + (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)}$$

$$- (1-\alpha)\frac{g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)} - \alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)} + \alpha\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= -\frac{\alpha g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)} - \frac{\alpha g^{\Delta}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\rho}(t)}$$

$$+ \frac{\alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) + (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= \frac{\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

v.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t) = \left(f.\frac{1}{g}\right)^{\Diamond_\alpha}(t)$$

$$= f^{\Diamond_\alpha}(t)\frac{1}{g}(t) + \alpha f^{\sigma}(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\rho}(t)\left(\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)$$

$$= f^{\Diamond_\alpha}(t)\frac{1}{g}(t)$$

$$+ \alpha f^{\sigma}(t)\frac{\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$+ (1-\alpha)f^{\rho}(t)\frac{\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= \frac{f^{\Diamond_\alpha}(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$+ \frac{\alpha f^{\sigma}(t)\left[\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)\right]}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$+ \frac{(1-\alpha)f^{\rho}(t)\left[\left(g^{\sigma}(t) + g^{\rho}(t)\right)g^{\Diamond_\alpha}(t) - \alpha g^{\Delta}(t)g^{\sigma}(t) - (1-\alpha)g^{\nabla}(t)g^{\rho}(t)\right]}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

$$= -\frac{f^{\Diamond_\alpha}(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t) - \alpha f^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)g^{\Delta}(t) - (1-\alpha)f^{\rho}(t)g^{\rho}(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g^{\sigma}(t)g^{\rho}(t)}$$

Teorem 3.6. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}$ noktasında $\Diamond_\alpha$ türevlenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur[16]:

i. $f^{\Diamond_\alpha \Delta}(t) = \alpha f^{\Delta\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla\Delta}(t)$

ii. $f^{\Diamond_\alpha \nabla}(t) = \alpha f^{\Delta\nabla}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla\nabla}(t)$

iii. $f^{\Delta\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla\nabla}(t)$ ve $f^{\Delta\Diamond_\alpha}(t) \neq f^{\Diamond_\alpha \Delta}(t)$

iv. $f^{\nabla\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\nabla\Delta}(t) + (1-\alpha) f^{\nabla\nabla}(t)$ ve $f^{\nabla\Diamond_\alpha}(t) \neq f^{\Diamond_\alpha \nabla}(t)$

v. $$f^{\Diamond_\alpha\Diamond_\alpha}(t) = \alpha^2 f^{\Delta\Delta}(t) + \alpha(1-\alpha)\left(f^{\nabla\Delta}(t) + f^{\Delta\nabla}(t)\right) + (1-\alpha)^2 f^{\nabla\nabla}(t)$$
$$\neq \alpha^2 f^{\Delta\Delta}(t) + (1-\alpha)^2 f^{\nabla\nabla}(t)$$

Teorem 3.7. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Diamond_\alpha$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(a) = f(b)$ ise
$$f^{\Diamond_\alpha}(\tau') \leq 0 \leq f^{\Diamond_\alpha}(\tau)$$
eşitsizliğini sağlayan $\tau', \tau \in [a,b)$ noktaları vardır[16].

Teorem 3.8. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Diamond_\alpha$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda
$$f^{\Diamond_\alpha}(\tau')(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq f^{\Diamond_\alpha}(\tau)(b-a)$$
eşitsizliğini sağlayan $\tau', \tau \in [a,b)$ noktaları vardır[16].

Sonuç 3.9. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b)$ üzerinde $\Diamond_\alpha$ türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall t \in [a,b)$ için;

i. $f^{\Diamond_\alpha}(t) > 0$ ise f artan bir fonksiyondur.

ii. $f^{\Diamond_\alpha}(t) < 0$ ise f azalan bir fonksiyondur.

iii. $f^{\Diamond_\alpha}(t) \geq 0$ ise f azalmayan bir fonksiyondur.

iv. $f^{\Diamond_\alpha}(t) \leq 0$ ise f artmayan bir fonksiyondur.

İspat: [7]

3.2 Diamond-α İntegral

Tanım 3.10. $a, t \in \mathbb{T}$ ve $h: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\Diamond_\alpha$ integrali $\alpha \in [0,1]$ için

$$\int_a^t h(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau = \alpha \int_a^t h(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t h(\tau)\nabla\tau$$

şeklinde tanımlanır. $\lozenge_\alpha$ integral Δ ve ∇ integrallerinin lineer kombinasyonudur.

Genelde $t \in \mathbb{T}$ için

$$\left(\int_a^t h(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau\right)^{\lozenge_\alpha} = h(\tau)$$

sağlanmaz[7].

Teorem 3.11. $a, b, t \in \mathbb{T}$ ve $c \in \mathbb{R}$, $f, g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i.

$$\int_a^t [f(\tau) + g(\tau)]\, \lozenge_\alpha \tau = \int_a^t f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau + \int_a^t g(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau$$

ii.

$$\int_a^t cf(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau = c\int_a^t f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau$$

iii.

$$\int_a^t f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau = -\int_t^a f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau$$

iv.

$$\int_a^t f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau = \int_a^b f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau + \int_b^t f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau$$

v.

$$\int_a^a f(\tau)\, \lozenge_\alpha \tau = 0$$

biçimindedir[7].

İspat: İntegral tanımından;

i.

$$\int_a^t [f(\tau)+g(\tau)] \Diamond_\alpha \tau = \alpha \int_a^t [f(\tau)+g(\tau)]\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t [f(\tau)+g(\tau)]\nabla\tau$$

$$= \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + \alpha \int_a^t g(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau + (1-\alpha)\int_a^t g(\tau)\nabla\tau$$

$$= \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau + \alpha \int_a^t g(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t g(\tau)\nabla\tau$$

$$= \int_a^t f(\tau) \Diamond_\alpha \tau + \int_a^t g(\tau) \Diamond_\alpha \tau$$

ii.

$$\int_a^t cf(\tau) \Diamond_\alpha \tau = \int_a^t cf(\tau)\Delta\tau + \int_a^t cf(\tau)\nabla\tau = c\left(\int_a^t f(\tau)\Delta\tau + \int_a^t f(\tau)\nabla\tau\right)$$

$$= \int_a^t f(\tau) \Diamond_\alpha \tau$$

iii.

$$\int_a^t f(\tau) \Diamond_\alpha \tau = \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= -\alpha \int_t^a f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_t^a f(\tau)\nabla\tau = -\int_t^a f(\tau) \Diamond_\alpha \tau$$

iv.

$$\int_a^t f(\tau) \Diamond_\alpha \tau = \alpha \int_a^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= \alpha \int_a^b f(\tau)\Delta\tau + \alpha \int_b^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b f(\tau)\nabla\tau + (1-\alpha)\int_b^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= \alpha \int_a^b f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^b f(\tau)\nabla\tau + \alpha \int_b^t f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_b^t f(\tau)\nabla\tau$$

$$= \int_a^b f(\tau) \lozenge_\alpha \tau + \int_b^t f(\tau) \lozenge_\alpha \tau$$

v.
$$\int_a^a f(\tau) \lozenge_\alpha \tau = \alpha \int_a^a f(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha) \int_a^a f(\tau)\nabla\tau = \alpha.0 + (1-\alpha).0 = 0$$

Teorem 3.12. f ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

i. Eğer $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(\tau) \lozenge_\alpha \tau \geq 0$$

eşitsizliği vardır.

ii. Eğer $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \leq g(t)$ ise

$$\int_a^b f(\tau) \lozenge_\alpha \tau \leq \int_a^b g(\tau) \lozenge_\alpha \tau$$

iii. Eğer $\forall t \in [a,b]$ için $f(t) \geq 0$ oluyorsa, bu durumda $f(t) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\int_a^b f(\tau) \lozenge_\alpha \tau = 0$$

olmasıdır[9].

Sonuç 3.13. $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda;

i. $a < b$ olsun. $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ her sabit fonksiyon a noktasından b noktasına $\lozenge_\alpha$ integrallenebilir ve

$$\int_a^b f(\tau) \lozenge_\alpha \tau = c(b-a)$$

şeklindedir.

ii. $[a,b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için her monoton fonksiyon a noktasından b noktasına $\Diamond_\alpha$ integrallenebilirdir.

iii. $[a,b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için her sürekli fonksiyon a noktasından b noktasına $\Diamond_\alpha$ integrallenebilirdir.

iv. $[a,b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için sadece sonlu sayıda bir çok süreksiz noktalarda her sınırlı fonksiyon a noktasından b noktasına $\Diamond_\alpha$ integrallenebilirdir.

v. $[a,b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için her düzenli fonksiyon a noktasından b noktasına $\Diamond_\alpha$ integrallenebilirdir.

vi. $[a,b]$ üzerinde $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ için sınırlı bir fonksiyon, a noktasından b noktasına $\Diamond_\alpha$ integrallenebilir olsun. Bu durumda f, $[a,b]$ nin her $[c,d]$ alt aralığında $\Diamond_\alpha$ integrallenebilirdir.

vii. f, a noktasından b noktasına $\Diamond_\alpha$ integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f|$ fonksiyonu da $\Diamond_\alpha$ integrallenebilirdirdir ve

$$\left| \int_a^b f(\tau)\, \Diamond_\alpha \tau \right| \leq \int_a^b |f(\tau)|\, \Diamond_\alpha \tau$$

şeklindedir[15].

3.3 Diamond-α Üstel Fonksiyon

Tanım 3.14.(Kombine Üstel Fonksiyon)

$\Diamond_\alpha$ dinamik denklemler, Δ ve ∇ dinamik denklemlerin bir konveks kombinasyonudur. Biz burada $\Diamond_\alpha$ dinamik denklemler de üstel fonksiyonu tanımlayabilmek için Δ ve ∇ üstel fonksiyonların kombinasyonunu tanımlayacağız. Bu kombine üstel fonksiyonu için iki farklı fonksiyon tanımlayacağız. Bu fonksiyonları ${}_\alpha E_p$ ve ${}_\alpha e_p$ ile gösterelim.

$p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_\nu$, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ ve $\alpha \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

Birincisi ve en çok bilinen tanım:

$${}_\alpha E_p(t,t_0) = \alpha e_p(t,t_0) + (1-\alpha)\hat{e}_p(t,t_0)$$

şeklindedir. Örneğin;

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $p(t) = \frac{1}{2}$ olsun. $t_0 = 0$ alırsak $e_p(t,0) = \left(\frac{3}{2}\right)^t$, $y^{\Delta}(t) = \frac{1}{2}y(t)$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin tek çözümü olur. Ayrıca $\hat{e}_p(t,0) = 2^t$, $y^{\nabla}(t) = \frac{1}{2}y(t)$, $y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin tek çözümü olur. Bu durumda konveks kombine üstel fonksiyon $t \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$$_{\alpha}E_p(t,0) = \alpha\left(\frac{3}{2}\right)^t + (1-\alpha)2^t$$

şeklindedir.

İkincisi ve Δ ve ∇ üstel fonksiyonlara benzeyen tanım:

$$_{\alpha}e_p(t,t_0) := \exp\left(\alpha\int_{t_0}^{t}\xi_{\mu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_{t_0}^{t}\hat{\xi}_{\nu(\tau)}\big(p(\tau)\big)\nabla\tau\right)$$

şeklindedir ve bu tanımdan aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

i. $_{\alpha}e_p(t,t_0) = e_p^{\alpha}(t,t_0)\hat{e}_p^{(1-\alpha)}(t,t_0)$;

ii. $\ln(\,_{\alpha}e_p(t,t_0) = \alpha e_p(t,t_0) + (1-\alpha)\hat{e}_p(t,t_0)$;

iii. $_{\alpha}e_p(t,s)\,_{\alpha}e_p(s,t_0) = \,_{\alpha}e_p(t,t_0)$

Bu özelliklerin ispatı ve diamond-α üstel fonksiyon ile ilgili sonuçlar için [8] numaralı referansı incelenebilir.

$_{\alpha}E_p$ ve $_{\alpha}e_p$ fonksiyonlarının her ikisinde de $\alpha = 1$ alındığında $\Delta -$üstel fonksiyon, $\alpha = 0$ alındığında $\nabla -$üstel fonksiyon oluşur. $e_p$ve $\hat{e}_p$ başlangıç değer problemlerinin birer çözümüdür. Ancak $_{\alpha}E_p$ ve $_{\alpha}e_p$ üstel fonksiyonları bir dinamik başlangıç değer probleminin çözümü değildir.

4 DÜZGÜN ZAMAN SKALASINDA DİAMOND-α DİNAMİK DENKLEMLER

Bu bölümde düzgün zaman skalaları üzerinde diamond-α dinamik denklemleri ele alacağız. Bu amaçla öncelikle düzgün zaman skalası ve atomik düzgün zaman skalası tanımlarını vereceğiz. Tezin bu bölümünde ana amacımız atomik düzgün zaman skalaları üzerinde Teorem 4.16. da (4.1) ve (4.2) ile verilen başlangıç değer problemlerinin çakışık olduklarını ve her ikisinin birden aynı tek çözüme sahip olduklarını göstermektir.

4.1 Düzgün Zaman Skalası

Tanım 4.1. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Bu durumda

i. $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\sigma\big(\rho(t)\big) = t$, **ii.** $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\rho(\sigma(t)) = t$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathbb{T}$ ye *düzgün zaman skalası* denir[8].

Teorem 4.2. $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalası olsun. Bu durumda σ ve ρ operatörleri $\mathbb{T}$ üzerinde birbirlerinin ters operatörleridir.($\sigma^{-1} = \rho$ ve $\rho^{-1} = \sigma$)

İspat:[8]

Teorem 4.3. $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalasıdır ancak ve ancak aşağıdaki iki koşul sağlanır:

i. $inf\mathbb{T}$ noktası sağ yoğun nokta ve $sup\mathbb{T}$ noktası sol yoğun noktadır.

ii. $\mathbb{T} - \{inf\mathbb{T}, sup\mathbb{T}\}$ kümesindeki tüm noktalar ya iki taraflı yoğundur ya da iki taraflı yayılmıştır.

İspat:[8]

$\mathbb{R}, c\mathbb{Z}(c > 0), \overline{q^{\mathbb{Z}}}, Q_q$ ve $[-\varepsilon, 0] \cup \overline{q^{\mathbb{Z}}}(\varepsilon > 0)$ kümeleri düzgün zaman skalasına örnektirler. Bununla birlikte $\mathbb{T} = [a, b] \cup [c, d]$ düzgün zaman skalası değildir.

Teorem 4.4. $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalası olsun. Bu durumda

$$\mathbb{T}_k^k = \mathbb{T}^k = \mathbb{T}_k = \mathbb{T} \text{ ve } \sigma(\mathbb{T}) = \rho(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$$

olur.

İspat:[8]

Düzgün zaman skalası üzerinde tanımlı üstel fonksiyonların $\lozenge_\alpha$ türevi aşağıda verilmiştir:

Teorem 4.5. $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalası, $t, t_0 \in \mathbb{T}$ ve $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_\nu$ olsun. Bu durumda;

$$e_p^{\lozenge_\alpha}(t, t_0) = \left[\alpha p(t) + \frac{(1-\alpha)p^\rho(t)}{1+\nu(t)p^\rho(t)}\right] e_p(t, t_0),$$

$$\hat{e}_p^{\lozenge_\alpha}(t, t_0) = \left[(1-\alpha)p(t) + \frac{\alpha p^\sigma(t)}{1-\mu(t)p^\sigma(t)}\right] \hat{e}_p(t, t_0)$$

olur.

$e_p(t, t_0)$, üstel fonksiyonu $y^{\lozenge_\alpha}(t) = q(t)y(t),\ y(t_0) = 1$ $\lozenge_\alpha$ başlangıç değer probleminin tek çözümüdür. Burada

$$q(t) = \alpha p(t) + \frac{(1-\alpha)p^\rho(t)}{1+\nu(t)p^\rho(t)}$$

biçimindedir. Ancak bu durum genel olarak doğru değildir, çözüm tek olmayıp sonsuz olabilir.

İspat:[8]

Örnek 4.6. $\mathbb{T} = c\mathbb{Z},\ c > 0$ ve $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$y^{\lozenge_\alpha}(t) = 0,\ y(t_0) = 1$$

$\lozenge_\alpha$ başlangıç değer problemini ele alalım. Bu durumda;

$y_1(t) = 1$ sürekli fonksiyonu yukarıdaki başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

Bundan başka $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere $q = -\frac{1}{\alpha\mu}$ için $y_2(t) = e_q(t, t_0)$ ifadesi de aynı başlangıç değer probleminin bir çözümüdür, şöyle ki;

$t \in \mathbb{T} = c\mathbb{Z}$ için $t = cn, n \in \mathbb{Z}$ 'dir. $\sigma(t) = t + c,\ \rho(t) = t - c,\ \mu(t) = c, \nu(t) = c$ olur. Bu durumda

$$\frac{q^{\rho}}{1 + q^{\rho}\nu} = \frac{1}{(1-\alpha)c}$$

olur. Gerçekten;

$$q(t) = -\frac{1}{\alpha\mu(t)} \Rightarrow q\big(\rho(t)\big) = -\frac{1}{\alpha\mu\big(\rho(t)\big)} = -\frac{1}{\alpha t}$$

$$1 + q^{\rho}\nu = 1 + \left(-\frac{1}{\alpha t}\right)\big(t - \rho(t)\big) = 1 + \left(-\frac{1}{\alpha t}\right)c = \frac{\alpha t - c}{\alpha t}$$

$$\frac{q^{\rho}}{1 + q^{\rho}\nu} = \frac{-\frac{1}{\alpha t}}{\frac{\alpha t - c}{\alpha t}} = -\frac{1}{\alpha t - c} = \frac{1}{c - \alpha t} = \frac{1}{c\left(1 - \alpha\frac{t}{c}\right)} = \frac{1}{(1-\alpha)c}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} y^{\Diamond_\alpha}(t) &= \left[\alpha q + (1-\alpha)\frac{q^{\rho}}{1 + q^{\rho}\nu}\right] e_p(t, t_0) \\ &= \left[-\frac{\alpha}{\alpha\mu} + (1-\alpha)\frac{1}{(1-\alpha)c}\right] e_p(t, t_0) \\ &= \left[-\frac{\alpha}{\alpha c} + \frac{(1-\alpha)}{(1-\alpha)c}\right] e_p(t, t_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $q = -\frac{1}{\alpha\mu}$ için $y_2(t) = e_q(t, t_0)$ çözümdür.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi $y^{\Diamond_\alpha}(t) = q(t)y(t), \alpha \in (0,1)$ dinamik denkleminde tek çözüm elde edilememektedir. Eğer tek çözüm elde etmek istiyorsak iki sınır ya da başlangıç koşulu koymamız gerekmektedir. Bu durumu aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 4.7. $\mathbb{T} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\alpha = 0.5$ olsun. Bu durumda;

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)$$

$$f^{\Diamond_\alpha}(t) = \frac{1}{2}f^{\Delta}(t) + \frac{1}{2}f^{\nabla}(t)$$

$$2f^{\Diamond_\alpha}(t) = f^{\Delta}(t) + f^{\nabla}(t)$$

$$= y(t+1) - y(t) + y(t) - y(t-1)$$
$$= y(t+1) - y(t-1)$$

$\Diamond_\alpha$ dinamik denklemi $y^{\Diamond_\alpha}(t) = \frac{1}{2} y(t)$ olarak alalım. Böylece;

$$2y^{\Diamond_\alpha}(t) = y(t)$$
$$y(t+1) - y(t-1) = y(t)$$
$$y(t+1) = y(t) + y(t-1)$$

olur. Bu denklemi çözebilmek için $y(t-1) = a^t$ alalım.

$y(t) = a^{t+1}$ ve $y(t+1) = a^{t+2}$ olur. Yukarıdaki denklemde yerlerine koyarsak;

$$a^{t+2} - a^{t+1} - a^t = 0$$
$$a^2 a^t - a^1 a^t - a^t = 0$$
$$a^t(a^2 - a^1 - 1) = 0$$
$$a^t \neq 0, \quad a^2 - a^1 - 1 = 0$$
$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad a_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olup, bu durumda;

$$y_1(t) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} \quad , \quad y_2(t) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}$$

çözümlerini elde ederiz. Buradan genel çözüm;

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$
$$y(t) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}$$

olarak bulunur. Tek çözüme ulaşabilmek için iki sınır ya da başlangıç koşulunu yerine koymamız gerekmektedir. Koşulları $y(0) = 1$ ve $y(1) = 1$ olarak alalım. Bu durumda;

$$y(0) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{0+1} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{0+1} = 1 \quad ,$$
$$y(1) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1} + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1+1} = 1$$

iki bilinmeyenli denklem sistemini elde ederiz. Denklem sistemini çözersek;

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

olarak bilinmeyenleri elde ederiz. O halde başlangıç koşullarını sağlayan tek çözüm

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}$$

olarak bulunur. Bu çözüm Fibonacci dizisinin genel formülüdür.

Düzgün zaman skalasında çözüm bulmayı geliştirebilmek adına bize verilen kapalı aralığı istediğimiz şekilde bölmeye çalışalım. Bu durumu yeni bir tanım ile ifade etmeye çalışalım.

Tanım 4.8. $\mathbb{T}$ düzgün bir zaman skalası, I boş olmayan sınırlı bir indis kümesi olsun. $\mathbb{T}$'nin

$$\mathbb{T} = \bigcup_{i\in I} \mathbb{T}_i$$

olacak şekilde $\mathcal{D} = \{\mathbb{T}_i, i \in I\}$ parçalanışını ele alalım. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $\mathcal{D}$ 'ye $\mathbb{T}$ zaman skalasının sıralı sonlu parçalanışı denir:

i. $\forall i \in I\backslash\{\max I\}$ için $\mathbb{T}_i^* \cap \mathbb{T}_{i+1}^* = \emptyset$ ve $\min\mathbb{T}_1 = \min\mathbb{T}$, $\max\mathbb{T}_{maxI} = \max\mathbb{T}$ iken $\max\mathbb{T}_i = \min\mathbb{T}_{i+1}$;

ii. Tüm $\mathbb{T}_i, i \in I$ düzgün zaman skalası;

iii. Tüm $t \in \mathbb{T}_i^*, c$ noktaları için t noktası ya ayrık nokta ya da yoğun nokta;

iv. $\forall \varepsilon > 0$ için boş olmayan $(s_i - \varepsilon, s_i) \cap \mathbb{T}_i^*$ ya da $(s_i, s_i + \varepsilon) \cap \mathbb{T}_{i+1}^*$ kümelerinden en az biri sadece ayrık noktalardan ibaret olmak üzere

$$S = \{s_i : s_i = \mathbb{T}_i \cap \mathbb{T}_{i+1}, i = 1,2, \dots n-1\}$$

kümesi vardır.

Herhangi bir $i \in I$ için $\mathbb{T}_i \in \mathcal{D}$ ye *atomik zaman skalası* denir. Eğer $\mathcal{D} = \{\mathbb{T}\}$ ise $\mathbb{T}$ zaman skalasına *atomik zaman skalası* denir[8].

$S = \{s_i : s_i = \mathbb{T}_i \cap \mathbb{T}_{i+1}, i = 1,2, \dots n-1\}$ kümesine de $\mathcal{D}$ bölgesinde değişim noktaları kümesi denir.

$\mathbb{T}$ düzgün zaman skalasının bir $\mathcal{D}$ parçalanışı sonlu ya da sonsuz olabilir. Biz çalışmamızı sonlu $\mathcal{D}$ parçalanışları ile sınırlandıracağız. Sonsuz parçalanış durumunda ise Tanım 4.8. de (i) şıkkını ‘‘ $\forall i \in I\backslash\{\max I\}$ için $\mathbb{T}_i^* \cap \mathbb{T}_{i+1}^* = \emptyset$ ve $\max\mathbb{T}_i = \min\mathbb{T}_{i+1}$ oluyorsa’’ olarak değiştirmemiz gerekir.

Uyarı 4.9. $\mathbb{T}$ zaman skalasının parçalanışından seçilen herhangi atomik zaman skalası $\mathbb{T}_i$'nin aşikar olmayan parçalanışı yoktur. Yani atomik $\mathbb{T}_i$ zaman skalalarının parçalanışları sadece $\mathcal{D} = \mathbb{T}_i$ şeklindedir[8].

Uyarı 4.10. Bir düzgün zaman skalasının atomik zaman skalaları cinsinden tek bir parçalanışı vardır çünkü herhangi iki parçalanışıdır[8].

Örnek 4.11. Atomik zaman skalası için aşağıdaki şıkları inceleyelim:

i. $\mathbb{T} = \mathbb{R}\_ \cup \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ bir atomik zaman skasıdır. Gerçekten $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ için $\mathbb{T}_1 \coloneqq \mathbb{R}\_ \cup \{0\}$ ve $\mathbb{T}_2 \coloneqq \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ alırsak sonlu atomik zaman skalası oluşur.

ii. $q \in \mathbb{Z}, q > 1$ olsun. Bu durumda $\mathbb{T} = Q_q = \{-q^k, 0, q^k, k \in \mathbb{Z}\}$ bir atomik zaman skasıdır. Gerçekten $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cup \mathbb{T}_2$ için $\mathbb{T}_1 \coloneqq \mathbb{R}\_ \cup \{0\}$ ve $\mathbb{T}_2 \coloneqq \overline{q^{\mathbb{Z}}}$ alırsak sonlu atomik zaman skalası oluşur.

iii. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \coloneqq \mathbb{Z}$ olduğundan $\mathbb{T}$ bir atomik zaman skasıdır.

Herhangi bir düzgün zaman skalası sonlu ya da sonsuz şekilde ayrıştırılabilir. Bizim şimdiki çalışmamız sonlu ayrıştırılan düzgün zaman skalası üzerinedir. Sonsuz ayrıştırılan düzgün zaman skalası için aşağıdaki örneği verebiliriz:

Örnek 4.12. $\mathbb{T}_{2n} = [2n, 2n+1]$ ve
$\mathbb{T}_{2n+1} = \left\{2n + 1 + 0.5p, 2n + 2 - 0.5p, p \in \overline{q^{\mathbb{Z} \cup \{0\}}}\right\}$ için

$$\mathbb{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{T}_{2n} \cup \mathbb{T}_{2n+1})$$

olmak üzere $\mathbb{T}$ düzgün zaman skalası sonsuz ayrıştırılabilirdir.

4.2 Diamond-α Dinamik Denklemler

Bu bölümde $\lozenge_\alpha$ ile üretilmiş lineer denklemlerden bahsedeceğiz. Burada $\lozenge_\alpha$ dinamik denklem Δ ve ∇ dinamik denklem şeklinde yazılarak birinci mertebeden lineer $\lozenge_\alpha$ dinamik denklem oluşturulur.

Tanım 4.13. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $I \subseteq \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda $F: I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere I üzerinde birinci mertebeden $\lozenge_\alpha$ dinamik denklemin kapalı formülü

$$F\left(t, y(t), y^{\lozenge_\alpha}(t)\right) = 0$$

şeklindedir. F fonksiyonu $y(t)$ ve $y^{\lozenge_\alpha}(t)$ ile lineer bir fonksiyon ise $\lozenge_\alpha$ dinamik denklemine lineerdir denir.

Lineer $\lozenge_\alpha$ dinamik denklemi, f ve p düzgün zaman skalası üzerinde birer fonksiyon olmak üzere $y^{\lozenge_\alpha}(t) = p(t)y(t) + f(t)$ şeklindedir. $\lozenge_\alpha$ türev tanımından

$$f^{\lozenge_\alpha}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)$$

olduğunu biliyoruz. Düzgün zaman skalasında $f^{\Delta}(t) = f^{\nabla}\big(\sigma(t)\big)$ ve $f^{\nabla}(t) = f^{\Delta}\big(\rho(t)\big)$ olduğu için $\lozenge_\alpha$ türev

$$\begin{aligned} f^{\lozenge_\alpha}(t) &= \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) \\ &= \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\Delta\rho}(t) \\ &= \alpha f^{\nabla\sigma}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\Delta\rho}(t) = p(t)y(t) + f(t)$$
$$\alpha f^{\nabla\sigma}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t) = p(t)y(t) + f(t)$$

yazılarak birinci mertebeden $\lozenge_\alpha$ dinamik denklemini sadece Δ dinamik denklemi ya da sadece ∇ dinamik denklemi biçiminde yazarız[8].

Tanım 4.14. $t \in \mathbb{T}_k^k$, $L_p^{\lozenge_\alpha}: C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R}) \longrightarrow C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ olmak üzere $L_p^{\lozenge_\alpha}$operatörü

$$L_p^{\lozenge_\alpha} y(t) = y^{\lozenge_\alpha}(t) - p(t)y(t)$$

şeklindedir. $\forall t \in \mathbb{T}_k^k$ için $L_p^{\lozenge_\alpha} y(t) = f(t)$ ifadesini sağlayan $y \in C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ fonksiyonuna $L_p^{\lozenge_\alpha} y = f$ denkleminin çözümüdür denir[8].

Sonuç 4.15. $L_p^{\lozenge_\alpha}$operatörü $C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ üzerinde lineerdir:
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $y_1, y_2 \in C_{rl}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ için

$$L_p^{\lozenge_\alpha}(ay_1+by_2)=aL_p^{\lozenge_\alpha}y_1+bL_p^{\lozenge_\alpha}y_2$$

ifadesi sağlanır[8].

İspat: $\forall a,b\in\mathbb{R}$ ve $y_1,y_2\in C_{rl}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
L_p^{\lozenge_\alpha}(ay_1+by_2)(t) &= \big(ay_1(t)+by_2(t)\big)^{\lozenge_\alpha}-p(t)\big(ay_1(t)+by_2(t)\big)\\
&= ay_1{}^{\lozenge_\alpha}(t)+by_2{}^{\lozenge_\alpha}(t)-p(t)ay_1(t)-p(t)by_2(t)\\
&= ay_1{}^{\lozenge_\alpha}(t)-ap(t)y_1(t)+by_2{}^{\lozenge_\alpha}(t)-bp(t)y_2(t)\\
&= aL_p^{\lozenge_\alpha}y_1+bL_p^{\lozenge_\alpha}y_2
\end{aligned}$$

Sonuç 4.16. y_1 ve y_2 , $L_p^{\lozenge_\alpha}y=0$ denkleminin çözümleri olsunlar. Bu durumda y_1 ve y_2 nin herhangi bir lineer kombinasyonu da $L_p^{\lozenge_\alpha}y=0$ denkleminin çözümüdür. $\forall a,b\in\mathbb{R}$ için $L_p^{\lozenge_\alpha}y_1=0$ ve $L_p^{\lozenge_\alpha}y_2=0$ ise $L_p^{\lozenge_\alpha}(ay_1+by_2)=0$ olur[8].

Tanım 4.17. $L_p^{\lozenge_\alpha}y=f$ denklemi, $f(t)\equiv 0$ ise yani $L_p^{\lozenge_\alpha}y=0$ ise homojen denklem, diğer durumlarda yani $f(t)\not\equiv 0$ durumunda homojen olmayan denklem olarak adlandırılır[8].

Sonuç 4.18. Homojen bir denklemin çözümü ile homojen olmayan bir denklemin çözümünün toplamı homojen olmayan bir denklemin çözümüdür.

İspat: $\forall w,v\in C_{rl}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ için $L_p^{\lozenge_\alpha}w=0$ ve $L_p^{\lozenge_\alpha}v=f$ olsun. Bu durumda

$$L_p^{\lozenge_\alpha}(w+v)=L_p^{\lozenge_\alpha}w+L_p^{\lozenge_\alpha}v=0+f=f$$

olur. Bu da homojen olmayan bir denklemin çözümü olduğunu gösterir[8].

Teorem 4.19. $\mathbb{T}$ bir atomik zaman skalası, $t_0\in\mathbb{T}^*, y_0$ bir sabit, $p\in\mathcal{R}\cap\mathcal{R}_\nu$ olsun. Bu durumda iki sınır değer problemi

$$t\in\mathbb{T}^*,\ \alpha\in[0,1] \text{ için} \qquad L_p^{\lozenge_\alpha}y=0\,, \qquad (4.1.)$$
$$y(t_0)=y_0\quad,\quad \alpha(1-\alpha)y\big(\rho(t_0)\big)=\alpha(1-\alpha)y_0$$

ve

$s \in \mathbb{T}^*$için $\quad \alpha\mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) + \big(1 - p^{\sigma}(s)\mu(s)\big)y^{\Delta}(s) - p^{\sigma}(s)y(s) = 0$

$$y(\sigma(s_0)) = y_0 \quad , \quad \alpha(1-\alpha)y(s_0) = \alpha(1-\alpha)y_0 \qquad (4.2.)$$

çakışır[8].

İspat: Burada $\alpha = 0, \alpha = 1$ ve $\alpha \in (0,1)$ için üç bölümde ispat yapılacaktır.

i. $\alpha = 0$ olsun. Bu durumda (4.1) başlangıç değer problemi

$$y^{\nabla}(t) = p(t)y(t) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

problemine, (4.2) problemi

$$\big(1 - p^{\sigma}(s)\mu(s)\big)y^{\Delta}(s) - p^{\sigma}(s)y(s) = 0 \quad , \quad y(\sigma(s_0)) = y_0$$

problemine dönüşür. $\sigma(s) = t$ alınırsa $s = \rho(t)$ olup

$$\Big(1 - p(t)\mu\big(\rho(t)\big)\Big)y^{\Delta}\big(\rho(t)\big) - p(t)y\big(\rho(t)\big) = 0$$

yazılır. Düzgün zaman skalasında $y^{\nabla}(t) = y^{\Delta}(\rho(t))$ ve $\mu(\rho(t)) = \nu(t)$ olur. Bu ifadeleri yukarıdaki denklemde yerlerine yazarsak;

$$y^{\nabla}(t) = p(t)y(t) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

formunu elde ederiz.

ii. $\alpha = 1$ alalım. Bu durumda (4.1) problemi

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t) \quad , \quad y(t_0) = y_0$$

problemine dönüşür. (4.2) problemini $\mu(t) = 0$ ve $\mu(t) \neq 0$ durumlarına göre inceleyelim. $\mu(t) = 0$ alınırsa $\sigma(s) = s$ olacağı için (4.2) dinamik denklemi $y^{\Delta}(s) = p(s)y(s)$ olur. $\mu(t) \neq 0$ için $\mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) = y^{\Delta}(\sigma(s)) - y^{\Delta}(s)$ olur ve yerine yazarsak

$$y^{\Delta}\big(\sigma(s)\big) - p\big(\sigma(s)\big)\Big(\mu(s)y^{\Delta}(s) - y(s)\Big) = 0$$

olur. Burada $t = \sigma(s)$ alınırsa $y^{\Delta}(t) = p(t)y(t)$ elde edilir. Başlangıç koşulu için $y(t_0) = \ y(\sigma(s_0)) = y_0$ olur.

iii. $\alpha \in (0,1)$ ve $s = \rho(t)$ olsun. $t = \sigma(s)$ olur ve $\mathbb{T}$ düzgün zaman skalası olduğundan $\lozenge_{\alpha}$ dinamik denklemini

$$f^{\lozenge_{\alpha}}(t) = \alpha f^{\Delta}(t) + (1-\alpha)f^{\Delta\rho}(t) = \alpha f^{\nabla\sigma}(t) + (1-\alpha)f^{\nabla}(t)$$

şeklinde yazabiliriz.

$\mu(t) = 0$ için $\nu(t) = 0$ olur ve (4.2) dinamik denklemi $y^{\Delta}(s) = p(s)y(s)$ şekline dönüşür. Bu durumda $\forall\alpha \in (0,1)$ için $y^{\Delta}(s) = y^{\nabla}(s) = y^{\lozenge_\alpha}(s)$ biçimindedir. Son olarak $\mu(t) \neq 0$ için $\nu(t) \neq 0$ olur ve $\forall s \in \mathbb{T}$ noktalarını yayılmış nokta olarak seçelim. Böylece (4.2) başlangıç değer probleminin dinamik denklemi

$$\mu(s)y^{\Delta\Delta}(s) = y^{\Delta}(\sigma(s)) - y^{\Delta}(s) = y^{\Delta}(t) - y^{\Delta}\big(\rho(t)\big) = y^{\Delta}(t) - y^{\nabla}(t)$$

olur ve yukarıdaki denklemler ile sadeleştirirsek,

$$\alpha y^{\Delta}(t) + (1-\alpha)y^{\nabla}(t) - p(t)\Big(\nu(t)y^{\nabla}(t) - y\big(\rho(t)\big)\Big) = 0$$

şeklini alır. Düzenlersek $y^{\lozenge_\alpha}(t) = p(t)y(t)$ ifadesini buluruz.

Teorem 4.20. $\mathbb{T}$ bir atomik zaman skalası, $t_0 \in \mathbb{T}^*, y_0$ bir sabit, $p \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}_\nu$ olsun. Bu durumda iki sınır değer problemi (4.1) ve (4.2) $\alpha \in (0,1)$ için tek çözüme sahiptirler ve bu çözümler aynıdır[8].

İspat: $\alpha = 0$ için (4.1) ve (4.2) problemleri

$$y^{\nabla}(t) = p(t)y(t)\,, y(t_0) = y_0$$

∇ başlangıç değer problemine dönüşür ve bu denklemin çözümü tektir.

$\alpha = 1$ için benzer şekilde (4.1) ve (4.2) problemleri

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y(t)\,, y(t_0) = y_0$$

Δ başlangıç değer problemine dönüşür ve bu denklemin çözümü tektir.

$\alpha \in (0,1)$ alalım. Bu durumda $\nu(t) = 0$ ve $\nu(t) \neq 0$ şeklinde iki farklı yoldan gideceğiz.

Eğer $\nu(t) = 0$ ise atomik zaman skalasında $\mu(t) = 0$ ve $\sigma(t) = t = \rho(t)$ olup dinamik denklem $y^{\Delta}(t) = y^{\nabla}(t) = p(t)y(t)\,, y(t_0) = y_0$ olur. Bu da $\alpha = 0$ ve ya $\alpha = 1$ durumları demektir.

$\nu(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\mu(t) \neq 0$ olur. (4.2) problemi

$$\alpha[y^{\Delta\sigma}(s) - y^{\Delta}(s)] + y^{\Delta}(s) - p^{\sigma}(s)y^{\sigma}(s) = 0$$

$$\alpha y^{\Delta}(t) + (1-\alpha)y^{\Delta}(\rho(t)) - p(t)y(t) = 0$$

$$\alpha y^{\Delta}(t) + (1-\alpha)y^{\nabla}(t) - p(t)y(t) = 0$$

$$y^{\lozenge_\alpha}(t) - p(t)y(t) = 0$$

$$L_p^{\lozenge_\alpha}y = 0$$

olup (4.1) dinamik denklemini elde ederiz. Bu durumda (4.2) dinamik denklemini regresif formda

$$y^{\Delta\Delta}(s)+\frac{1-p^{\sigma}(s)\mu(s)}{\alpha\mu(s)}y^{\Delta}(s)-\frac{p^{\sigma}(s)}{\alpha\mu(s)}y(s)=0$$

şeklinde yazabiliriz. O halde çözüm tektir.

Burada $\tilde{p}(s)=\frac{1-p^{\sigma}(s)\mu(s)}{\alpha\mu(s)}$ ve $\tilde{q}(s)=-\frac{p^{\sigma}(s)}{\alpha\mu(s)}$ alınırsa $\forall\alpha\in(0,1)$ için

$$1-\mu(s)\tilde{p}(s)+\mu^{2}(s)\tilde{q}(s)=1-\frac{1}{\alpha}\neq 0$$

çözümünü elde ederiz.

KAYNAKÇA DİZİNİ

[1] Agarwal, R. P. and Bohner, M., Basic calculus on time scales and some of its applications, Result Math. 35, 1999.

[2] Agarwal, R. P., Bohner M. and Peterson, A., Inequalities on time scales: a survey, Math. Inequal. Appl. 4, 2001.

[3] Aulbach B., Analysis auf zeitmengen, Lecture notes, University of Augsburg, 1990.

[4] Aulbach, B. and Hilger, S., Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale, Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems, Akademie Verlag, Berlin, 1990.

[5] Bohner, M. and Peterson, A., Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications, Birkauser, 2001.

[6] Bohner, M. And Petersen, A., Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkauser, Boston, 2003.

[7] Davis, J.M., Fadag M., Henderson, J. and Sheng, Q., An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their applications, Nonlinear Anal. Real World Appl., 7(3), 395 413, 2006.

[8] Dorota Mozyrska and Delfim F.M.Torres, A Sutudy Of Diamond Alpha Dynamic Equations On Regular Time Scales, Preliminaries 2, 2009.

[9] Ferreira, R.A.C., Sidi Ammi, M.R. and Torres, D.F.M., Diamond Jensen's inequality on time scales, J. Inequal Appl., Art. ID 576876, pp.13, 2008.

[10] Guseinov, G.Sh. and Kaymakcalan B.,Basics of Riemann Δ and ∇ integration on time scales, J. Difference Equ. Appl. 8, 2002.

[11] Hilger S., Ein Maβkettenkalkül mit Anvendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universitat Würzburg, 1988.

[12] Hilger S., Analysis on measure chains - a uni_ed approach to continuous and discrete calculus, Results Math., 1990.

[13] Kac, V. and Cheung, P., Quantum Calculus, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002.

[14] Kaymakcalan, B. Lakshmikantham, V. and Sivasundaram, S., 1996, Dynamical Systems on Measure Chains, Kluwer Akademic Publishers, Dordrecht.

[15] Malinowska, A.B. and Torres, D.F.M., The diamond alpha Riemann integral and mean value theorems on time scales, arXiv: 0804.4420v1 [math.CA], 2008.

[16] Nuriye ATASEVER, On Diamond Alpha Dynamic Equations and Inequalities, Georgia Southern University, 2011.

[17] Rogers Jr., J. W. and Sheng, Qin., Notes on the diamond dynamic derivative on time scales, J. Math. Anal. Appl., 326(1), 228 241, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Afyonkarahisar'da dünyaya geldim. İlkokul öğretimimi Kazım Özer İlkokulunda, ortaokul öğretimimi Hacı Ahmet Özsoy Ortaokulunda tamamladım. Sonrasında Afyon Anadolu Öğretmen Lisesinde eğitim hayatıma devam ettim ve Ondokuz Mayıs Üniversitesi Orta Öğretim Matematik Öğretrmenliğinden 2009 yılında mezun oldum. 2011 yılında Kara Kuvvetleri Komutanlığı, Maltepe Askeri Lisesinde matematik öğretmeni olarak göreve başladım ve halen burda çalışmaktayım. Evli ve bir çocuk babasıyım.