YAŞAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ OLİMPİYAT PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Matematik Bölümü

Abdulsamet BAŞDAŞ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rafail ALİZADE

Bornova-İZMİR
2016

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Rafail ALİZADE (Danışman)

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER

Bu tezi okuduğumu ve kapsam ve kalite bakımından yüksek lisans tezi olarak uygunluğunu onaylarım.

Doç.. Dr. Engin BÜYÜKAŞIK

Prof. Dr. Cüneyt Güzeliş

Enstitü Müdürü

ABSTRACT

EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ OLİMPİYAT PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Abdulsamet BAŞDAŞ
MSc, Department of Mathemetics
Supervisor: Prof. Dr. Rafail ALİZADE
May 2016, 62 pages

Keywords: Chebyshev İnequalitiy, Hölder İnequality, Cauchy-Schwarz İnequality, The Rearrangement İnequality, Geometric Mean, Arithmetic Mean.

ÖZET

EŞİTSİZLİKLERLE İLGİLİ OLİMPİYAT PROBLEMLERİ ÜZERİNE

Abdulsamet BAŞDAŞ
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rafail ALİZADE
Mayıs 2016, 62 sayfa

Bu tez esas olarak altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezimiz ile ilgili anlaşılırlığı sağlamak için ön bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, Ortalama ile ilgili eşitsizlikler ve kendi aralarındaki ilişkiden bahsettik. Ayrıca, ortalamalarla ilgili Uluslararası Olimpiyat soruları yazıp, her soruya özgün bir veya birden fazla çözüm yolu getirdik. Üçüncü bölümde Cauchy-Schwarz eşitsizliği, Dördüncü bölümde Hölder eşitsizliği, Beşinci bölümde Chebyshev eşitsizliğini ve alt başlık olarak da Yeniden Düzenleme eşitsizliğini, Altıncı bölümde Bazı Geometrik eşitsizliklere ve bunlarla ilgili Ulusal ve Uluslararası olimpiyat sorularına özgün çözümler yapıldı.

Anahtar sözcükler: Eşitsizlikler, Ortalamalar, Cauchy-Schwarz, Hölder, Chebyshev, Geometrik eşitsizlikler, Yeniden Düzenleme

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman, her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan, değerli hocam Prof. Dr. Rafail ALİZADE'ye çok teşekkür ederim. Ayrıca bu süreçte bana yardımcı olan eşime, aileme ve Yaşar Üniversitesi Matematik bölümü öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Abdulsamet BAŞDAŞ

İzmir, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Eşitsizliklerle İlgili Olimpiyat Problemleri Üzerine" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

31.05.2016

Abdulsamet BAŞDAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMALAR

Kısaltma	Açıklama
JBMO	The Junior Balkan Mathematical Olympiad
IMO	International Mathematical Olympiad
APMO	Asian Pacific Mathematical Olympiad
AGO	Aritmetik Geometrik Ortalama Eşitsizliği
CSE	Cauchy-Schwarz Eşitsizliği
KO	Karesel Ortalama
HO	Harmonik Ortalama
TST	Selection Test For IMO
KMO	Korean Mathematical Olympiad
VMEO	Vietnam Mathematical Olympiad
USAMO	United States of America Mathematical Olympiad

1 GİRİŞ

1959 senesinden beri Lise ve Ortaöğretim öğrencileri için yapılmakta olan Uluslararası Matematik Olimpiyatlarına Türkiye'den katılan öğrencilerin başarıları özellikle son 15-20 senede önemli şekilde artarak gelişmektedir. Türkiye'de Uluslararası Matematik Olimpiyatlarına katılacak öğrencileri seçmeye yönelik üç aşamada yapılan Ulusal Matematik Olimpiyatları ve seçilen öğrencilere verilen eğitim TÜBİTAK tarafından yürütülmektedir. Tüm aşamalarda önerilen problemler dört ana daldan oluşmaktadır: Analiz, Sayılar Teorisi, Sonlu Matematik ve Geometridir. Bu tezde Analiz problemlerinin önemli konularından biri olan Eşitsizlikler ele alınmıştır. Olimpiyat problemlerinde sık kullanılan ve soruların çözümünde faydalı olan eşitsizlikler 6 Bölümde incelenmiştir.

Birinci bölümde, konuyla ile ilgili anlaşılırlığı sağlamak için ön bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde, en çok rastlanan eşitsizliklerden olan değişik ortalamalarla ilgili eşitsizlikler incelenmiştir. Aritmetik, geometrik, harmonik, karesel ve kuvvet ortalamaları ve bunların aralarındaki eşitsizlikler ele alınmıştır. Ayrıca, ortalamalarla ilgili Uluslararası Olimpiyat soruları alınarak, her soruya özgün bir veya birden fazla çözüm yolu getirilmiştir. Üçüncü bölümde Cauchy-Schwarz eşitsizliği, dördüncü bölümde Hölder eşitsizliği, beşinci bölümde Yeniden Düzenleme eşitsizliği ve bunun bir uygulaması olarak Chebyshev eşitsizliği, altıncı bölümde Bazı Geometrik eşitsizlikleri incelenmiş ve bunlarla ilgili Ulusal ve Uluslararası olimpiyat sorularına özgün çözümler yapılmıştır.

Matematik Olimpiyatlarına hazırlanan öğrencilerin, bu öğrenciler eğitim veren öğretmenlerin, eğitim fakültelerinin matematik eğitimi bölümlerindeki üniversite öğrencilerinin ve Matematik olimpiyatlarıyla ilgilenen herkesin bu tezden yararlanabileceğini düşünmekteyiz.

2 ORTALAMALAR İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

2.1 ARİTMETİK, GEOMETRİK, HARMONİK, KARESEL ORTALAMALAR (A.G.O)

Tanım 2.1.1 $a_1, a_2, a_3 ,,, a_n \in R^+$ için

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

ifadesine Aritmetik Ortalama (A.O) denir.

Tanım 2.1.2 $a_1, a_2, a_3 ,,, a_n \in R^+$ için

$$\sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \dots . a_n}$$

ifadesine Geometrik Ortalama (G.O) denir.

Tanım 2.1.3 $a_1, a_2, a_3 ,,, a_n \in R^+$ için

$$\left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

ifadesine Harmonik Ortalama (H.O) denir.

Tanım 2.1.4 $a_1, a_2, a_3 ,,, a_n \in R^+$ için

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + + + a_n^2}{n}}$$

ifadesine Karesel Ortalama (K.O) denir.

Yukarıda belirttiğimiz eşitsizlikler arasında şöyle bir ilişki vardır:

Karesel Ortalama ≥ Aritmetik Ortalama ≥ Geometrik Ortalama ≥ Harmonik Ortalama

K.O ≥ A.O ≥ G.O ≥ H.O dır ve eşitlik sadece $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ durumunda gerçekleşmektedir.

Teorem 2.1.1 Power Mean Eşitsizliği

$a_1, a_2, a_3 ,,, a_n > 0$

$$M(a_1, a_2, a_3,, a_n)(0) = \sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 \dots a_n}$$

$$M(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)(p) = \left(\frac{a_1^p + a_2^p + a_3^p + \dots + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $(p \neq 0)$

Bu eşitsizliğe Power Mean Eşitsizliği denir.

Bu eşitsizlik A.O, G.O, H.O ve K.O' nın genel bir halidir.

Yukarıdaki eşitsizlikten;

$p = 1$ için Aritmetik Ortalama

$p = 2$ için Karesel Ortalama

$p = 0$ için Geometrik Ortalama

$p = -1$ için Harmonik Ortalama elde edilir.

Yani $M(1)$=A.O

$M(2)$= K.O

$M(-1)$= H.O

$M(0)$= G.O elde edilir.

Ayrıca $2 > 1 > 0 > -1$ için

$M(2) > M(1) > M(0) > M(-1)$ eşitsizliği vardır. Buradan da

K.O $\geq$ A.O $\geq$ G.O $\geq$ H.O yazılabilir. (eşitlik durumunu daha önce yazmıştık.)

Örnek 1: (IMO 2001/2)

$a, b, c \in R^+$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}, \qquad y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}, \qquad z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

şeklinde alalım. Ve buradaki $x, y, z \in (0, 1)$ aralığında olsun. Biz şimdi

$x + y + z \geq 1$ olduğunu gösterelim. Önce her tarafın karesini alıp

düzenleyelim.

$$\frac{a^2}{8bc} = \frac{x^2}{1-x^2}, \qquad \frac{b^2}{8ac} = \frac{y^2}{1-y^2}, \qquad \frac{c^2}{8ab} = \frac{z^2}{1-z^2}$$

Bunları taraf tarafa çarpalım.

$$\frac{1}{512} = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{1-y^2}\right)\cdot\left(\frac{z^2}{1-z^2}\right)$$

$x + y + z \geq 1,\ 0 < x, y, z < 1$ aralığında ise

$(1-x^2).(1-y^2).(1-z^2) = 512(xyz)^2$ olur.

Ancak $1 > x + y + z$ için A.O – G.O uygulayalım.

$(1-x^2).(1-y^2).(1-z^2) >$

$((x+y+z)^2 - x^2)\ ((x+y+z)^2 - x^2)\ ((x+y+z)^2 - y^2)((x+y+z)^2 - z^2)$

$= (x+x+y+z)(y+z)$

$\Rightarrow (x+y+y+z)(x+z)(x+y+z+z)(x+y) \geq$

$\geq 4(x^2yz)^{\frac{1}{4}}.2(yz)^{\frac{1}{2}}.4.(y^2zx)^{\frac{1}{4}}.2(xz)^{\frac{1}{2}}.4(z^2xy)^{\frac{1}{4}}.2(xy)^{\frac{1}{2}} = 512.(xyz)^2$

buluruz. Bu da bir çelişkidir. İspat biter.

Örnek 2: (Korea 1998)

$x, y, z \in R^+, \quad x + y + z = xyz$ için

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Değişken değiştirelim.

$$a = \frac{1}{x}, \qquad b = \frac{1}{y}, \qquad c = \frac{1}{z} \qquad a + b + c = abc \ olsun.$$

Ve buradan $xy + yz + xz = 1$ dir.

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+xy+yz+xz}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+xy+yz+xz}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+xy+yz+xz}} \leq \frac{3}{2}$$

olduğunu göstermeliyiz. Bu şekilde ayırdıktan sonra A.0- G.O eşitsizliğini uygulayalım.

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} = \frac{x\sqrt{(x+y)(x+z)}}{(x+y)(x+z)} \leq \frac{1}{2}\frac{x[(x+y)+(x+z)]}{(x+y)(x+z)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x+z} + \frac{x}{x+z}\right)$$

$\Rightarrow$ Aynı şeyi y ve z için de yaparsak;

$$\frac{y}{\sqrt{(y+z)(x+y)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z} + \frac{y}{x+y}\right),$$

$$\frac{z}{\sqrt{(x+z)(z+y)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x+z} + \frac{z}{z+y}\right)$$

Örnek 3:

$a, b, c, d \in R^+$

$(a+b+c+d)^4 \geq 16.(abc+bcd+cda+dab)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

A.G.O uygulayalım.

$$(a+b+c+d)^4 \geq 16.(abc+bcd+cda+dab)$$

$$\Rightarrow 16ab(c+d) + 16cd\,(a+b) = 16\,(abc+bcd+cda+dab)$$

$$\geq 4(a+b)^2.(c+d)+4(c+d)^2.(a+b)$$

$$= 4(a+b+c+d)(a+b)(c+d)$$

$$\leq (a+b+c+d)^3$$

$a=b=c=d$ için sağlar.

Örnek 4: (Pham Kim Hung)

a, b, c bir üçgenin kenar uzunlukları,

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}}+\frac{1}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{1}{\sqrt{c+a-b}} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$x=\sqrt{b+c-a}, \quad y=\sqrt{c+a-b}, \quad z=\sqrt{a+b-c}$

$x^2+y^2+z^2=3$ olsun.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{36}{9+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$$

$m=xy, \ n=yz, \ p=xz$ olsun.

$$(m+n+p)(m^2+n^2+p^2+9) \geq 36\sqrt{mnp}$$

A.G.O dan $\qquad m+n+p \geq 3.\sqrt[3]{mnp},$

$$m^2+n^2+p^2+9 \geq 12\sqrt[6]{mnp}$$

Örnek 5: (IMO Shortlist 1998)

$x, y, z \in R^+, \quad xyz=1 \quad$ ise

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}$$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

A.G.O ile çözelim. Bunun için biraz düzenleme yapalım.

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq\frac{3x}{4}$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1}{4}\sum_{cyc}(1+x)\geq\sum_{cyc}\frac{3x}{4}$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\geq\frac{1}{4}\sum_{cyc}(2x-1)\geq\frac{3}{4}$$

$x=y=z=1$ için sağlar.

Örnek 6: (APMO 1998)

$a, b, c \in R^+$

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right)\geq 2+\frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geq\frac{x+y+z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani, A.G.O uygulayalım.

$$3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=\left(\frac{2x}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{2y}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{2z}{x}+\frac{x}{y}\right)\geq$$

$$\geq\frac{3x}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3y}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3z}{\sqrt[3]{xyz}}$$

Örnek 7: (Bulgaria TST 2003)

$a, b, c \in R^+$

$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani, A.G.O uygulayalım.

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{a}{2b} + \frac{b}{2c} + \frac{c}{2a} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{1+b^2} \geq \sum_{cyc} a - \frac{1}{2} \sum_{cyc} ab \geq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 3\left(\sum ab\right) \leq \left(\sum a\right)^2 = 9$$

$a = b = c = 1$ için sağlar.

Örnek 8:

$a, b, c \in R^+$

$\frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani, A.G.O uygulayalım.

$$\frac{a^2}{a+2b^2}=a-\frac{2ab^2}{a+2b^2}\geq a-\frac{2ab^2}{3\sqrt[3]{ab^4}}=a-\frac{2(ab)^{2/3}}{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2}{a+2b^2}\geq \sum_{cyc}a-\frac{2}{3}\sum_{cyc}(ab)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow (ab)^{2/3}+(bc)^{2/3}+(ca)^{2/3}\leq 3$$

A.G.O uygularsak

$$3\sum_{cyc}a\geq 2\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}ab=\sum_{cyc}(a+b+ab)\geq 3\sum_{cyc}(ab)^{2/3}$$

Örnek 9: (KMO Winter Program Test 2001)

a, b, c > 0 için,

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a).(b^2a+bc^2+ca^2)}\geq$$
$$\geq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Köklü sayıların içlerini $a.b.c$ 'ye bölelim.

$$\sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)}\geq abc+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$$

şeklinde yazdıktan sonra, şimdide değişken değiştirme yapalım.

$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$ ve $x.y.z=1$ olsun.

$$\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+xz)}\geq 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$$

$x.y.z = 1$ olduğu için eşitlik durumu vardır.

$$\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)=\left(\frac{x+z}{z}\right)\left(\frac{x+y}{x}\right)\left(\frac{y+z}{y}\right)=(x+y)(x+z)(y+z)+1$$

$$\begin{aligned}(x+y+z)(xy+yz+xz) &= (x+y)(y+z)(x+z)+xyz\\ &= (x+y)(y+z)(x+z)+1\end{aligned}$$

$p=\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(x+z)}$ olsun. $\sqrt{p^3+1}\geq 1+p$ dir.

Burada A.O- G.O uygularsak,

$p\geq\sqrt[3]{2.\sqrt{xy}.2\sqrt{yz}.2\sqrt{xz}}=2$ dir

Öyleyse $(p^3+1)-(1+p)^2=p.(p+1).(p-2)\geq 0$ dir.

Örnek 10: (Pham Kim Hung)

$\mathrm{a,b,c}\ \in \mathrm{R}^+$

$a^2+b^2+c^2=3$ veriliyor.

$$\frac{1}{a^3+2}+\frac{1}{b^3+2}+\frac{1}{c^3+2}\geq 1$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani, A.G.O 'dan çözelim.

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3+2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^3+1+1}\geq\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sum_{cyc}\frac{a^3}{3a}=1$$

şeklinde soruda verilen birinci terim için göstermiş olduk. Aynı durum diğer iki terim için de geçerlidir.

Örnek 11: (Pham Kim Hung)

a, b, c, negatif olmayan Reel sayılar.

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2}+\frac{1+bc}{1+d^2c^2}+\frac{1+cd}{1+d^2a^2}+\frac{1+ad}{1+b^2a^2}\geq 4$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani, A.G.O uygulayalım.

Önce soruda bize verilen ifadenin ilk terimini kullanışlı hale getirelim.

$$\sum_{cyc}\frac{1+ab}{1+b^2c^2}\geq 4+\sum_{cyc}ab-\frac{1}{2}\sum_{cyc}bc(1+ab)=4+\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}ab^2c\right)$$

$$\mathrm{ab+bc+cd+da\geq ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b}$$

$xy+yz+zt+tx\leq\frac{1}{4}(x+y+z+t)^2$ eşitsizliğini bu soru

için kullanırsak,

$$(ab+bc+cd+da)^2\geq 4.(\mathrm{ab^2c+bc^2d+cd^2a+da^2b})$$

$$16=(a+b+c+d)^2\geq 4.(ab+bc+cd+da)$$

ayrıca, a=b=c=d=1 veya a=c=0 veya b=d=0 için de sağlanır.

Örnek 12:

$x^5+y^5+z^5=3\ ,x,y,z\in R^+$

$\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^4}{z^3}+\frac{z^4}{x^3}\geq 3$, olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$(x^5+y^5+z^5)^2=x^{10}+2x^5y^5+y^{10}+2y^5z^5+z^{10}+2z^5x^5=9$$

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani, A.G.O uygulayalım.

$$10.\frac{x^4}{y^3} + 6x^5y^5 + 3.x^{10} \geq 19.x^{\frac{100}{19}}$$

$$10.\left(\frac{x^4}{y^3} + \frac{y^4}{z^3} + \frac{z^4}{x^3}\right) + 3.(x^5 + y^5 + z^5)^2 \geq 19.\left(x^{\frac{100}{19}} + y^{\frac{100}{19}} + z^{\frac{100}{19}}\right)$$

$$x^{\frac{100}{19}} + y^{\frac{100}{19}} + z^{\frac{100}{19}} \geq x^5 + y^5 + z^5$$

$$3 + 19.\sum_{cyc} x^{\frac{100}{19}} = \sum_{cyc}(1 + 19.x^{\frac{100}{19}}) \geq 20\sum_{cyc} x^5$$

Örnek 13:

a, b, c negatif olmayan reel sayılar.

$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq 2$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2) \geq \sum_{cyc} a^3(b + c) = \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 2\sum_{cyc} a^2b^2$$

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani A.G.O 'dan yapalım.

$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4$

$2(ab + bc + ca).(a^2 + b^2 + c^2) \leq 4$ ise

$(ab + bc + ca).(a^2 + b^2 + c^2) \leq 2$ dir.

Bu ise $a = b = 1$, $c = 0$ için sağlanır.

Örnek 14: (Belarus 2010)

p, r, s Pozitif Reel sayılar olmak üzere

$\frac{p^2}{p + r} + \frac{r^2}{r + s} \geq \frac{3p + 2r - s}{4}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

$$\frac{p^2}{p+r}+\frac{p+r}{4}\geq p \quad \text{ve}$$

$$\frac{r^2}{r+s}+\frac{r+s}{4}\geq r \quad \text{dir.}$$

Bu iki eşitsizlikten;

$$\left(\frac{p^2}{p+r}+\frac{p+r}{4}\right)+\left(\frac{r^2}{r+s}+\frac{r+s}{4}\right)\geq p+r=\frac{3p+2r-s}{4}+\frac{p+r}{4}+\frac{r+s}{4}$$

sağlanır.

Örnek 15: (Ukrayna 2014)

$$\frac{(m+1)^4}{(m-1)^3}+\frac{m-1}{16}\geq\frac{(m+1)^2}{2(m-1)}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$(m-1)\left(\frac{(m+1)^4}{(m-1)^4}+\frac{1}{16}-\frac{(m+1)^2}{2(m-1)^2}\right)\geq 0 \qquad \text{veya}$$

$$(m-1)\left(\frac{(m+1)^2}{(m-1)^2}-\frac{1}{4}\right)^2\geq 0 \qquad \text{dır.}$$

$m > 1$ olmalıdır. Çünkü $m \neq 1$ olursa "tanımsızlık" olur. Ayrıca karekök alırsak kökün içi en az sıfır olabileceğinden $m > 1$'dir.

$$\frac{(m+1)^2}{(m-1)^2}-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \frac{m+1}{m-1}=\mp\frac{1}{2}$$

Burada iki durum vardır.

$2m+2=m-1 \Rightarrow m=-3$ veya

$$-2m-2=m-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{3}$$

Çözüm kümesi ise $m \in (1,+\infty) \cup \{-3,-1/3\}$ tür.

Örnek 16 : (Romanya 2015 JBMO 7)

$m,n,p>0$, $m \geq n.p^2$, $n \geq p.m^2$ *ve* $p \geq m.n^2$ için,

$E = mnp(m-n.p^2)(n-p.m^2)(p-m.n^2)$ ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

Çözüm 1:

$x=mn, \quad y=np, \quad z=mp \quad alalım.$

$(x-y^2)(y-z^2)(z-x^2)$ ifadesinin maksimumuna bakalım.

Aritmetik Ortalama-Geometrik Ortalama Eşitsizliklerinden,

$$\left(\frac{(x-y^2+y-z^2+z-x^2)}{3}\right)^3$$

şeklindedir. Fakat, $x-x^2 \leq \frac{1}{4}$ *ve* $(x-y^2)(y-z^2)(z-x^2) \leq \frac{1}{4^3}$

dür.

$x=y=z=\frac{1}{2}$, $m=n=p=\frac{1}{\sqrt{2}}$ *için maksimum* $\frac{1}{4^3}$ *olur.*

Çözüm 2:

$$n.p^2(m-n.p^2) \leq \left(\frac{n.p^2+m-n.p^2}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$$

$$\frac{n.p^2(m-n.p^2)}{m^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$mnp(m-n.p^2)(n-p.m^2)(p-m.n^2)=$$

$$=\frac{n.p^2(m-n.p^2)}{m^2}.\frac{p.m^2(n-p.m^2)}{n^2}.\frac{m.n^2(p-m.n^2)}{p^2}$$

$$\leq \left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

Örnek 17: (JBMO 2014 Shortlist)

p, r *ve* s Pozitif Reel sayılar olsun.

$prs = \frac{1}{8}$ ise

$$p^2 + r^2 + s^2 + p^2r^2 + r^2s^2 + p^2s^2 \geq \frac{15}{16}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm 1:

Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği' ni kullanalım.

$$p^2 + r^2 + s^2 + p^2r^2 + r^2s^2 + p^2s^2 =$$

$$= \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} + \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} + p^2r^2 +$$

$$+r^2s^2 + p^2s^2 \geq 15\sqrt[15]{\frac{p^{12}r^{12}s^{12}}{4^{12}}} = 15\sqrt[5]{\left(\frac{prs}{4}\right)^4} = 15\sqrt[5]{\left(\frac{1}{32}\right)^4} = \frac{15}{16}$$

Yukarıdaki eşitsizlik $p = r = s = \frac{1}{2}$ durumunda sağlanır.

Çözüm 2:

Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği' ni kullanalım.

$$(p^2 + r^2 + s^2) + (p^2r^2 + r^2s^2 + p^2s^2) \geq 3\sqrt[3]{p^2r^2s^2} + 3\sqrt[3]{p^4r^4s^4} =$$

$$= 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$$

$p^2 = r^2 = s^2,\ p = r = s = \frac{1}{2}$ için sağlanır.

Örnek 18: (JBMO 2014 Shortlist)

p, r *ve* s Pozitif Reel sayılar olsun. $prs = 1$ olsun.

$$\left(p+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{s}\right)^2+\left(s+\frac{1}{p}\right)^2\geq 3(p+r+s+1)$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm 1:

Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği' ni (AM-GM) kullanalım.

$$\left(p+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{s}\right)^2+\left(s+\frac{1}{p}\right)^2$$

$$\geq\left(p+\frac{1}{r}\right)\left(r+\frac{1}{s}\right)+\left(r+\frac{1}{s}\right)\left(s+\frac{1}{p}\right)+\left(s+\frac{1}{p}\right)\left(p+\frac{1}{r}\right)$$

$$=\left(pr+1+\frac{p}{s}+p\right)+\left(rs+1+\frac{r}{p}+r\right)+\left(sp+1+\frac{s}{r}+s\right)$$

$$=pr+rs+sp+\frac{p}{s}+\frac{s}{r}+\frac{r}{p}+3+p+r+s$$

Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden şu sonuca ulaşırız:

$$pr+\frac{r}{p}\geq 2r,\qquad rs+\frac{s}{r}\geq 2s\quad ve\quad sp+\frac{p}{s}\geq 2p$$

Böylece,

$$\left(p+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{s}\right)^2+\left(s+\frac{1}{p}\right)^2\geq\left(pr+\frac{r}{p}\right)+\left(rs+\frac{s}{r}\right)+\left(sp+\frac{p}{s}\right)+$$

$$+3+p+r+s\geq 3(p+r+s+1)$$

$p=r=s=1$ için sağlanır.

Çözüm 2:

Karesel Ortalama – Aritmetik Ortalama Eşitsizliği'ni kullanalım.

$$\sqrt{\frac{\left(p+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{s}\right)^2+\left(s+\frac{1}{p}\right)^2}{3}} \geq \frac{p+\frac{1}{r}+r+\frac{1}{s}+s+\frac{1}{p}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\left(p+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{s}\right)^2+\left(s+\frac{1}{p}\right)^2 \geq \frac{\left(p+\frac{1}{r}+r+\frac{1}{s}+s+\frac{1}{p}\right)^2}{3} \qquad ....(1)$$

Aritmetik Ortalama ve Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden elde edilen aşağıdaki eşitsizlikte 1.denklemi yerine koyalım.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{prs}} = 3$$

$$\left(p+\frac{1}{r}\right)^2+\left(r+\frac{1}{s}\right)^2+\left(s+\frac{1}{p}\right)^2 \geq \frac{\left(p+\frac{1}{r}+r+\frac{1}{s}+s+\frac{1}{p}\right)^2}{3} \geq$$

$$\geq \frac{(p+r+s+3)^2}{3} = \frac{(p+r+s)(p+r+s)+6(p+r+s)+9}{3} \geq$$

$$\geq \frac{(p+r+s)3\sqrt[3]{prs}+6(p+r+s)+9}{3} =$$

$$= \frac{9(p+r+s)+9}{3} = 3(p+r+s+1)$$

$p=r=s=1$ için sağlanır.

Örnek 19: (JBMO 2014 Shortlist)

p, r ve s Pozitif Reel sayılar olsun. $p+r+s=1$ olsun.

$$\frac{7+2r}{1+p}+\frac{7+2s}{1+r}+\frac{7+2p}{1+s} \geq \frac{69}{4}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\frac{5+2(1+r)}{1+p}+\frac{5+2(s+1)}{1+r}+\frac{5+2(p+1)}{1+s} \geq \frac{69}{4}$$

1 + p' nın yerine *x*, *1 + r'* nin yerine *y*, *1 + s*'nin yerine *z* yazalım.

$$\frac{5+2y}{x}+\frac{5+2z}{y}+\frac{5+2x}{z}\geq\frac{69}{4}\Leftrightarrow 5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\geq\frac{69}{4}$$

$x,y,z>1$ Reel sayılar ve $x+y+z=4$ için sağlar.

Aritmetik Ortalama – Harmonik Ortalama Eşitsizliği'nden,

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{4}$$

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geq 3\sqrt[3]{\frac{y}{z}.\frac{z}{y}.\frac{x}{z}}=3$$

Böylece,

$$\frac{5+2y}{x}+\frac{5+2z}{y}+\frac{5+2x}{z}=5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+2\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\geq 5.\frac{9}{4}+2.3=$$

$$=\frac{69}{4}$$

$x=y=z,\ \frac{y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{x}{z},x+y+z=4$ ve

$x=y=z=\frac{4}{3},\ p=r=s=\frac{1}{3}$ için eşitlik sağlanır.

Örnek 20: (JBMO 2014 Shortlist)

k, m, n Negatif olmayan reel sayılar, $k + m + n = kmn$

$2(k^2+m^2+n^2)\geq 3\,(k+m+n)$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Eşitlik $k=m=n=0$ olduğunda sağlanır.

Aritmetik Ortalama ve Geometrik Ortalama Eşitsizliği'ni uygularsak

$k+m+n=kmn$ olur.

$$kmn=k+m+n\geq 3\sqrt[3]{kmn}\Rightarrow (kmn)^3\geq\left(3\sqrt[3]{kmn}\right)^3$$

$$\Rightarrow k^3m^3n^3 \geq 27kmn$$

$$\Rightarrow k^2m^2n^2 \geq 27$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{k^2m^2n^2} \geq 3$$

Ayrıca Aritmetik Ortalama ve Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden

$k^2 + m^2 + n^2 \geq 3\sqrt[3]{k^2m^2n^2} \geq 9$ elde edilir.

$$2(k^2 + m^2 + n^2) \geq 3(k + m + n) \Leftrightarrow \frac{2(k^2 + m^2 + n^2)}{3} \geq (k + m + n)$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{2(k^2 + m^2 + n^2)}{3} \geq 2.(k + m + n)$$

$$\Leftrightarrow 4\frac{(k^2 + m^2 + n^2)}{3} \geq 2.(k + m + n)$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{2(k^2 + m^2 + n^2)}{3} \geq 2.(k + m + n)$$

$$\Leftrightarrow k^2 + m^2 + n^2 + \frac{(k^2 + m^2 + n^2)}{3} \geq 2.(k + m + n)$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{k^2}{3} + 3 + \frac{m^2}{3} + 3 + \frac{n^2}{3} \geq 2.(k + m + n)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3\frac{k^2}{3}} + 2\sqrt{3\frac{m^2}{3}} + 2\sqrt{3\frac{n^2}{3}} \geq 2.(k + m + n)$$

Eşitlik,

$$3 = \frac{k^2}{3} = \frac{m^2}{3} = \frac{n^2}{3}, \quad x = y = z = 3, \quad x + y + z \neq xyz$$

için sağlanır.

Örnek 21: (JBMO 2014 Shortlist)

p, r, s Pozitif Reel sayılar olsun.

$$\left((3p^2+1)^2+2\left(1+\frac{3}{r}\right)^2\right)\left((3r^2+1)^2+2\left(1+\frac{3}{s}\right)^2\right)\left((3s^2+1)^2+2\left(1+\frac{3}{p}\right)^2\right)$$

$$\geq 48^3$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

x Pozitif Reel sayı olsun. Aritmetik Ortalama – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1+x+x+x}{4} \geq x^{\frac{3}{4}} \quad \text{veya} \quad 1+3x \geq 4x^{\frac{3}{4}}$$

$$(3p^2+1)^2 \geq 16p^3 \qquad \text{ve} \qquad 2\left(1+\frac{3}{r}\right)^2 \geq 32r^{-\frac{3}{2}}$$

Ayrıca Aritmetik ve Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden,

$$f(p,r) = (3p^2+1)^2 + 2\left(1+\frac{3}{r}\right)^2 \geq 16p^3 + 32r^{-\frac{3}{2}} = 16\left(p^3 + r^{-\frac{3}{2}} + r^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\geq 48\frac{p}{r}$$

Böylece,

$f(p,r)f(r,s)f(s,p) \geq 48\frac{p}{r}.48\frac{r}{s}.48\frac{s}{p} = 48^3$ elde edilir.

Eşitlik $p = r = s = 1$ olduğunda sağlanır.

Örnek 22: (JBMO 2014 Shortlist)

p, r, s Pozitif Reel sayılar ve $p^2 + r^2 + s^2 = 48$ olsun.

$$p^2\sqrt{2r^3+16} + r^2\sqrt{2s^3+16} + s^2\sqrt{2p^3+16} \leq 24^2$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$2x^3+16=2(x^3+8)=2(x+2)(x^2-2x+4)$

Artimetik – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'nden:

$$\sqrt{2x^3+16}=\sqrt{(2x+4)(x^2-2x+4)}\le\frac{2x+4+x^2-2x+4}{2}=\frac{x^2+8}{2}$$

Yukarıdaki denklemde $x=p,\ x=r,\ x=s$ yerine yazalım.

$p^2r^2+8p^2+r^2s^2+8r^2+s^2p^2+8s^2\le 2.24^2$

$$p^2r^2+r^2s^2+s^2p^2\le\frac{(p^2+r^2+s^2)^2}{3}$$

$p^2+r^2+s^2=48$ kullanırsak sağlanmış olur.

Eşitlik $p=r=s=4$ için sağlanır.

Örnek 23: (Akdeniz Üniversitesi Matematik Olimpiyatı 2016)

a pozitif bir reel sayı olmak üzere, $a^3+4a+\dfrac{20}{a}$

ifadesinin minimum değeri kaçtır?

Çözüm:

a pozitif bir reel sayı ise a^3, $4a$ ve $\dfrac{20}{a}$ da pozitif sayılardır.

Öyleyse, Artimetik – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'ni kullanırsak,

$$a^3+4a+\frac{20}{a}=a^3+(2a+2a)+\left(\frac{4}{a}+\frac{4}{a}+\frac{4}{a}+\frac{4}{a}+\frac{4}{a}\right)=M\ olsun$$

$$\frac{M}{8}\ge\sqrt[8]{a^3.2a.2a.\frac{4}{a}.\frac{4}{a}.\frac{4}{a}.\frac{4}{a}.\frac{4}{a}}\ge\sqrt[8]{2^{12}}=2\sqrt{2}\text{ Öyleyse buradan, }M\ge16\sqrt{2}$$

yani, $a^3+4a+\frac{20}{a}\ge16\sqrt{2}$ elde edilir.

Örnek 24: (Ireland, 2012)

p, r, s Pozitif Sayılar olsun.

$$\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{s}+\frac{s}{p}+1\right)^2 \geq (2p+r+s)\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)$$

Yukarıdaki eşitsizliği gösterin.

$p = r = s$ durumunu inceleyin.

Çözüm:

$$\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{s}+\frac{s}{p}+1\right)^2 = 1+2\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{s}+\frac{s}{p}\right)+\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{s}+\frac{s}{p}\right)^2$$

$$= 1+2\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{s}+\frac{s}{p}\right)+2\left(\frac{pr}{rs}+\frac{sp}{pr}+\frac{rs}{sp}\right)+\frac{p^2}{r^2}+\frac{r^2}{s^2}+\frac{s^2}{p^2}$$

$$= 1+2\left(\frac{p}{r}+\frac{r}{s}+\frac{s}{p}\right)+2\left(\frac{p}{s}+\frac{s}{r}+\frac{r}{p}\right)+\frac{p^2}{r^2}+\frac{r^2}{s^2}+\frac{s^2}{p^2}$$

$$(2p+r+s)\left(\frac{2}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right) = 4+2\left(\frac{p}{r}+\frac{p}{s}\right)+2\frac{r}{p}+1+\frac{r}{s}+2\frac{s}{p}+1+\frac{s}{r}$$

$$= 6+2\left(\frac{p}{r}+\frac{p}{s}+\frac{r}{p}+\frac{s}{p}\right)+\frac{r}{s}+\frac{s}{r}$$

ifadelerini düzenlersek,

$$\frac{p^2}{r^2}+\frac{r^2}{s^2}+\frac{s^2}{p^2}+\frac{r}{s}+\frac{s}{r}-5$$

$$\frac{r}{s}+\frac{s}{r}-2 = \frac{r^2+s^2-2rs}{rs} = \frac{(r-s)^2}{rs} \geq 0$$

Artimetik – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'ni kullanalım.

$$\frac{p^2}{r^2}+\frac{r^2}{s^2}+\frac{s^2}{p^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{p^2}{r^2}\cdot\frac{r^2}{s^2}\cdot\frac{s^2}{p^2}} = 3;$$

Öyleyse;

$p = r = s$ için sağlanır.

Örnek 25: (China Western Mathematical Olympiad, 2011)

$0 < p,\ r < 1$ şeklinde verildiğine göre,

$$\frac{pr(1-p-r)}{(p+r)(1-p)(1-r)}$$

ifadesinin en büyük değeri nedir?

Çözüm:

$p = r = \frac{1}{3}$ için sonucun $\frac{1}{8}$ olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi eşitsizliği çözelim.

$$\frac{pr(1-p-r)}{(p+r)(1-p)(1-r)} \le \frac{1}{8}$$

$0 < p,\ r < 1$

Eğer $p + r \ge 1$ için

$$\frac{pr(1-p-r)}{(p+r)(1-p)(1-r)} \le 0 < \frac{1}{8} \text{ dir.}$$

Eğer $p + r < 1$ için $1 - p - r = s > 0$ için

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni kullanalım.

$$\frac{pr(1-p-r)}{(p+r)(1-p)(1-r)} = \frac{prs}{(p+r)(r+s)(s+p)} \le$$

$$\le \frac{prs}{2\sqrt{pr}\,2\sqrt{rs}\,2\sqrt{ps}} = \frac{1}{8}$$

elde ederiz. Öyleyse eşitsizliğimizin en büyük değeri $\frac{1}{8}$ olur.

Örnek 25: (Austrian, 2012)

p, r ve s sıfırdan farklı Reel sayılar olmak üzere

$$\left|\frac{1}{p}\right| + \left|\frac{1}{r}\right| + \left|\frac{1}{s}\right| \le 3$$

olduğuna göre,

$$(p^2 + 4.(r^2 + s^2)).(r^2 + 4.(s^2 + p^2)).(s^2 + 4.(p^2 + r^2)) \geq n$$

ifadesindeki n değeri kaçtır?

Çözüm:

Bize verilen eşitsizlikte Geometrik Ortalama – Harmonik Ortalama Eşitsizliği'ni uygulayalım.

$$p.r.s \geq \left(\frac{3}{\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}}\right)^3 \geq 1$$

Şimdi ise Aritmetik Ortalama – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'ni uygulayalım.

$$p^2 + 4.r^2 + 4s^2 \geq 9.\sqrt[9]{p^2r^8s^8},$$

$$r^2 + 4.s^2 + 4p^2 \geq 9.\sqrt[9]{p^8r^2s^8},$$

$$s^2 + 4.r^2 + 4p^2 \geq 9.\sqrt[9]{p^8r^8s^2}$$

Bu üç denklemi taraf tarafa çarpalım.

$$(p^2 + 4.(r^2 + s^2)).(r^2 + 4.(s^2 + p^2)).(s^2 + 4.(p^2 + r^2)) \geq$$

$$\geq 729.\sqrt[9]{p^{18}r^{18}s^{18}} = 729.(prs)^2 \geq 729$$

Yukarıdaki eşitsizlik $p = r = s = 1$ için sağlanmaktadır ve n'nin en büyük değeri 729 olarak bulunur.

3 CAUCHY-SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ

Teorem 3.1

$a_1, a_2, a_3 ,,, a_n$ ve $b_1, b_2, b_3 ,,, b_n$ Reel sayılar olsun.

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2) \geq$$

$$\geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$

eşitsizliğine Cauchy-Schwarz Eşitsizliği denir.

Eşitsizliğin en çok bilinen şekli yukarıda gösterildiği gibidir. Olimpiyat sorularında bu formülün farklı yazım şekilleri de kullanılmaktadır. Burada amaç anlaşılırlığı ve çözümü kolaylaştırmaktır. Bunlar;

1. $\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{b_n} \geq \dfrac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n}$

2. $\dfrac{a_1}{{b_1}^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{{b_n}^2} \geq \dfrac{1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} . \left(\dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \cdots + \dfrac{a_n}{b_n}\right)^2$

3. $\dfrac{{a_1}^2}{b_1} + \cdots + \dfrac{{a_n}^2}{b_n} \geq \dfrac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + \cdots + b_n}$ (Faydalı Eşitsizlik)

4. $\sqrt{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)} \geq \sqrt{a_1 b_1} + \cdots + \sqrt{a_n b_n}$

5. $a_1, a_2, a_3 ,,, a_n, b_1, b_2, b_3 ,,, b_n \in R, \quad x \in [0,1]$ için

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2.x \sum_{i<j} a_i a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2.x \sum_{i<j} b_i b_j\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + x \sum_{i<j} a_i b_j\right)^2$$

6. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği, kompleks sayılarda;

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \geq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2$$

7. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'nin Lagrange özdeşliği,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 . \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)^2$$

Örnek 1: (IMO 1995/2)

a, b, c pozitif sayılar ve a.b.c=1 olsun.

$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Yine değişken değiştirelim.

$a = \frac{1}{x},\ b = \frac{1}{y},\ c = \frac{1}{z}\ ve\ xyz = 1$ olsun.

Denklemde yerine yazalım.

$$\frac{1}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Cauchy-Schwarz uygulayalım.

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)].\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x}\right) \geq (x+y+z)^2$$

elde edilir.

Şimdi de A.G.O uygulayalım.

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3(xyz)^{\frac{1}{3}}}{2} = \frac{3}{2}$$

Örnek 2: (IMO 2005/3)

x, y, z pozitif sayılar $xyz \geq 1$

$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Her tarafa 1 ekleyelim.

$$\left(\frac{x^2-x^5}{x^5+y^2+z^2}+1\right) + \left(\frac{y^2-y^5}{y^5+z^2+x^2}+1\right) + \frac{z^2-z^5}{z^5+x^2+y^2} \leq 3$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq 3$$

$\Rightarrow xyz \geq 1$ için Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2) \geq (x^2+y^2+z^2)^2 \Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+xz$ olduğundan

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2} \leq 2+\frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2} \leq 3$$

Örnek 3: (Pham Kim Hung)

a, b, c negatif olmayan Reel sayılar

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2-ca}{2b^2+c^2+a^2}+\frac{c^2-ab}{2c^2+a^2+b^2} \geq 0$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \leq 3 \; tür.$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \leq \frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2+2c^2} \leq \sum_{cyc} \frac{a^2}{a^2+c^2}+\sum_{cyc} \frac{b^2}{b^2+c^2} = 3$$

$a=b=c$ veya $a=b, \quad c=0$ için sağlar.

Örnek 4: (Nguyen Van Thach)

$a, b, c \in R^+$

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+abc}+\frac{b^3}{c^3+b^3+abc}+\frac{c^3}{a^3+c^3+abc}\geq 1$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$x=\frac{b}{a},\ y=\frac{c}{b},\ z=\frac{a}{c}$ alalım.

$$\frac{a^3}{a^3+b^3+abc}=\frac{1}{1+x^3+\frac{x}{z}}=\frac{1}{1+x^3+x^2z}=\frac{yz}{yz+x^2+xz}$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$\sum_{cyc}\frac{yz}{yz+x^2+xz}\geq\frac{(yz+xy+xz)^2}{yz(yz+x^2+xy)+xz(xz+y^2+xy)+xy(xy+z^2+zy)}$$

$$\Rightarrow (yz+xy+xz)^2\geq\sum_{cyc}yz(yz+x^2+xz)\Leftrightarrow\sum_{cyc}x^2y^2\geq\sum_{cyc}x^2yz$$

$\Rightarrow x=y=z$ veya $a=b=c$ için koşul sağlanır.

Örnek 5: (Nguyen Anh Tuan, VMEO 2006)

a, b, c gelişigüzel reel sayılar olsun.

$x=\sqrt{b^2-bc+c^2},\ y=\sqrt{c^2-ca+a^2},\ z=\sqrt{a^2-ab+b^2}$ için

$xy+yz+xz\geq a^2+b^2+c^2$ vardır. Bunu gösterelim.

Çözüm:

x ve y'den xy'yi elde edelim. Sonra genelleyelim.

$$x=\sqrt{b^2-bc+c^2}=\sqrt{\frac{3c^2}{4}+\left(b-\frac{c}{2}\right)^2},\ y=\sqrt{c^2-ca+a^2}=\sqrt{\frac{3c^2}{4}+\left(a-\frac{c}{2}\right)^2}$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$xy \geq \frac{3c^2}{4} + \frac{1}{4}(2b-c)(2a-c)$$

Genellersek;

$$\sum_{cyc} xy \geq \frac{3}{4}\sum_{cyc} c^2 + \frac{1}{4}\sum_{cyc}(2b-c)(2a-c) = \sum_{cyc} a^2$$

yz ve *xz* için de aynı yolu izlersek $b^2 + c^2$ gelir. İspat biter.

Kural:

$a_1, a_2, a_3 ,,, a_n$ negatif olmayan Reel sayılardır.

$$\frac{a_1}{a_2^2 + \cdots + a_n^2} + \frac{a_2}{a_1^2 + a_3^2 \ldots + a_n^2} + \cdots + \frac{a_n}{a_1^2 + a_2^2 \ldots + a_{n-1}^2} \geq \frac{4}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \; dir.$$

Bu kuralı bir örnekle gösterelim.

Örnek 6: (Pham Kim Hung)

a, b, c, d negatif olmayan Reel sayılar.

$$\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{a^2+c^2+d^2} + \frac{c}{b^2+a^2+d^2} + \frac{d}{b^2+c^2+a^2} \geq \frac{4}{a+b+c+d}$$

Çözüm:

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$\left(\frac{a}{b^2+c^2+d^2} + \frac{b}{a^2+c^2+d^2} + \frac{c}{b^2+a^2+d^2} + \frac{d}{b^2+c^2+a^2}\right)(a+b+c+d) \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2+c^2+d^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2+a^2+d^2}} + \sqrt{\frac{d^2}{b^2+c^2+a^2}}\right)^2$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} \geq 2$$

Sonra ,Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizlikleri'ni uygulayalım.

Yani A.G.O 'dan yapalım.

$$\sqrt{\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2+d^2}{a^2}+1\right) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2a^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2+d^2}} \geq \sum_{cyc}\frac{2a^2}{a^2+b^2+c^2+d^2} = 2$$

(a, b, c, d) = (k, k, 0, 0) sağlar.

Örnek 7: (Samin Riasa)

a, b, c bir üçgenin kenarları olsun.

$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b} \geq 1$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$4\sum_{cyc}\frac{a}{3a-b+c} = \sum_{cyc}\frac{4a}{3a-b+c} = 3+\sum_{cyc}\frac{a+b-c}{3a-b+c}$$

$$\geq 3+\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}(a+b-c)(3a-b+c)} = 4$$

$a = b = c$ sağlar.

Örnek 8: (Pham Kim Hung)

a, b, c ∈ R^+ $a \leq b \leq c$ ve $a + b + c = 3$

$$\sqrt{3a^2+1} + \sqrt{5a^2+3b^2+1} + \sqrt{7a^2+5b^2+3c^2+1} \leq 9$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$\left(\sqrt{3a^2+1} + \sqrt{5a^2+3b^2+1} + \sqrt{7a^2+5b^2+3c^2+1}\right)^2 =$$

$$\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}.\sqrt{6(3a^2+1)} + \tfrac{1}{\sqrt{4}}.\sqrt{4(5a^2+3b^2+1)} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3(7a^2+5b^2+3c^2+1)}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)[6(3a^2+1)+4(5a^2+3b^2+1)+3(7a^2+5b^2+3c^2+1)]$$

$$\Rightarrow 59a^2+27b^2+9c^2 \leq 95$$

Ayrıca $a \leq b \leq c$ için $ab+bc+ca \geq 2ab+b^2 \geq 2a^2+b^2$ dir.

$5a^2+3b^2+c^2 \leq (a+b+c)^2 = 9 \Rightarrow 59a^2+27b^2+9c^2 \leq 95$

$a \leq 1$ için a = b = c de eşitliği sağlar.

Örnek 9: (Gazeta Matematică)

a, b, c > 0 için

$$\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} + \sqrt{b^4+b^2c^2+c^4} + \sqrt{c^4+a^2c^2+a^4} \geq$$

$$\geq a.\sqrt{2a^2+bc} + b\sqrt{2b^2+ac} + c\sqrt{2c^2+ab}$$

Çözüm:

$$\sum_{cyclic} \sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} = \sum_{cyclic} \sqrt{\left(a^4 + \frac{a^2b^2}{2}\right) + \left(b^4 + \frac{a^2b^2}{2}\right)}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{cyclic} \left(\sqrt{a^4 + \frac{a^2b^2}{2}} + \sqrt{b^4 + \frac{a^2b^2}{2}} \right)$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'ni (C.S.E) uygulayalım.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{cyclic} \left(\sqrt{a^4 + \frac{a^2b^2}{2}} + \sqrt{a^4 + \frac{a^2c^2}{2}} \right)$$

$$\geq \sqrt{2} \textstyle\sum_{cyclic} \sqrt[4]{\left(a^4 + \frac{a^2b^2}{2}\right) . \left(a^4 + \frac{a^2c^2}{2}\right)} \qquad \text{(A.G.O)}$$

$$\text{C.S.E} \geq \sqrt{2} \textstyle\sum_{cyclic} \sqrt{a^4 + \frac{a^2bc}{2}} = \sum_{cyclic} \sqrt{2a^4 + a^2bc}$$

Örnek 10: (Phan Hong Son)

a, b, c Pozitif Reel Sayılar olmak üzere,

$$\sqrt{a + \sqrt{b^2 + c^2}} + \sqrt{b + \sqrt{c^2 + a^2}} + \sqrt{c + \sqrt{a^2 + b^2}} \geq 3. \sqrt{\sqrt{2} + 1}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\sum_{cyc} b^2 + c^2 + 2. \sum_{cyc} \sqrt{\left(a + \sqrt{b^2 + c^2}\right)\left(b + \sqrt{c^2 + a^2}\right)} \geq 9\sqrt{2} + 6$$

Cauchy-Schwarz Eşitsizliğini uygulayalım.(C.S.E)

$$\textstyle\sum_{cyc} \sqrt{\left(a + \sqrt{b^2 + c^2}\right)\left(b + \sqrt{c^2 + a^2}\right)} \geq \sum_{cyc} \sqrt{\left(a + \frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)\left(\left(b + \frac{a+c}{\sqrt{2}}\right)\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{cyc} \sqrt{\left((\sqrt{2} - 1)a + 3\right)(\sqrt{2} - 1)b + 3} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{cyc} \left((\sqrt{2} - 1)\sqrt{ab} + 3\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{cyc}\sqrt{ab} + \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{b^2 + a^2} + \left(2 - \sqrt{2}\right)\sum_{cyc}\sqrt{ab} \geq 6$$

Yukarıda, soru çözümünde aşağıdaki bilgiden de yararlandık. Şöyle ki,

$x, y \geq 0$ olduğundan $\sqrt{x^4 + y^4} + \left(2 - \sqrt{2}\right).xy \geq x^2 + y^2$ dir.

$x^4 + y^4 \geq \left(x^2 + y^2 - \left(2 - \sqrt{2}\right).xy\ \right)^2$ ancak ve ancak

$2\left(2 - \sqrt{2}\right).xy\,(x - y)^2 \geq 0$ dır.

Ayrıca $a = b = c = 1$ için durum sağlanır.

Örnek 11: (Korea M.O 2002)

$(a_1, a_2, , , , a_n)$ ve $(b_1, b_2, , , , , , b_n)$ Reel sayılar olmak üzere,

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2 = 1$

$(a_1b_1 - a_2b_1)^2 \leq 2|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + +a_nb_n - 1|$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Cauchy-Schwarz Eşitsizliğin'den (C.S.E)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$$

bize verilmiş. Buradan,

$1 \geq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \geq -1$ dir.

Cauchy-Schwarz Eşitsizliğin'den (C.S.E)

$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots +$

$a_nb_n)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_ib_j - a_jb_i\right)^2 \geq (a_1b_2 - a_2b_1)^2$

$$\Longrightarrow \left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$\Longrightarrow 2|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_{n-1}| \geq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

Örnek 12:

m, n, p Reel sayılar olsun. *m,n,p > 0 ve m+n+p= 3*

$$2.(mn + np + mp) - 3.mnp \geq m.\sqrt{\frac{n^2+p^2}{2}} + n.\sqrt{\frac{m^2+p^2}{2}} + p.\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\frac{m^2+n^2}{2} \leq \sqrt{\frac{n^2+p^2}{2}} \quad ise \quad \sqrt{\frac{n^2+p^2}{2}} \leq \frac{n^2+p^2}{n+p} = n + p - \frac{2np}{n+p}$$

$$m.\sqrt{\frac{n^2+p^2}{2}} + n.\sqrt{\frac{m^2+p^2}{2}} + p.\sqrt{\frac{m^2+n^2}{2}} \leq$$

$$\leq 2(mn + np + mp) - 2.mnp\left(\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{n+p}\right)$$

C.S.E (Cauchy-Schwarz) Eşitsizliğini kullanırsak,

$$\frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+p} + \frac{1}{n+p} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2.(m+n+p)} = \frac{3}{2}$$

Örnek 13 : (ESTONYA 2014)

p, r, s Reel Sayılar olmak üzere,

p.r.s=1 olarak veriliyor.

$$\frac{1}{1+p^{2014}} + \frac{1}{1+r^{2014}} + \frac{1}{1+s^{2014}} > 1$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm 1 :

$$k = p^{2014}, \quad m = r^{2014}, \quad n = s^{2014} \; ve \; kmn = 1$$

olsun.

$$(1+m)(1+n) + (1+n)(1+k) + (1+k)(1+m) >$$

$$> (1+m)(1+n)(1+k)$$

dir.

$kmn = 1 \; ve \; 1 + k + m + n > 0$ olduğundan *k, m, n* pozitif sayılardır. Öyleyse çözüm gösterilmiş olur.

Çözüm 2 :

$$k = p^{2014}, \quad m = r^{2014}, \quad n = s^{2014} \; ve \; kmn = 1$$

k ,m, n sayıları içinde en büyük sayı n olsun. o zaman $z \geq 1$ olur.

O zaman $k.m \leq 1 \; dir.$

$$\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+m} - 1 = \frac{(1+m) + (1+k) - (1+k)(1+m)}{(1+k)(1+m)} \geq$$

$$\geq \frac{1-km}{(1+k)(1+m)} \geq 0$$

Öyleyse

$$\frac{1}{1+k} + \frac{1}{1+m} \geq 1 \; dir.$$

Örnek 14: (ESTONYA 2014)

m, n, p Pozitif Reel sayılar olsunlar. $m + n + p = 1$ olduğuna göre,

$$\frac{m^2}{n^3 + p^4 + 1} + \frac{n^2}{p^3 + m^4 + 1} + \frac{p^2}{m^3 + n^4 + 1} > \frac{1}{5}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm 1 :

Birinci çözümde Aritmetik Ortalama ile Harmonik Ortalama Eşitsizliklerini kullanalım

$m, n, p \in (0,1)$ *aralığını alalım.*

$n^3 < n$ *ve* $p^4 < p$ buradan $n^3 + p^4 + 1 < p + n + 1 = 1 - m + 1 = 2 - m$

$$\frac{m^2}{m^3 + p^4 + 1} > \frac{m^2}{2 - m} = -2 - m + \frac{4}{2 - m}$$

$$\frac{n^2}{p^3 + m^4 + 1} > -2 - n + \frac{4}{2 - n}$$

$$\frac{p^2}{m^3 + n^4 + 1} > -2 - p + \frac{4}{2 - p}$$

elde edilir.

$$\frac{m^2}{m^3 + p^4 + 1} + \frac{n^2}{p^3 + m^4 + 1} + \frac{p^2}{m^3 + n^4 + 1}$$
$$> -6 - (m + n + p) + \left(\frac{4}{2 - m} + \frac{4}{2 - n} + \frac{4}{2 - p}\right)$$
$$= -7 + 4.\left(\frac{1}{2 - m} + \frac{1}{2 - n} + \frac{1}{2 - p}\right)$$

2-m, 2-n ve 2-p pozitif olduğundan Aritmetik Ortalama ile Harmonik Ortalama (AHO) uygulayalım.

$$\frac{1}{2 - m} + \frac{1}{2 - n} + \frac{1}{2 - p} \geq 3.\frac{3}{(2 - m) + (2 - n) + (2 - p)}$$
$$= \frac{9}{6 - (m + n + p)} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{m^2}{m^3 + p^4 + 1} + \frac{n^2}{p^3 + m^4 + 1} + \frac{p^2}{m^3 + n^4 + 1} >$$
$$> -7 + 4.\left(\frac{1}{2 - m} + \frac{1}{2 - n} + \frac{1}{2 - p}\right) \geq -7 + 4.\frac{9}{5} = \frac{1}{5}$$

Çözüm 2 :

C.S.E 'den yapalım.

$$a = \sqrt{n^3 + p^4 + 1}, \qquad b = \sqrt{p^3 + m^4 + 1} \ ve \ c = \sqrt{m^3 + n^4 + 1}$$

Şeklinde alalım.

$$(a^2 + b^2 + c^2).\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right) \geq (m + n + p)^2 = 1$$

$m, n, p \in (0,1)$ *için*

$$a^2 + b^2 + c^2 = (n^3 + p^4 + 1) + (p^3 + m^4 + 1) + (m^3 + n^4 + 1)$$

$$= 3 + (n^3 + p^3 + m^3) + (p^4 + m^4 + n^4) < 3 + (m + n + p) + (m + n + p)$$
$$= 5$$

Çözüm 3:

Üçüncü çözümü ise Aritmetik Ortalama-Karesel Ortalama kullanarak yapalım.

Eğer $p \geq \frac{1}{2}$ *ve* $m + n + p = 1$ *için* m *ve* $n \in (0, \frac{1}{2}]$ olur.

$$m^3 + n^4 + 1 \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{19}{16} < \frac{5}{4}$$

$$\frac{m^2}{n^3 + p^4 + 1} + \frac{n^2}{p^3 + m^4 + 1} + \frac{p^2}{m^3 + n^4 + 1} > \frac{p^2}{m^3 + n^4 + 1} > \frac{4}{5}.p^2 \geq \frac{4}{5}.\frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{5}$$

$a \geq \frac{1}{2}$ *ve* $b \geq \frac{1}{2}$ fakat *m,n,p* sayıları $\frac{1}{2}$ 'den daha az olmalıdır.

Öyleyse, Aritmetik Ortalama-Karesel Ortalama uygulayalım.

$$\frac{m^2}{n^3 + p^4 + 1} + \frac{n^2}{p^3 + m^4 + 1} + \frac{p^2}{m^3 + n^4 + 1} > \frac{16}{19}(m^2 + n^2 + p^2)$$
$$\geq \frac{16}{19}.\frac{(m + n + p)^2}{3} = \frac{16}{19.3} > \frac{1}{5}$$

Örnek 15: (Romanya 2015 JBMO 3)

a, b, c sıfırdan büyük sayılar olsun.

$$\frac{a^3}{c^3 + a^2b} + \frac{b^3}{a^3 + b^2c} + \frac{c^3}{b^3 + c^2a} \geq \frac{3}{2}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Aritmetik Ortalama-Geometrik Ortalama uygulayalım.(A.G.O)

$$a^2b \leq \frac{a^3+a^3+b^3}{3}$$

$$\frac{a^3}{c^3+a^2b} \geq \frac{a^3}{c^3+\frac{a^3+a^3+b^3}{3}} = \frac{3.a^3}{2a^3+b^3+3c^3}$$

Burada değişken değiştirme yapalım.

$$a^3 = m, \quad b^3 = n \ ve \ c^3 = p \ alalım.$$

$$\frac{m}{2m+n+3p} + \frac{n}{3m+2n+p} + \frac{p}{m+3n+2p} \geq \frac{1}{2}$$

$$\sum \frac{m}{2m+n+3p} = \sum \frac{m^2}{2m^2+mn+3mp} \geq$$

$$\geq \frac{(m+n+p)^2}{2(m^2+n^2+p^2+2mn+2mp+2np)} = \frac{1}{2}$$

Bu $a=b=c$ için sağlanır. Ayrıca,Titu'nun Lemma'sından,

$$\frac{a^3}{c^3+a^2b} + \frac{b^3}{a^3+b^2c} + \frac{c^3}{b^3+c^2a} = \frac{a^4}{ac^3+a^3b} + \frac{b^4}{ba^3+b^3c} + \frac{c^4}{cb^3+c^3a} \geq$$

$$\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2.(ba^3+b^3c+c^3a)} \geq \frac{3}{2}$$

$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3.(ba^3+b^3c+c^3a)$ ifadesini yukarıda sonucu bulmada kullandık.

Örnek 16: (JBMO 2013 Shortlist)

k, m Pozitif Reel sayı ve $km \geq 1$ olsun.

$$\left(k+2m+\frac{2}{k+1}\right)\left(m+2k+\frac{2}{m+1}\right) \geq 16$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm 1:

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'ni kullanalım.

$$\frac{k+1}{2}+\frac{2}{k+1}\geq 2$$

Böylece,

$$k+2m+\frac{2}{k+1}\geq\frac{k+3}{2}+2m$$

ve benzer şekilde

$$m+2k+\frac{2}{m+1}\geq\frac{m+3}{2}+2k$$

$$(k+4m+3)(m+4k+3)\geq(\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}+3)^2\geq 64$$

Cauchy – Schwarz Eşitliği'nden $km\geq 1$ 'dir.

Çözüm 2:

$km\geq 1$' den $k+m\geq k+{}^{1}/_{k}\geq 2\sqrt{k.\left({}^{1}/_{k}\right)}=2$ dir.

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'ni kullanalım.

$$k+2m+\frac{2}{k+1}=m+(k+m)+\frac{2}{k+1}$$

$$\geq m+2+\frac{2}{k+1}$$

$$=\frac{m+1}{2}+\frac{m+1}{2}+1+\frac{2}{k+1}$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{(m+1)^2}{2(k+1)}}$$

Benzer şekilde,

$$m+2k+\frac{2}{m+1}\geq 4\sqrt[4]{\frac{(k+1)^2}{2(m+1)}}\text{ dir.}$$

$$\left(k+2m+\frac{2}{k+1}\right)\left(m+2k+\frac{2}{m+1}\right)\geq 16\sqrt[4]{\frac{(k+1)(m+1)}{4}}$$

$$\geq 16\sqrt[4]{\frac{(2\sqrt{k})(2\sqrt{m})}{4}}$$

$$=16\sqrt[8]{km}$$

$$\geq 16$$

Çözüm 3:

Cauchy – Schwarz Eşitsizliği'ni kullanalım.

$$\left(k+2m+\frac{2}{k+1}\right)\left(m+2k+\frac{2}{m+1}\right)=$$

$$=\left((k+m)+m+\frac{2}{k+1}\right)\left((m+k)+k+\frac{2}{m+1}\right)$$

$$\geq\left(k+m+\sqrt{km}+\frac{2}{\sqrt{(k+1)(m+1)}}\right)^2$$

Aritmetik – Geometrik Ortalama Eşitsizliği'ni kullanalım.

$$\frac{2}{\sqrt{(k+1)(m+1)}}\geq\frac{4}{k+m+2}$$

$$k+m+\sqrt{km}+\frac{2}{\sqrt{(k+1)(m+1)}}\geq k+m+1+\frac{4}{k+m+2}=$$

$$=\frac{(k+m+1)(k+m-2)}{k+m+2}+4\geq 4$$

$$k+m\geq 2\sqrt{km}\geq 2$$

Eşitsizliği elde edilir.

4 HÖLDER EŞİTSİZLİĞİ

Teorem 4.1

$x_1, x_2, x_3 ,,, x_n$ ve $y_1, y_2, y_3 ,,, y_n$ Pozitif Reel sayılar olsun.

$p > 1 \quad ve \quad q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ denklemi sağlansın.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} . \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir.

Hölder eşitsizliğine örnekler verelim.

Örnek 1:

$a, b, c \in R^+$ ve

$\max(a^2, b^2, c^2) \leq 2(a^2 + b^2 + c^2)$ koşulu altında

$$\frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} + \frac{b}{\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}} + \frac{c}{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}} \geq \sqrt{3}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm 1:

Hölder eşitsizliğinde yapılan çözüm

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}\right) . \left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}\right) . \left(\sum_{cyc} a(2b^2 + 2c^2 - a^2)\right)$$

$$\geq (a + b + c)^3$$

$$\Rightarrow (a + b + c)^3 \geq 3. \sum_{cyc} a(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow 3\left(abc - \prod_{cyc}(a - b + c)\right) + 2\left(\sum_{cyc} a^3 - 3abc\right) \geq 0$$

$a = b = c$ için de sağlar.

Çözüm 2:

A.G.O' dan yapılan çözüm

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} + \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} + \sum_{cyc} \frac{3\sqrt{3}.a.(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(a + b + c)^3}$$

$$\geq 3.\sum_{cyc} \frac{\sqrt{3}.a}{a + b + c} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} = \frac{3\sqrt{3}.(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(a + b + c)^3}$$

$a = b = c$ için de sağlar.

Örnek 2: (Pham Kim Hung)

$a, b, c \in R^+$, $\quad a + b + c = 1$

$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}} \geq 1$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt[3]{a + 2b}}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt[3]{a + 2b}}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt[3]{a + 2b}}\right)\sum_{cyc} a(a + 2b) \geq \sum a^4 = 1 \quad \text{dir.}$$

Çünkü

$$\sum_{cyc} a(a + 2b) = (a + b + c)^2 = 1 \text{ dir.}$$

Örnek 3: (Titu Andreescu. USA MO 2002)

$a, b, c \in R^+$

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\prod_{cyc}(a^5 - a^2 + 3) = \prod_{cyc}(a^3 + 2 + (a^3 - 1)(a^2 - 1)) \geq \prod a^3 + 2$$

$$= (a^3 + 1 + 1)(b^3 + 1 + 1)(c^3 + 1 + 1) \geq (a + b + c)^3$$

Örnek 4: (Gabriel Dospinesu)

$a, b, c, d \in R^+, \quad a.b.c.d = 1$

$$4^4(a^4 + 1)(b^4 + 1)(c^4 + 1)(d^4 + 1) \geq \left(a + b + c + d + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^4$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Hölder Eşitsizliği'ni uygulayalım.

$$(a^4 + 1)(b^4 + 1)(c^4 + 1)(d^4 + 1) \geq (a + bcd)^4 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^4$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{(a^4 + 1)(b^4 + 1)(c^4 + 1)(d^4 + 1)} \geq a + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow 4.\sqrt[4]{(a^4 + 1)(b^4 + 1)(c^4 + 1)(d^4 + 1)} \geq \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} \frac{1}{a}$$

$a = b = c = d = 1$ için de sağlar.

Örnek 5:

$a, b, c \in R^+$

$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ac)^3$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Hölder Eşitsizliği' ni uygulayalım.

$(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) =$

$= (a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2) \geq (ab + bc + ac)^3$

Örnek 6: (Pham Kim Hung)

$a, b, c \in R^+ \,,\;\; a.b.c = 1$

$$\frac{a}{\sqrt{7+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{7+a+c}} + \frac{c}{\sqrt{7+b+a}} \geq 1$$

$$\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{7+a^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{7+b^2+a^2}} \geq 1$$

eşitsizlikleri varsa;

acaba $\frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{7+a^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{7+b^2+a^2}} \geq 1$ doğru mudur?

yanlış mıdır?

Çözüm:

Hölder' den önce 1. ve 2. eşitsizliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{7+b+c}}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{7+b+c}}\right)\left(\sum_{cyc} a(7+b+c)\right) \geq (a+b+c)^3$$

$\Rightarrow (a+b+c)^3 \geq 7(a+b+c) + 2(ab+bc+ac)$ dir.

Çünkü $a+b+c \geq 3.\sqrt[3]{a.b.c} = 3$ tür. (A.G.O dan)

$$(a+b+c)^{3} \geq 7(a+b+c) + \frac{2}{3}(a+b+c)^2 \geq 7(a+b+c) + 2(ab+bc+ac)$$

Şimdi 2.eşitsizliğe bakalım. Yine Hölder Eşitsizliği'nden

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{7+b^2+c^2}}\right)\left(\sum_{cyc} a(7+b^2+c^2)\right) \geq (a+b+c)^{3}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} a(7+b^2+c^2) = 7(a+b+c) + (a+b+c)(ab+bc+ac) - 3abc$$

$$\leq 7(a+b+c) + \frac{1}{3}(a+b+c)^3 - 3 \leq (a+b+c)^{3}$$

$a=b=c=1$ sağlar.

Ayrıca 3.eşitsizlik için $a = 10^{-4}$, $b=c=100$ veya

$a \to 0$ ve $b = c \to +\infty$ içinde sağlamaz.

Örnek 7: (Beyaz Rusya Training)

p, r, s, x, y, z Pozitif Reel sayılar için aşağıdaki eşitsizliği sağladığını gösteriniz.

$$\frac{p^3}{x} + \frac{r^3}{y} + \frac{s^3}{z} \geq \frac{(p+r+s)^3}{3(x+y+z)}$$

Çözüm:

$$m = \frac{p}{\sqrt[3]{x}}, \quad n = \frac{r}{\sqrt[3]{y}}, \quad k = \frac{s}{\sqrt[3]{z}}$$

alalım.

$3(m^3+n^3+k^3)(x^3+y^3+z^3) \geq (mx+ny+kz)^3$ ....(1.denklem)

$$\Rightarrow 3(m^3+n^3+k^3) = (1^2+1^2+1^2)(m^3+n^3+k^3) \geq \left(m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}}\right)^2$$

(2.denklem)

Cauchy-Schwarz Eşitsizliğin'den yukarıdakiler elde edilir. Ayrıca Hölder Eşitsizliği'ni uygularsak;

$$(m^t + n^t + k^t)^{\frac{1}{t}}.(x^w + y^w + z^w)^{\frac{1}{w}} \geq mx + ny + kz$$

için

$$t = \frac{2}{3}, \quad w = \frac{2}{3}, \quad \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{w} = 1\right)$$

alırsak

$$\left(m^{\frac{3}{2}} + n^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}}\right)^2 (x^3 + y^3 + z^3) \geq (mx + ny + kz)^3 \text{............(3.denklem)}$$

(2.) ve (3.) denklemleri birlikte düşünüp, (1.) denklemde yerine koyarsak soruda istenen sağlanır.

Örnek 8: (Litvanya)

k, m, n tam sayılar olmak üzere

$$\frac{1+k^2}{15+m^2+n^2} + \frac{15+m^2+n^2}{1+k^2} + \frac{6+m^2}{10k^2+n^2} + \frac{10+k^2+n^2}{6+b^2} + \frac{7+k^2+m^2}{9+n^2}$$

ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

$1+k^2$, $6+m^2$, $9+n^2$ 'u; u,v ve w ile adlandıralım.

$$A = \frac{u}{u+w} + \frac{v+w}{u} + \frac{v}{u+w} + \frac{u+w}{v} + \frac{w}{u+v} + \frac{u+v}{w}$$

$$2A = \frac{2u}{v+w} + \frac{2v}{v+w} + \frac{2w}{v+v} + \frac{v+w}{2u} + \frac{u+w}{2v} + \frac{u+v}{2w} +$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{v+w}{u} + \frac{u+w}{v} + \frac{v+u}{w}\right)$$

$$= \frac{2u}{v+w} + \frac{v+w}{2u} + \frac{2u}{u+w} + \frac{u+w}{2v}\frac{2w}{u+v} + \frac{u+v}{2w} +$$

$$+ \frac{3}{2}\left(\frac{v}{u} + \frac{u}{v} + \frac{w}{u} + \frac{v}{w} + \frac{v}{w} + \frac{w}{v}\right)$$

$$\geq 2.3 + \frac{3}{2}.2.3 = 15 \quad \text{ise} \quad A \geq 7{,}5$$

Örnek 9: (İran, 2012)

p, r, s Pozitif Reel Sayılar ve $p.r + r.s + s.p = 1$ olsun.

$$\frac{p\sqrt{p}}{rs} + \frac{r\sqrt{r}}{ps} + \frac{s\sqrt{s}}{pr} \geq \sqrt{3}(\sqrt{p} + \sqrt{r} + \sqrt{s})$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Soruyu Hölder ve Aritmetik – Geometrik Eşitsizlikleri'ni kullanarak gösterelim.

$$\left(\sum_{cyc}\frac{p\sqrt{p}}{rs}\right)\left(\sum_{cyc} rs\right)\left(\sum_{cyc} 1\right) \geq \left(\sum_{cyc}\sqrt{p}\right)^3 \; ise \; \sum_{cyc}\frac{p\sqrt{p}}{rs} \geq \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}\sqrt{p}\right)^3$$

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc}\sqrt{p}\right)^3 \geq \sqrt{3}\left(\sum_{cyc}\sqrt{p}\right) \; ise \; \left(\sum_{cyc}\sqrt{p}\right)^2 \geq 3\sqrt{3} \; ise \; \sum_{cyc}\sqrt{p} \geq \sqrt[4]{27}$$

Öyleyse

$$\sum_{cyc}\sqrt{p} < \sqrt[4]{27} \text{ şeklindedir.} \sum_{cyc}\frac{p\sqrt{p}}{rs} \geq \sqrt{3}\sqrt[4]{27} \text{ dir.}$$

A. G. O dan $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{p\sqrt{p}}{rs} \geq 3.\sqrt[3]{\prod\frac{p\sqrt{p}}{rs}} = 3.(prs)^{-\frac{1}{6}} \quad (*)$

$$1 = \sum_{cyc} pr \geq 3.(prs)^{\frac{2}{3}} \text{ ise } (prs)^{-\frac{2}{3}} \geq 3 \ , \qquad (prs)^{-\frac{1}{6}} \geq \sqrt[4]{3}$$

$$(*)\text{denkleminden} \quad \sum_{cyc} \frac{p\sqrt{p}}{rs} \geq 3.(prs)^{-\frac{1}{6}} \geq 3\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{5}{4}} = \sqrt{3}.\sqrt[4]{27}$$

şeklinde buluruz.

5 CHEBYSHEV EŞİTSİZLİĞİ

Teorem 5.1

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n$ *ve* $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n$ Reel sayılar olsun.

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq$$

$$\geq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n}{n}\right)$$

şeklindedir.

Yukarıda verdiğimiz Chebyshev Eşitsizliği ile ilgili örnekler yapalım.

Örnek 1:

a, b, c, d Pozitif Reel sayılar olsun.

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$ için

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$\frac{1}{b+c+d} \geq \frac{1}{c+d+a} \geq \frac{1}{d+a+b} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

a, b, c, d sıralı artan olsun.

Chebyshev Eşitsizliği'ni kullanalım. Bizden istenene x diyelim,

$$4.x \geq \left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} \frac{1}{b+c+d}\right) \geq \frac{16(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{3(a+b+c+d)} \geq$$

$$\geq \frac{4.\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+d^2)}}{3}$$

Öyleyse $x \geq \frac{4}{3}$ tür.

5.1 YENİDEN DÜZENLEME EŞİTSİZLİĞİ

Olimpiyat sınavlarında, sorulan bazı eşitsizlik sorularını, Yeniden Düzenleme Eşitsizliği yardımıyla çözebiliyoruz. Aşağıda, önce yeniden düzenleme (the rearrangement inequality) eşitsizliğinin ne olduğuna bakalım. Sonrasında ise birkaç örnek vererek anlaşılırlığı arttıralım.

Tanım ve teoremleri vermeden önce zihnimizde canlandırmak için biraz ön bilgi verelim.

İki tane reel sayı üçlüsü alalım. Bunlar (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) olsun. Burada (r_1, r_2, r_3) reel sayı üçlüsünün tüm permütasyonlarına bakacak olursak 3!=6 tane durum olduğunu görürüz. Buradaki (r_1, r_2, r_3) üçlüsünün permütasyonlarının oluşturduğu kümeye P dersek, $(a_1, a_2, a_3) \in P$ dir. Buna göre, $T = p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3$ toplamını da biliyorsak, Burada asıl ilgilenmemiz gereken şey T toplamının ne zaman en küçük ve ne zaman en büyük olduğudur. Yeniden düzenleme eşitsizliği ile bu soruya cevap arayacağız.

Tanım 5.1.1

(p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) reel sayı üçlülerini alalım. Buna göre,

- Eğer (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) üçlülerinin elemanları artan veya (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) üçlülerinin elemanları azalan bir sırada yazılmışsa bu ikiliyi **BENZER DÜZENLİ** şeklinde adlandıralım. Yani $p_1 \leq p_2 \leq p_3$ ve $r_1 \leq r_2 \leq r_3$ $veya$ $p_1 \geq p_2 \geq p_3$ ve $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ durumları sağlansın.

- Eğer (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) bu iki üçlüden biri artan diğeri azalan sırada yazılmışsa bu (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) üçlüsünü de **AYKIRI DÜZENLİ** şeklinde adlandıralım.

Örnek 1:

a) $(3,-1,1)$ ve $(5,7,9)$ Üçlüleri Benzer Düzenlilerdir.

b) $0 < p \leq r \leq s$ ise (p, r, s) ve $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}, \frac{1}{s}\right)$ Aykırı düzenlidir. Fakat (p, r, s) ve $\left(\frac{1}{r+s}, \frac{1}{p+s}, \frac{1}{p+r}\right)$ Benzer Düzenlidir.

c) $0 < p \leq r \leq s$ ve t pozitif reel sayı ise (p, r, s) ve (p^t, r^t, s^t)

ifadesi benzer düzenliyken, (p, r, s) ve $\left(\frac{1}{p^t}, \frac{1}{r^t}, \frac{1}{s^t}\right)$ ifadesi Aykırı düzenlidir.

d) $p \leq r \leq s$ ve n tek tamsayı ise (p, r, s) ve (p^t, r^t, s^t) Benzer Düzenlidir.

Teorem 5.1.1 (YENİDEN DÜZENLEME)

(p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) iki reel üçlü olsun. ve (a_1, a_2, a_3) üçlüsü (r_1, r_2, r_3) üçlüsünün bir permütasyonu olsun.

- (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) üçlüleri benzer düzenli ise,

$p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 \geq p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3$ olur.

- (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) üçlüleri aykırı düzenli ise,

$p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 \leq p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3$ olur.

Örnek 2:

p, r, s reel sayıların elamanı olmak üzere,

i. $p^2 + r^2 + s^2 \geq pr + ps + rs$

ii. $p^n + r^n + s^n \geq p^{n-1}r + r^{n-1}s + s^{n-1}p$

eşitsizliklerini gösterelim.

Çözüm :

Çözüme başlamadan önce bize verilen soruyu incelediğimizde, i şıkkının, ii şıkkının özel bir hali olduğunu görürüz. Bu nedenle ii şıkkını, yani genel ifadeyi göstermemiz yeterli olacaktır. O zaman (p, r, s) ve $(p^{n-1}, r^{n-1}, s^{n-1})$ ifadelerini benzer düzenliler olarak alırsak, istenen eşitsizlik yeniden düzenleme eşitsizliği ile,

$$pp^{n-1} + rr^{n-1} + ss^{n-1} \geq pr^{n-1} + rs^{n-1} + sp^{n-1}$$

olarak buluruz.

Örnek 3:

$p, r \geq 0$ $olmak$ $üzere$, aşağıdaki eşitsizlikleri gösterelim.

a) $2.(p^5 + r^5) \geq (p^3 + r^3)(p^2 + r^2)$

b) $p^9 + r^9 \geq p^2r^2(p^5 + r^5)$

c) $(p + r)^t \leq 2^{t-1}(p^t + r^t)$

Çözüm a)

(p^2, r^2) ve (p^3, r^3) Benzer düzenliler olsunlar. Öyleyse,

$$\frac{p^2p^3 + r^2r^3}{2} \geq \left(\frac{p^2 + r^2}{2}\right)\left(\frac{p^3 + r^3}{2}\right) \; ise \; 2.(p^5 + r^5) \geq (p^2 + r^2)(p^3 + r^3)$$

şeklinde buluruz.

b)

Bu soruda ise, Benzer Düzenlileri (p^4, r^4) ve (p^5, r^5) şeklinde alalım. Öyleyse,

$$\frac{p^4p^5 + r^4r^5}{2} \geq \left(\frac{p^4 + r^4}{2}\right)\left(\frac{p^5 + r^5}{2}\right) \geq \sqrt{p^4r^4}\left(\frac{p^5 + r^5}{2}\right) = p^2r^2\left(\frac{p^5 + r^5}{2}\right)$$

olur. Bu eşitsizlikten $p^9 + r^9 \geq p^2r^2(p^5 + r^5)$ eşitsizliğini elde ederiz.

c)

Bu soruyu **Chebyshev Eşitsizliğinden** faydalanarak yapalım.

Benzer şekilde ikililerimizi (p^{t-1}, r^{t-1}) ve (p, r) şeklinde alalım.

$$p^t + r^t \geq \frac{1}{2}(p^{t-1}, r^{t-1})(p + r) = \frac{1}{2}(p^{t-2}.p + r^{t-2}.r)(p + r)$$

$$p^t + r^t \geq \frac{1}{2^2}(p^{t-2} + r^{t-2})(p + r)(p + r)$$

$$p^t + r^t \geq \frac{1}{2^{t-1}}(p + r)(p + r)(p + r)\dots(p + r) = \frac{1}{2^{t-1}}(p + r)^t$$

olur. Öyleyse bizden isteten, $(p + r)^t \leq 2^{t-1}(p^t + r^t)$ ifadesini bulmuş oluruz.

Yeniden Düzenleme Yöntemiyle, Aritmetik Ortalama ve Karesel Ortalama arasındaki büyüklük-küçüklük ilişkisi, benzer şekilde Aritmetik Ortalama ve Geometrik Ortalama arasındaki büyüklük-küçüklük ilişkisi kolay bir şekilde gösterilebilir. Biz şimdi Chebyshev Eşitsizliğini Yeniden Düzenleme Yöntemiyle elde edelim.

Örnek 3 :

(p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) Benzer Düzenliler olsunlar.

$$\frac{p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3}{3} \geq \left(\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}\right)\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right)$$

şeklindeki Chebyshev eşitsizliğini gösterelim.

Çözüm :

Soruda bize (p_1, p_2, p_3) ve (r_1, r_2, r_3) Benzer Düzenliler olarak verildiğinden, yeniden düzenleme yöntemini kullanalım.

$$p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 = p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3$$

$$p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 \geq p_1r_2 + p_2r_3 + p_3r_1$$

$$p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 \geq p_1r_3 + p_2r_1 + p_3r_2$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Yukarıdaki üç denklemi taraf tarafa toplayalım.

$$3(p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3) \geq$$

$$\geq p_1(r_1 + r_2 + r_3) + p_2(r_1 + r_2 + r_3) + p_3(r_1 + r_2 + r_3)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da soruda bizden istenen

$$\frac{p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3}{3} \geq \left(\frac{p_1 + p_2 + p_3}{3}\right)\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right)$$

ifadesi elde edilmiş olur.

6 BAZI GEOMETRİK EŞİTSİZLİKLER VE UYGULAMALARI

Teorem 6.1

p, r, s bir üçgenin kenarları ve bu üçgenin alanı A olsun.

Öyleyse $p^2 + r^2 + s^2 \geq 4\sqrt{3}.A$ eşitsizliği vardır. Bu eşitsizliğe *Weitzenböck Eşitsizliği* denir.

Yukarıdaki eşitsizliğin ispatını çıkmış bir sınav sorusu üzerinde gösterelim.

Örnek 1: (IMO 1961/2)

p, r, s bir üçgenin kenarları olsun. Bu üçgenin alanı da A olsun.

Öyleyse $p^2 + r^2 + s^2 \geq 4\sqrt{3}.A$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$p = y + z,$

$r = x + z,$

$s = y + x,$

$x, y, z > 0$ olsun.

Denklemde yerine yazalım. Daha sonra karesini alalım.

$$((y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2)^2 \geq 48.(x+y+z).x.y.z$$

$$((y+z)^2 + (x+z)^2 + (x+y)^2)^2 \geq 16\,(yz + xz + xy)^2 \geq$$

$$\Rightarrow 16.3\,(xy.yz\ + yz.zx + xy.yz)$$

$((k-m)^2 \geq 0 \Rightarrow k^2 + m^2 \geq 2km$ dir. Buradan benzer şekilde

$(k+m+n)^2 \geq 3(km + mn + kn)$ yazılabilir.)

Örnek 2: (IMO 1983/6)

p, r, s bir üçgenin kenar uzunlukları olsun. Öyleyse

$$p^2.r\,(p-r)+r^2.s\,(r-s)+s^2.p\,(s-p)\geq 0$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$p=y+z,$

$r=x+z,$

$s=y+x,$

$x,y,z>0$ olsun.

Denklemde yerine yazalım.

$$(y+z)^2.(x+z)(y-x)+(x+z)^2.(x+y)(z-y)+$$

$$+(x+y)^2.(y+z)\,(x-z)$$

Düzenleyelim.

$(y^2+2yz+z^2)\,(z+x)\,(y-x)+(z^2+2zx+x^2)\,(x+y)$ (z - y) +

+$(x^2+2xy+y^2)$ (y+z)(x-z)

$\Rightarrow x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$

Her tarafı x.y.z 'ye bölelim.

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$ bulunur.

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z$ için Cauchy Schwarz Eşitsizliği kullanalım.

$(x+y+z)\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)\geq(x+y+z)^2$ elde ederiz.

≥ 0 olduğundan ispat biter.

Örnek 3: (APMO 2003)

k, m, n bir üçgenin kenar uzunluklarıdır. Bu üçgenin çevresi 1 birimdir.

$$\sqrt{k^2+m^2}+\sqrt{n^2+m^2}+\sqrt{k^2+n^2}<1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Genelliği bozmadan

$k \geq m \geq n$ alalım.

$k+m+n=1$

$k<m+n=1-k, \quad k \leq \frac{1}{2}$ dir.

$\Rightarrow m \leq k \Rightarrow \sqrt{k^2+m^2} \leq \sqrt{2.k^2}=k\sqrt{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow n \leq m \Rightarrow n^2+m^2 \leq m^2+mn < m^2+mn+\frac{n^2}{4}=\left(m+\frac{n}{2}\right)^2$ dir.

$\Rightarrow \sqrt{n^2+m^2}<m+\frac{n}{2}$ dir.

Benzer şekilde

$\Rightarrow \sqrt{n^2+k^2}<k+\frac{n}{2}$ dir.

Öyleyse ;

$$\sqrt{k^2+m^2}+\sqrt{n^2+m^2}+\sqrt{k^2+n^2}<\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(m+\frac{n}{2}\right)+\left(k+\frac{n}{2}\right)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Örnek 4: (Ukrayna 2014)

p, r, s dar açılı bir üçgenin kenarları olmak üzere

$$\sqrt{p^2+r^2-s^2}+\sqrt{r^2+s^2-p^2}+\sqrt{p^2+s^2-r^2} \leq \sqrt{3.(ab+bc+ca)}$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$x^2 = p^2 + r^2 - s^2,$

$y^2 = r^2 + s^2 - p^2,$

$z^2 = p^2 + s^2 - r^2$

ve x, y, z pozitif sayılar olsun.

$$p = \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{2}}, \quad r = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}, \quad s = \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}$$

Cauchy Schwarz Eşitsizliği kullanalım.

$x + y + z \leq$

$$\leq \sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{(x^2 + z^2)(x^2 + y^2)} + \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + y^2)} + \sqrt{(y^2 + z^2)(x^2 + z^2)}\right)}$$

$\sqrt{(p^2 + r^2)(p^2 + s^2)} \geq p^2 + rs$ olduğu için

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz)}$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz) \geq 2(x + y + z)^2$$

Yukarıda $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ olduğunu da kullandık.

Örnek 5: (Romanya)

m ve n reel sayılar olmak üzere $1 < n < 2 \; ve \; m - n + 1 = 0$

olarak veriliyor.

a) $E = \sqrt{4m^2 + 4n - 3} + 2.\sqrt{n^2 - 6m - 2n + 10}$ sonucunu bulalım.
b) p, r, s *bir üçgenin kenar uzunlıkları ,*

$$\frac{p}{r - p + s} + \frac{r}{p - r + s} + \frac{s}{p + r - s} \geq 3$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm : a)

$m = n - 1\,dir.$

$\sqrt{4m^2 + 4n - 3} = \sqrt{(2n-1)^2} = |2n - 1|$

$\sqrt{4n^2 + 6m - 2n + 10} = \sqrt{(n-4)^2} = |n - 4| = 4 - n$

$E = 2.n - 1 + 2.(4 - n) = 7$ dir.

Çözüm : b)

$x = -p + r + s,\ y = p - r + s,\ z = p + r - s$ olsun.

$p = \frac{y+z}{2},\ r = \frac{x+z}{2},\ s = \frac{y+x}{2}$

olsun. *p, r, s* üçgenin kenarları olduğu için $x,y,z > 0$ dır.Öyleyse,

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{y+x}{2z} \geq 3\ ise\ \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geq 6$$

Örnek 6: (India, 2003)

ABC üçgeninin kenarları sırasıyla *p, r, s* olsun. Eğer kenarları

$p + \frac{r}{2},\ r + \frac{s}{2},\ s + \frac{p}{2}$ olan bir $A'B'C'$ çizilebiliyor ise,

$$A(A'B'C') \geq \frac{9}{4} A(ABC)$$

olduğunu gösterelim.

Çözüm:

$$p = k + m,\quad r = m + h,\quad s = h + k$$

şeklinde olsun. $A'B'C'$ için ise,

$$p' = \frac{h + 2k + 3m}{2},\quad r' = \frac{3h + k + 2m}{2},\quad s' = \frac{2h + 3k + m}{2},$$

şeklinde alalım. Şimdi ise üçgende alan bulmada Heron formülünü kullanalım.

$$A(A'B'C') = \sqrt{\frac{3(h+k+m)(2h+k)(2k+m)(2m+h)}{16}}$$

Aritmetik Ortalama-Geometrik Ortalama Eşitsizliğini kullanırsak,

$$2h + k \geq 3.\sqrt[3]{h^2k}, \qquad 2k + m \geq 3.\sqrt[3]{k^2m}, \qquad 2m + h \geq 3.\sqrt[3]{m^2h}$$

elde ederiz. Öyleyse,

$$A(A'B'C') = \sqrt{\frac{3(h+k+m).27.(h.k.m)}{16}} = \frac{9}{4}A(ABC)$$

bulunur.

KAYNAKÇA

Alizade,R., Ders Notları, Yaşar Üniversitesi, İzmir 2013.

Andreescu,T., 2006, Geometric Problems On Maxima and Minima, Berlin.

Lee, H., 2006, Topics in Inequalities - Theorems and Techniques.

Lee, H., 2006, Inequalıtıes Through Problems.

Hung, P. K.,2007, Secrets İn İnequalities, Romania.

Herman, J., Kucera R., & Simsa J., 2000, Equations and Inequalities, CMS Books in Mathematics.

Karakaş,H.İ., Aliyev,i., Sayılar Teorisinde İlginç Olimpiyat Problemleri ve Çözümleri, Tübitak 1998.

WEB KAYNAKLARI

http://www.mathlinks.ro/Forum/

http://www. artofproblemsolving.com/Forum/

http://matematik.fen.akdeniz.edu.tr/2016-sinav-sorulari-ve-yanitlari

http://www.imomath.com/

ÖZGEÇMİŞ

Abdulsamet BAŞDAŞ, 1984 yılında Elazığ'da doğdu. İlkokul ve ortaokulu Ankara'da lise öğrenimini Aydın'da tamamladıktan sonra Adnan Menderes Üniversitesi Matematik bölümünü 2006 yılında bitirdi. 2006 yılından beri özel bir okulda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.