YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İÇERME DIŞARMA PRENSİBİ

ONUR EREN

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR REFAİL ALİZADE

MATEMATİK BÖLÜMÜ

SUNUM TARİHİ: 23.08.2019

BORNOVA / İZMİR
AĞUSTOS 2019

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Yüksek Lisans tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri:	**İmza:**
Prof. Dr. Refail ALİZADE Yaşar Üniversitesi	…………………
Prof. Dr. Mehmet TERZİLER Yaşar Üniversitesi	…………………
Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK İzmir Demokrasi Üniversitesi	…………………

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

İÇERME DIŞARMA PRENSİBİ

Eren, Onur
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Danışman: Prof. Dr. Refail ALİZADE
Ağustos 2019

Bu tezde, içerme dışarma prensibinin matematik sorularının çözümünde nasıl uygulanabileceği gösterilmiştir. Ayrıca ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarında içerme dışarma prensibi ile ilgili çıkmış sorulara ve bunların çözümlerine yer verilmiştir.

Tezin matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrencilere ve onların öğretmenlerine faydalı olacağı düşünülmektedir.

ABSTRACT

THE PRINCIPLE OF INCLUSION AND EXCLUSION

Eren, Onur
Msc in Department of Mathematics
Advisor: Prof. Dr. Refail ALİZADE
August 2019

In this thesis, it has shown that how to apply the inclusion and exclusion principle for solving mathematical problems. Also it includes national and international mathematical olympiads questions and their solutions about the inclusion and exclusion principle.

It is thought that this thesis will be helpful for students who are preparing for the mathematical olympiads and their teachers.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Prof. Dr. Refail ALİZADE başta olmak üzere Yaşar Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu süreçte, bugüne kadar olduğu gibi, benden sevgisini ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen eşim Özge EREN'e, varlığıyla bana güç veren kızım Defne EREN'e ayrıca teşerkkürlerimi sunarım.

Onur Eren

İzmir, 2019

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans/Doktora Tezi olarak sunduğum "İÇERME DIŞARMA PRENSİBİ" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Onur Eren

İMZA

…………………………….

12 Aralık 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR

KISALTMALAR:

UMO	Ulusal Matematik Olimpiyatı
UBO	Ulusal Bilgisayar Olimpiyatı
IMO	Uluslararası Matematik Olimpiyatı

BÖLÜM 1
GİRİŞ

İçerme dışarma prensibi konusunu seçmekteki temel amacım her insanın yaptığı sayma işleminin ne kadar farklı yollarla gerçekleştirilebileceğini göstermektir. Çünkü içerme dışarma prensibi aslında bir sayma problemidir. En kaba anlatımıyla, saymak istediğimiz nesneleri özelliklerine göre gruplandırarak istediğimiz özellikteki nesneleri sayıp, içlerinden istemediğimiz özellikteki nesneleri çıkartarak net bir sonuca ulaşma problemidir.

İçerme dışarma prensibi yularıda anlatıldığı gibi aslında kümelerle uygulanan bir sayma problemidir. Birleşim kümesinin eleman sayısını bulmak için kullanılan bu prensip, bunun dışında birçok problemin çözümünde de kullanılabir. Matematiğe meraklı, kendini matematikte bir adım öteye taşımak isteyen herkese faydalı olacağını düşündüğüm için bu konuyu çalışmayı seçtim. Bu çalışmanın, matematik olimpiyatlarına hazırlanan öğrencilere ve bu öğrencileri çalıştıran öğretmenlere faydalı bir kaynak olacağını düşünüyorum.

Tezin ikinci bölümünde içerme dışarma prensibi teoremi ve ispatına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise içerme dışarma prensibi ile ilgili uygulamalar ele alınmış, içerme dışarma prensibinin ne tür soruların çözümünde kullanılabileceği gösterilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde de ulusal ve uluslararası matematik olimpiyatlarında sorulmuş olan sorulardan içerme dışarma prensibi ile çözülebileceklere yer verilmiştir.

BÖLÜM 2
İÇERME DIŞARMA PRENSİBİ

Teorem :

Eleman sayısı S olan bir H kümesinin $1 \leq i \leq n$ için birbirinden farklı k_i alt kümelerinin hiçbirinde yer almayan elemanların sayısını $\bar{S} = s(\overline{k_1 k_2 k_3} \ldots \overline{k_n})$ ile gösterirsek:

$$\bar{S} = S - \sum_{1 \leq i \leq n} [s(k_i)] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [s(k_i k_j)] - \sum_{1 \leq i < j < t \leq n} [s(k_i k_j k_t)] + \cdots + (-1)^n \cdot s(k_1 k_2 \ldots k_n)$$

şeklinde hesaplanabilir.

İspat :

Tümevarım yöntemiyle bir ispat yapılabilir. H kümesinin bir x elemanı bu alt kümelerden hiçbirinde değilse, eşitliğin solunda $\bar{S}$ ve sağında S içinde birer kez sayılırken diğer kümelerde sayılmazlar. Böylece eşitlik bu durumda sağlanır. Diyelim ki x elemanı verilen alt kümelerden r tanesinin elemanı olsun. Bu durumda eşitliğin solunda bu eleman sayılmaz. Fakat,

1. Bir kez S de sayılır.

2. r kez $\sum_{1 \leq i \leq n} [s(k_i)]$ de sayılır.

3. $\binom{r}{2}$ kez $\sum_{1 \leq i < j \leq n} [s(k_i k_j)]$ de sayılır. (r alt kümeden seçilen 2 alt kümenin kesişimlerinin her biri)

4. $\binom{r}{3}$ kez $\sum_{1 \leq i < j < t \leq n} [s(k_i k_j k_t)]$ de sayılır. (r alt kümeden seçilen 2 alt kümenin kesişimlerinin her biri)

…

(r+1). $\binom{r}{r}$=1 kez $\sum [s(k_{i_1} k_{i_2} k_{i_3} \ldots k_{i_r})]$ de sayılır.

Sonuç olarak x elemanı eşitliğin sağında (binom açılımı gereği)

$$1 - r + \binom{r}{2} + \binom{r}{3} + \ldots + (-1)^r \binom{r}{r} = [1 + (-1)]^r = 0$$

kez sayılır. Böylece eşitliğin herhangi bir x elemanını her iki tarafında da eşit saydığını göstermiş oluruz.

BÖLÜM 3
İÇERME DIŞARMA PRENSİBİ İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Örnek 1

Bir tam sayının karesi veya küpü olmayan sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanarak yazılmasıyla elde edilen sayı dizisinin 2014. terimi kaçtır?

Çözüm

2014'ten küçük tam kare sayılar, $1^2, 2^2, \ldots, 44^2$

2014'ten küçük tam küp sayılar, $1^3, 2^3, \ldots, 12^3$

2014'ten küçük hem tam kare hem de tam küp sayılar, $1^6, 2^6, \ldots, 3^6$

olup, 2014 sayısından 44+12−3= 53 sayı eksilecektir. Bu 53 sayısı 2014'e eklenirse sonuç 2067 elde edilir. 2014 ile 2067 arasında tekrar tam kare veya tam küp sayı olup olmadığı kontrol edildiğinde $45^2 = 2025$ olduğu görülür. O halde 2014. terim 2068 dir.

Örnek 2

İki rakamı aynı olan üç basamaklı kaç sayı vardır?

Çözüm

Üç basamaklı sayımız abc olsun.

i) $a = b$ için, $a \neq 0$ olacağından 9.10=90 farklı abc sayısı vardır.

ii) $b = c$ için, $a \neq 0$ olacağından 9.10=90 farklı abc sayısı vardır.

iii) $a = c$ için, $a \neq 0$ olacağından 9.10=90 farklı abc sayısı vardır.

iv) a=b=c için, $a \neq 0$ olacağından 9 farklı abc sayısı vardır.

İçerme dışarma prensibi'ne göre 90.3 – 2.9 = 252 bulunur.

Örnek 3

"KATKAT" kelimesindeki harflerin rastgele dizilişlerinin kaçında aynı iki harf yan yana gelmez?

Çözüm

İçerme dışarma prensibi'ne göre KATKAT kelimesinin harflerinin tüm farklı dizilişlerinin sayısından önce iki aynı harfin yan yana (KK, TT, AA) olduğu durumları çıkartır daha sonra iki ikilinin yan yana olduğu durumları ekler ve üç üçlünün yan yana olduğu durumları tekrar çıkartırız.

Tüm farklı dizilişler: $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$

İki aynı harfin yan yana olduğu durumların sayısı: $3 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2!} = 90$

İkilinin (AATKKT gibi) yan yana olduğu durumların sayısı: $3 \cdot \frac{4!}{2!} = 36$

Üçlünün (AATTKK gibi) yan yana olduğu durumların sayısı: 3! =36 olup aranan sonuç;
90 – 90 + 36 – 6 = 30 dur.

Örnek 4

3, 5 ve 7 sayılarından sadece birine tam bölünen kaç tane dört basamaklı sayı bulunur?

Çözüm

3'e, 5'e ve 7'ye bölünen dört basamaklı sayıların kümelerini sırasıyla A, B ve C ile gösterelim. Aradığımız sayı, s(A) + s(B) + s(C) - 2[s(A∩B) + s(A∩C) + s(B∩C)] + 3s(A∩B∩C) olacak çünkü

s(A) + s(B) + s(C) toplamında A∩B, A∩C ve B∩C kesişimlerinin elemanlarını ikişer kez saymış olduğumuzdan, s(A) + s(B) + s(C) toplamında A∩B∩C kümesinin elemanlarını üçer kez saymış olduğumuzdan ve 2[s(A∩B) + s(A∩C) + s(B∩C)] sayısını çıkardığımızda bu elemanları altışar kez çıkardığımızdan bunları üçer kez eklememiz gerekiyor. Örneğin 21 ile bölünen dört basamaklı sayılar

$\left[\!\left[\frac{9999}{21}\right]\!\right] - \left[\!\left[\frac{999}{21}\right]\!\right]$ = 476-47 = 429 tanedir, yani s(A∩C) = 429 dur.

Benzer şekilde s(A) = 3333-333 = 3000,

s(B) = 1999-199 = 1800,

s(C) = 1428-142 = 1286,

s(A∩B) = 666-66 = 600,

s(A∩C) = 476-47 = 429,

s(B∩C) = 285-28 = 257 ve

s(A∩B∩C)= 95-9 = 86 bulunur.

Bunları, s(A) + s(B) + s(C) - 2[s(A∩B) + s(A∩C) + s(B∩C)] + 3s(A∩B∩C) formülünde yerine yazdığımızda,

(3000+1800+1286) - 2.(600+429+257) + 3.86 = 3772 elde edilir.

Örnek 5

Birbirinden farklı yüz bilye beş kutuya dağıtıldığında, hiçbir kutunun boş kalmama ihtimali nedir?

Çözüm

S= Bütün durumların sayısı = 5^{100}

S_1= Beş kutudan birinin boş olduğu durumların sayısı = $\binom{5}{1}4^{100} = \binom{5}{1}(5-1)^{100}$

S_2= Beş kutudan ikisinin boş olduğu durumların sayısı = $\binom{5}{2}3^{100} = \binom{5}{2}(5-2)^{100}$

S_3= Beş kutudan üçünün boş olduğu durumların sayısı = $\binom{5}{3}2^{100} = \binom{5}{3}(5-3)^{100}$

S_4= Beş kutudan dördünün boş olduğu durumların sayısı = $\binom{5}{4}1^{100} = \binom{5}{4}(5-4)^{100}$

S_5= Beş kutunun hepsinin boş olduğu durumların sayısı = $\binom{5}{5}0^{100} = \binom{5}{1}(5-5)^{100}$

Buna göre aranan olasılık:

$$\frac{\mathrm{S}-\mathrm{S}_1+\mathrm{S}_2-\mathrm{S}_3+\mathrm{S}_4-\mathrm{S}_5}{\mathrm{S}} = \sum_{\mathrm{i}=0}^{5}\frac{(-1)^{\mathrm{i}}\cdot\binom{5}{\mathrm{i}}(5-\mathrm{i})^{100}}{5^{100}}$$

olur.

Örnek 6

Üç çift yuvarlak masa etrafında otoruyorlar. En az bir çiftin yan yana gelme olasılığı nedir?

Çözüm

S_1= Bir çiftin eşinin yanında olduğu durumların sayısı = $\binom{3}{1}\cdot 4!\cdot 2!$

S_2= İki çiftin eşinin yanında olduğu durumların sayısı = $\binom{3}{2}\cdot 3!\cdot 2!$

S_3= Üç çiftin eşinin yanında olduğu durumların sayısı = $\binom{3}{3}\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!$

aranan olasılık

$$\frac{\mathrm{S}_1-\mathrm{S}_2+\mathrm{S}_3}{5!} = \frac{\binom{3}{1}\cdot 4!\cdot 2!-\binom{3}{2}\cdot 3!\cdot 2!+\binom{3}{3}\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!}{5!} = \frac{11}{15}$$

Örnek 7

1x2012 lik bir tabloda tüm birim kareler siyahtır. Pınar en sağdaki 1. birim kareden başlayarak 1,2,3,1,2,3,… şeklinde sırayla sayarak her 3. birim kareyi kırmızıya boyuyor. Aynı şekilde en sağdaki 1. birim kareden başlayarak 1,2,3,4,5,1,2,3,4,5,… şeklinde sırayla sayarak her 5. birim kareyi sarıya boyuyor. Daha sonra aynı işlemi 7. birim kareleri maviye boyayarak devam ediyor. Buna göre geriye siyah boyalı kaç birim kare kalmıştır?

Çözüm

1, 2, 3, …, 2012 sayılarından 3 ün katı olanlar s(3)=670, 5 in katı olanlar s(5)=402, 7 nin katı olanlar s(7)=287, $s(3\cap5)=134$, $s(3\cap7)=95$, $s(5\cap7)=57$ ve $s(3\cap5\cap7)=19$ olup

$s(3\cup5\cup7)= s(3)+s(5)+s(7)-[s(3\cap5)+s(3\cap7)+s(5\cap7)]+s(3\cap5\cap7)$

$= 670+402+287-(134+95+57)+19 = 1092$ dir.

Buradan, 2012-1092=920 tane siyah kaldığı bulunur.

Örnek 8

Rakamları çarpımı 10 a bölünen dört basamaklı kaç tane pozitif tam sayı vardır?

Çözüm

Dört basamaklı tüm sayılar – İstenmeyen durumlar

İstenmeyen durumlar:

(2 ile bölünmeyenler) + (5 ile bölünmeyenler) – (5 ve 2 ile bölünmeyenler)

2 ile bölünmeyenlerin sayısı: $5.5.5.5=5^4$ ve 5 ile bölünmeyenlerin sayısı: $8.8.8.8=8^4$

2 ve 5 ile bölünmeyenlerin sayısı: $4.4.4.4=4^4$ olup

İstenmeyen durumların sayısı: $5^4+8^4-4^4=4465$ tir.

Dört basamaklı sayıların sayısı ise 9.10.10.10=9000 dir.

Buna göre aranan durumun sayısı, 9000-4465=4535 bulunur.

Örnek 9

0, 1, 2, …, 9999 sayıları içinde 7 ve 8 rakamlarının ikisinin de kullanıldığı kaç tane sayı vardır?

Çözüm

A={yazılımında 7 kullanılan sayılar} ve B={ yazılımında 8 kullanılan sayılar} kümelerini tanımlayalım. Biz s(A∩B) sayısını bulmak istiyoruz.

$$s(A\cap B) = s(A) + s(B) - s(A\cup B)$$

formülünden yararlanacağız. Sayıların hepsini, gerektiğinde önüne sıfırlar koymakla dört basamaklı düşünelim. Örneğin, 0=0000, 1=0001, 219=0219 vs. O halde,

$s(A) = s(B) = 10^4 - 9^4$ olduğu kolayca görülebilir.

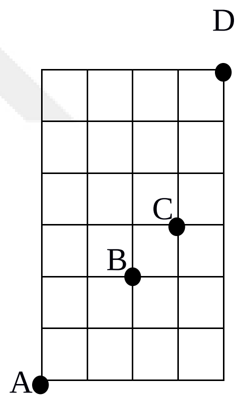
Diğer taraftan, $\mathbf{C'}$, C kümesinin tümleyenini göstermek üzere,

$s(A\cup B) = 10^4 – s((A\cup B)') = 10^4 – 8^4$ olur.

Son iki eşitlik yerlerine yazılırsa,

$s(A\cap B) = 2.(10^4 - 9^4) – (10^4 - 8^4) = 974$ bulunur.

Örnek 10



Şekilde, 6 satır ve 4 sütunu olan tablonun sol alt köşesinden (A noktasından) sağ üst köşesine (D noktasına), çizgiler üzerinde sağa veya yukarıya hareket edilerek gidilecektir. B ve C noktalarının en az birinden geçmek koşuluyla, kaç farklı yol izlenebilir?

Çözüm

B ve C noktalarından en az birine uğraması demek, B veya C den birinden geçerek demektir. Buna göre, $|A\cup B| = |A|+|B|-|A\cap B|$ eşitliğini kullanarak,

|A|, A noktasından B'ye uğrayarak D'ye giden yolların sayısı $= \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 6.15 = 90$

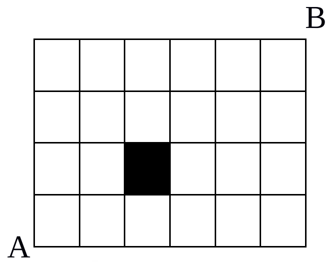
|B|, A noktasından C'ye uğrayarak D'ye giden yolların sayısı $= \frac{6!}{3!\cdot 3!} \cdot \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 20.4 = 80$

|A∩B|, A' dan B ve C'ye uğrayarak D'ye giden yolların sayısı = $2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!}$ = 48 olur.

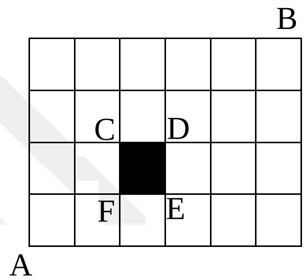
O halde, | A∪B |=|A|+|B|-| A∩B |= 90+80-48=122 dir.

Örnek 11

Yandaki şekilde A köşesinden yola çıkan Osman, çizgiler üzerinde yürüyerek sadece sağa ve yukarı gidebiliyor. Osman taralı karenin tam olarak bir kenarı üzerinde yürüyerek Bye kaç farklı yoldan gidebilir?



Çözüm



Osman'ın [CD]'ye uğrayarak A dan B ye gittiği yolların kümesini X, [CD]'ye uğrayarak A dan B ye gittiği yolların kümesini Y, [CD]'ye uğrayarak A dan B ye gittiği yolların kümesini Z ve [CD]'ye uğrayarak A dan B ye gittiği yolların kümesini T ile gösterelim.

Buna göre, taralı karenin bir kenarından geçerek gidilen yolların sayısı,

| XUYUZ |=|X|+|Y|+|Z|+|T|-| T∩X |-| Y∩Z | dir. Çünkü karenin üç veya daha fazla kenarından geçemez. İki kenardan geçiyorsa bunlar EF ve DE ya da FC ve CD dir.

$$|X| = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 60, \qquad |Y| = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 40$$

$$|Z| = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 60, \qquad |T| = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 45$$

$$|T \cap X| = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 30, \quad |Y \cap Z| = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 30$$

| XUYUZ |=|X|+|Y|+|Z|+|T|-| T∩X |-| Y∩Z | = 60+40+60+45-30-30 = 145 bulunur.

Örnek 12

Madeni bir para dört defa art arda atıldığında, ardışık iki atışta tura gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm

Başta, ortada ve sonda ardışık iki tanesinin Tura gelmesi durumlarının kümesi sırasıyla A, B ve C olsun. Bu durumlar, TT--, -TT-, --TT şeklinde olacağından her bir çizgi için Yazı ya da Tura olacağından iki farklı durum vardır. Bu da |A|=|B|=|C|=4 demektir.

A∩B, B∩C, A∩C için ise, | A∩B |=| B∩C |=2 ve | A∩C |=1 dir.

A∩B∩C için ise, | A∩B∩C |=1 dir.

Buna göre, istenen durumların sayısı= (4+4+4)-(2+2+1)+1=8 olup arana olasılık

$$P(x) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

olur.

Örnek 13

İkilik sistemde yazılan 6 basamaklı sayılardan kaç tanesinde ardışık üç adet 1 rakamı bulunur? (Örneğin, 101110. 111100 istenen özellikte iken 100110 istenen özellikte değildir.)

Çözüm

İkilik sistemde 6 tabanında yazılan bir sayı için ardışık üç adet 1 rakamının olduğu temel durumlar dört farklı şekildedir. Bunlar,

111---, -111--, --111-, ---111 dir. İkilik tabanda kullanılan sayılar 0 ve 1 olduğundan ve sayımız 6 basamaklı olacağından -111-- sayısında baştaki - yerine 1 gelmek zorundadır. Buna göre, -111—ile 111--- durumları aynıdır. O halde üç farklı duruma göre inceleme yapacağız.

111--- formunda yazılabilecek farklı sayıların kümesine A,

--111- formunda yazılabilecek farklı sayıların kümesine B,

---111 formunda yazılabilecek farklı sayıların kümesine C diyelim.

Buna göre aranan durumların sayısı;

$(|A|+|B|+|C|) - (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C| = (8+4+4)-(2+1+2)+1=12$ dir.

Örnek 14

Bir ailenin 6 çocuğundan 3ü kız 3ü erkektir. Bu altı çocuk yan yana 3 erkek kendi aralarında, 3 kız kendi aralarında yan yana olmayacak şekilde kaç değişik şekilde oturabilirler?

Çözüm

Önce 6 kişinin yerlerine erkek ve kız için olma durumlarının sayısına bakalım. Sıralamayı sonra yapacağız. Altı yerden üçünü erkekler için seçeriz geriye kalan üç yer de kızlar için olur. Bu durum, $\binom{6}{3} = 20$ farklı şekilde gerçekleşir. Bunlardan dört tanesi 3 erkeğin yan yana olduğu durumlardır. Bunlar, EEEKKK, KEEEKK, KKEEEK, KKKEEE dir. Bu durumlar 3 kızın yan yana olduğu durumlar için de geçerlidir. Bunlar, KKKEEE, EKKKEE, EEKKKE, EEEKKK şeklindedir. Sıralamalarda da görüldüğü gibi iki sıralama (altları çizili) ortaktır. O halde 3 erkek veya 3 kızın yan yana olduğu durumların sayısı, 4+4-2=6 dır. Tüm durumlardan bu altı durumu çıkartırsak, 20-6=14 farklı durum için 3 erkek ve 3 kız yan yana değildir. Yani aranan durumların sayısı, 14.3!.3!=504 bulunur.

Örnek 15

$f:\{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow \{1,2,3,4,5,6\}$ tanımlanan bir f için, $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$ için $f(i)\neq i$ olmak üzere, kaç farklı bire-bir f fonksiyonu tanımlanabilir?

Çözüm

f fonksiyonu birre-bir olduğundan dolayı aynı zamanda örtendir. İçerme dışarma ilkesinden toplam fonksiyon sayısı

$6! - \binom{6}{1}\cdot 5! + \binom{6}{2}\cdot 4! - \binom{6}{3}\cdot 3! + \binom{6}{4}\cdot 2! - \binom{6}{5}\cdot 1! + \binom{6}{6}\cdot 0! = 265$ bulunur.

Örnek 16

n ≤ 3150 olmak üzere, 3150 ile en az 3 asal çarpanı ortak olan kaç farklı n pozitif tam sayısı vardır?

Çözüm

$3150=2.3^2.5^2.7$ şeklinde asal çarpanlarına ayıralım. n sayısının en az 3 asal çarpanı 3150 sayısınınki ile ortak olacağından, n sayısı; 2.3.5=30, 2.3.7=42, 2.5.7=70 veya 3.5.7=105 sayılarından birinin katı olmalıdır.

30un katı olan, $\frac{3150}{30}=105$ adet n ≤ 3150 sayısı vardır. Benzer şekilde, 42nin katı olan, $\frac{3150}{42}=75$, 70in katı olan, $\frac{3150}{70}=45$ veya 105 in katı olan, $\frac{3150}{105}=30$ adet n ≤ 3150 sayısı vardır.

2.3.5.7=210 un katı olan n ≤ 3150 tam sayısı dördünde de sayıldığından 105+75+45+30=255 toplamından $\frac{3\cdot 3150}{210}=45$ sayısını çıkartmalıyız.

Bu da 255 – 45 = 210 demektir.

Örnek 17

10^{10}, 15^7 ve 18^{11} sayılarından en az birinin pozitif tam sayı böleni olan sayıların sayısı kaçtır?

Çözüm

A, B ve C sırasıyla 10^{10}, 15^7 ve 18^{11} sayılarının pozitif bölenlerinin oluşturdukları kümeler olsun. Buna göre bulmamız gereken,

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-(|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$ dir.

$10^{10}=2^{10}.5^{10}$ olduğundan, $|A|=11.11=121$

$15^7=3^7.5^7$ olduğundan, $|B|=8\cdot 8=64$

$18^{11}=2^{11}\cdot 3^{22}$ olduğundan, $|C|=12\cdot 23=276$

$A \cap B$; ebob(10^{10},15^7)= 3^7 olduğundan, | $A \cap B$ |=8

$A \cap C$; ebob(10^{10},18^{11})= 2^{10} olduğundan, | $A \cap C$ |=11

$B \cap C$; ebob(15^7,18^{11})= 3^7 olduğundan, | $B \cap C$ |=8

$A \cap B \cap C$; ebob(10^{10},15^7,18^{11})= 1 olduğundan, | $A \cap B \cap C$ |=1 olup

| $A \cup B \cup C$ | = |A|+|B|+|C|-(| $A \cap B$ |+| $A \cap C$ |+| $B \cap C$ |)+| $A \cap B \cap C$ |

= 121+64+276-8-11-8+1=435 tir.

Örnek 18

Beş haneli dizinlerin kaç tanesinde, bir rakam en az üç defa yazılmıştır? 03005, 22922 ve 33333 sorudaki şartı sağlayan beş haneli dizinlerdir.

Çözüm

Beş haneli dizinde, bir rakam en az üç defa geçeceğinden, başka bir rakamın dizinde, aynı şartlarda bulunması mümkün değildir. Bundan dolayı herhangi bir rakam için soruda verilen şartları sağlayan dizini bulup, bulunan bu sayıyı 10 ile çarpmak sorunun çözümü olacaktır. Örneğin, en az üç sıfır rakamını içeren beş haneli dizin sayısını bulup, bu durum on farklı rakam için de geçerli olduğundan bu sayıyı 10 ile çarpalım.

i) Üç hanesinde 0 bulunan beş haneli dizinlerin sayısı $\binom{5}{3} \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

ii) Dört hanesinde 0 bulunan beş haneli dizinlerin sayısı $\binom{5}{4} \cdot 10 = 50$ olup bu durum yukarıda dört defa sayıldığından üç tanesini, yani 3·50=150 tane durumu çıkartmalıyız.

iii) Beş tanesinde 0 olduğu beş haneli dizinlerin sayısı i)de on defa sayılıp ii)de 3.5 defa sayılıp çıkartıldığından 10 – 15 = -5 eksik sayılmış demektir. O halde 1 defa sayılması için 6 eklemeliyiz.

Buna göre, aranan durumların sayısı; 1000-150+6=856 dan 856.10=8560 olur.

Örnek 19

Bir sihirbaz gösteri için gittiği A şehrine beş yardımcısı ile beraber gidiyor. Sihirbaz bu şehirdeki gösterisi boyunca yardımcılarından biriyle 10 kez, ikisiyle 5 kez, üçüyle 3 kez, dördüyle 2 kez ve tüm yardımcılarıyla beraber de bir kez akşam yemeği yiyor. Sihirbaz 6 gün de akşam yemeğini yalnız olarak yediyse bu şehirdeki gösterisi kaç gün sürmüştür?

Çözüm

S_1: Sihirbaz herhangi bir yardımcısıyla 10 kez yemek yedi.

S_2: Sihirbaz herhangi iki yardımcısıyla 5 kez yemek yedi.

S_3: Sihirbaz herhangi üç yardımcısıyla 3 kez yemek yedi.

S_4: Sihirbaz herhangi dört yardımcısıyla 2 kez yemek yedi.

S_5: Sihirbaz beş yardımcısıyla 1 kez yemek yedi.

Buna göre sihirbazın gösterisi, $S_1-S_2+S_3-S_4+S_5=10-5+3-2+1=7$ olup 6 da yalnız başına yemek yediğine göre toplam, $7+6=13$ gün sürmüştür.

Örnek 20

Beş takımın katıldığı bir turnuvada her takım diğer dört takımdan her biri ile bir defa karşılaşıyor. Beraberliğin olmadığı bu turnuvada her takım yenme ve yenilmede aynı şansa sahipler. Bu turnuvada, her karşılaşmasını kazanmış veya her karşılaşmasını kaybetmiş takımın olmaması olasılığı kaçtır?

Çözüm

A; Bazı takımlardan yaptığı tüm karşılaşmaları kazanma durumlarının olduğu karşılaşmaların kümesi olsun.

B; Bazı takımlardan yaptığı tüm karşılaşmaları kaybettiği durumlarının olduğu karşılaşmaların kümesi olsun.

Bu turnuvada beş takımdan her biri diğer dört takımdan her biri ile bir defa karşılaşıyorsa, hiç yenilgisi olmayan takım tek olacaktır. Aynı şekilde, yaptığı her karşılaşmayı kaybeden takım da tek olacaktır.

Buna göre, sorunun çözümü için $| A\cup B |=|A|+|B|-| A\cap B |$ bulmalıyız.

Bu turnuvadaki karşılaşma sayısı $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ dur. Şayet karşılaşmada hiç yenilmeyen takım varsa bu durumun tek takım için olacağını söyleyebiliriz. Bir takım hepsini yenmeli ki hiç yenilmeyen olsun. Bu durumda da hiç yenilmeyen takım olması durumu tektir. Bir takım yaptığı dört karşılaşmayı hep kazanmışsa geriye kalan 10−4=6 karşılaşma yenilgi, galibiyet şeklinde gerçekleşecektir.

Buna göre, $|A|=\binom{5}{1}\cdot 2^6=320$ olur.

Aynı şekilde yaptığı tüm karşılaşmaları (dört karşılaşmanın dördünü de) kaybeden takım olması durumu da tektir. Dört karşılaşmanın sonucu hep yenilgi ile sonuçlandığı kesin. Buna göre geriye kalan 10-4=6 karşılaşma yenilgi, galibiyet şeklinde gerçekleşecektir.

Buna göre, $|B|=\binom{5}{1}\cdot 2^6=320$ olur.

Şimdi $| A\cap B |$ yi hesaplayalım. Turnuvada dört karşılaşma hep galibiyetle sonuçlanırken dört karşılaşma da hep yenilgi ile sonuçlandı. Fakat karşılaşmalarından biri hiç yenilmeyen takımla hep yenilen takım arasında oynandığından, geriye kalan 10-4-4+1=3 karşılaşma yenilgi, galibiyet şeklinde gerçekleşecektir. Buna göre,

$|A\cap B|=\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}2^3=160$ olur.

Buradan $| A\cup B |=|A|+|B|-| A\cap B |=$ 320+320-160=480 bulunur. Beraberliğin olmadığı on karşılaşmanın kazanma veya kaybetme şeklindeki sonucu $2^{10}=1024$ farklı şekilde gerçekleşeceğinden aranan olasılık,

$1-\frac{480}{1024}=\frac{17}{32}$ bulunur.

Örnek 21

Pınar 5 farklı çikolatayı 3 farklı kutuya her kutuda en az bir çikolata olacak şekilde kaç farklı şekilde dağıtabilir?

Çözüm

5 farklı çikolatayı 3 farklı kutuya hiçbir şart olmadan 3^5=243 farklı şekilde dağıtılır. Fakat hiçbir kutu boş kalmayacak şekilde bir dağıtım olduğu için 1 kutusunun boş kalması durumunu hesaplayalım:

1. kutu boş olursa diğer iki kutuya dağıtım hiçbir şart olmadan 2^5=32 farklı şekilde gerçekleşir. Kutular farklı olduğundan, bunu 2. veya 3. kutunun boş olması durumuna göre ayrı ayrı hesaplarsak toplam durum 3.2^5=96 bulunur.

Fakat 1. kutunun boş olması durumunda 2. ve 3. kutuya yapılan dağıtımda hiçbir şart olmadığından 2. veya 3. kutuların boş olma durumlarını da saymış olduk. Buna göre elde edilen sonuca, 1. ve 2. kutuların boş olma durumunu, 2. ve 3. kutunun boş olma durumunu ve 1. ve 3. kutuların boş olma durumlarını eklemeliyiz. Bu da her bir ikili için 1 durumdur. O halde, içerme dışarmadan aranan sonuç; 243-96+3=150 bulunur.

Örnek 22

KARAKOL kelimesinin farklı dizilişlerinin kaç tanesinde iki A harfi ve iki K harfi yanyana bulunmaz?

Çözüm

Önce KARAKOL kelimesindeki harflerin farklı dizilişlerinin sayısını bulalım. Bunlar, $\frac{7!}{2!.2!}$ farklı şekilde dizilirler. Daha sonra iki A yan yana veya iki K yan yana olan dizilişlerin sayısını bulalım. Bu da, K**AA**RKOL ve **KK**ARAOL den, $\frac{6!}{2!}$ olup iki tane olduğundan 2. $\frac{6!}{2!}$ dir. İki AA ve iki KK nin yan yana olduğu durumların sayısını bulalım. (**KK**R**AA**OL gibi) Bu da 5! farklı diziliş demektir. Buna göre aranan durum,

$$\frac{7!}{2!.2!} - 2.\frac{6!}{2!} + 5! = 660 \text{ bulunur.}$$

Örnek 23

10 haneli sayılardan sadece ilk dört rakamı ile bir sonraki dört rakamı aynı olan veya ilk dört rakamı ile son dört rakamı aynı olan sayılara *ezberlenebilir sayı* diyelim. Örneğin, 1234123478, 3444783444 sayıları ezberlenebilir sayı iken, 3344443334 sayısı ezberlenbilir sayı değildir. Buna göre kaç tane ezberlenebilir sayı vardır?

Çözüm

X, ilk dört rakamı ile bir sonraki dört rakamı aynı olan sayıların kümesi ve Y, ilk dört rakamı ile son dört rakamı aynı olan sayıların kümesi olsun. Buna göre X kümesinin elemanlarından biri *abcdabcdef* ve Y kümesinin elemanlarından biri *abcdxyabcd* olsun. İki sayı X∩Y elemanı olduğunda *abcd=cdef* ve *abcd=xyab* olmalıdır. Buna göre, X∩Y nin elemanı olan ezberlenebilir sayı *ababababab* formundadır.

$|X|$= 9.10.10.10.1.1.1.1.10.10=90000 ve

$|Y|$= 9.10.10.10.10.10.1.1.1.1=90000 dir.

X∩Y, ilk dört rakamı ile sonraki dört rakamı ve son dört rakamı aynı olan sayıların kümesi olsun. İlk dört rakamı ile sonraki dört rakamı ve son dört rakamı aynı olan on basamaklı sayı *ababababab* formunda olup, bu formda olan on basamaklı sayıların sayısı da 9.10=90 dır. Yani $|X \cap Y|$=9.10=90 dır.

Buna göre, $|X \cup Y|=|X| + |Y| - |X \cap Y|$=90000+90000-90 = 1799910 bulunur.

Örnek 24

211 den küçük, 126 ile aralarında asal olan kaç tane pozitif tamsayı vardır?

Çözüm

211 den küçük, 126 ile aralarında asal olan sayıların sayısını bulmak için, $126=2.3^2.7$ olduğundan, 2,3 ve 7 ile bölünmeyen 211 den küçük sayıların sayısını bulmalıyız.

A; 211 den küçük 2 ile bölünen pozitif tam sayıların kümesi

B; 211 den küçük 3 ile bölünen pozitif tam sayıların kümesi

C; 211 den küçük 7 ile bölünen pozitif tam sayıların kümesi olsun.

2,3 veya 7 ile bölünüyorsa bu sayı 126 ile aralarında asal değildir. Buna göre,

$\frac{210}{2}$=105, $\frac{210}{3}$=70, $\frac{210}{7}$=30, $\frac{210}{2.3}$=35, $\frac{210}{2.7}$=15, $\frac{210}{3.7}$=10 ve $\frac{210}{2.3.7}$=5 'den İçerme Dışarma İlkesinden aranan durum sayısı;

210- $(|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$dir

210-(105+70+30)+(35+15+10)-5=60 bulunur.

Örnek 25

{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} rakamları ile n basamaklı bir dizin yazılıyor. Bu dizinlerin kaçında 1,2,3 rakamları aynı dizinde bulunurlar?

Çözüm

N; {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} rakamları ile yazılabilecek n basamaklı dizinlerin sayısı; 10^ndir.

S_1; 1,2,3 rakamlarından birinin bulunduğu n basamaklı dizinlerin sayısı; $\binom{3}{1}9^n$dir.

S_2; 1,2,3 rakamlarından ikisinin bulunduğu n basamaklı dizinlerin sayısı; $\binom{3}{2}8^n$dir.

S_3; 1,2,3 rakamlarından üçünün bulunduğu n basamaklı dizinlerin sayısı; $\binom{3}{3}7^n$dir.

Buna göre aranan durumların sayısı İçerme-Dışarma Prensibinden,

10^n- $\binom{3}{1}9^n + \binom{3}{2}8^n - \binom{3}{3}7^n$

bulunur.

Örnek 26

1000 den küçük 10 ve 12 (her ikisi) ile aralarında asal olan kaç tane pozitif tamsayı vardır?

Çözüm

10 ve 12 sayılarından her ikisi ile aralarında asal olan sayılar, 10=2.5 ve 12=2^2.3 olduğundan, 2,3 ve 5 ile bölünemeyen sayılar 10 ve 12 ile aralarında asal sayılardır.

$$\frac{999}{2}=499,\ \frac{999}{3}=333,\ \frac{999}{5}=199, \frac{999}{2.3}=166, \frac{999}{2.5}=99,\ \frac{999}{3.5}=66 \text{ ve } \frac{999}{2.3.5}=33$$

şeklinde elde edilen sonuçlara göre İçerme-Dışarma Prensibinden aranan sonuç,

999- (499 + 333 + 199) + (166 + 99 + 66) – 33 = 266 bulunur.

Örnek 27

3 Amerikan, 3 Türk ve 3 Fransız delege aynı milletten 3 kişi yanyana olmayacak şekilde kaç değişik şekilde otururlar?

Çözüm

Amerikan olan delegeler A_1,A_2 ve A_3; Türk delegeler T_1,T_2 ve T_3 , Fransız delegeler F_1,F_2 ve F_3 olsun. Bu durumu İçerme Dışarma İlkesine göre,

Tüm durumlar – Tek milletten üçlünün A_i lerin yan yana olduğu durumlar + İki milletten üçlünün A_i, T_i yan yana olduğu durumlar – Üç milletten üçündeki üçlülerin yan yana olduğu durumlar şeklinde hesaplarız.

Tüm durumlar 9! dir.

Tek milletten üçlünün A_i lerin yan yana olduğu durumlar:3.3!.7!

İki milletten üçlünün A_i, T_i yan yana olduğu durumlar: $\binom{3}{2}.\ 3!\ .3!\ .5!$

Üç milletten üçündeki üçlülerin yan yana olduğu durumlar: 3!. 3!. 3!. 3!

9! - 3.3!.7!+$\binom{3}{2}.\ 3!\ .3!\ .5!$ - 3!. 3!. 3!. 3! = 362880-90720+12960-1296=283284 bulunur.

Örnek 28

Ali Haydar 7 arkadaşından her gün 3 kişiyi yemeğe davet ediyor. Davet 1 hafta sürüyor. Ali'nin her arkadaşının en az bir kez yemeğe katılmış olduğu kaç farklı durum vardır?

Çözüm

N, 7 kişinin 3 kişilik gruplar halinde 7 gün akşam yemeğine daveti, hiçbir şart olmaksızın $\binom{7}{3}^7$ farklı şekilde gerçekleşir.

S_1; Bir kişinin hiç davete katılmadığında oluşacak farklı durumların sayısı; $\binom{7}{1}\binom{6}{3}^7$

S_2; İki kişinin hiç davete katılmadığında oluşacak farklı durumların sayısı; $\binom{7}{2}\binom{5}{3}^7$

S_3; Üç kişinin hiç davete katılmadığında oluşacak farklı durumların sayısı; $\binom{7}{3}\binom{4}{3}^7$

S_4; Dört kişinin hiç davete katılmadığında oluşacak farklı durumların sayısı; $\binom{7}{4}\binom{3}{3}^7$

Buna göre aranan durumların sayısı İçerme-Dışarma Prensibinden,

$$\binom{7}{3}^7 - \binom{7}{1}\binom{6}{3}^7 + \binom{7}{2}\binom{5}{3}^7 - \binom{7}{3}\binom{4}{3}^7 + \binom{7}{4}\binom{3}{3}^7$$

bulunur.

Örnek 29

15 öğrenci Matematik, Fizik ve Biyoloji derslerinden birinden dönem ödevi alacaklar. Her dersten en az bir öğrecinin ödev alması gerektiğine göre bu dağılım kaç farklı şekilde yapılabilir?

Çözüm

15 öğrencinin üç dersten birini seçmeleri durumu hiçbir şart olmaksızın 3^{15} farklı şekilde gerçekleşebilir.

Herhangi bir dersin seçilmemesi durumu; $\binom{3}{1}.\,2^{15}$

Herhangi iki dersin seçilmeme durumu; $\binom{3}{2}.\,1^{15}$ farklı şekilde gerçekleşir.

İçerme Dışarma İlkesine göre, aranan durum sayısı;

$3^{15} - \binom{3}{1}.\,2^{15} + \binom{3}{2}.\,1^{15}$ = 14250606 bulunur.

Örnek 30

5 ikiz kardeş yan yana dizili 10 sandalyeye iki ikiz yan yana olmayacak şekilde kaç değişik biçimde oturabilirler?

Çözüm

İçerme Dışarma İlkesine göre,

$$\text{Tüm durumlar-}\begin{pmatrix}\text{Bir ikiz ikilisinin}\\ \text{yanyana olduğu}\\ \text{durumların sayısı}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{İki ikiz ikilisinin}\\ \text{yanyana olduğu}\\ \text{durumların sayısı}\end{pmatrix}-\ldots-\begin{pmatrix}\text{Tüm ikizlerin}\\ \text{yanyana olduğu}\\ \text{durumların sayısı}\end{pmatrix}$$

$= 10! - \binom{5}{1}.2.9! + \binom{5}{2}.2^2.8! - \binom{5}{3}.2^3.7! + \binom{5}{4}.2^4.6! - \binom{5}{5}.2^5.5! = 1263360$ bulunur.

Örnek 31

3 Amerikan, 3 Türk, 3 Fransız ve 3 İngiliz yan yana iki kişinin oturabileceği koltuklardan art arda 6 tane olan küçük bir uçağa bineceklerdir. Aynı milletten iki kişi yan yana olmayacak şekilde kaç farklı biçimde oturabilirler?

Çözüm

Tüm durumların sayısı, 12 kişi için, ilk koltuğa 12 farklı durum, ikinci koltuğa 11 farklı durum .. olup herhangi bir şart olmadan farklı oturmaların sayısı 12! dir.

$|A|$ iki Amerikalının yan yana oturduğu durumların sayısı olsun. Buna göre, $\binom{3}{2}$=3 üç kişiden iki kişiyi aldık, 6 sıradan birine oturabilirler, yan yana iki farklı şekilde oturabilirler. Bu da; $|A| = 3.2.6.10!$ demektir. Bu şekilde dört grup vardır.

$|A \cap F|$ iki Amerikalının ve iki Fransızın yan yana oturduğu durumların sayısı olsun. Buna göre, $\binom{3}{2}$=3 üç kişiden iki kişiyi aldık, 6 sıradan birine oturabilirler, diğer ikili de kalan beş yerden birine otururlar. Yan yana iki farklı şekilde oturabilirler. Bu da; $|A \cap F| = 3.2.3.2.6.5.8!$ demektir. Bu şekilde altı farklı ikili grup oluşturulabilir.

$|A \cap F \cap T|$ iki Amerikalının, iki Fransızın ve iki Türkün yan yana oturduğu durumların sayısı olsun. Buna göre, $\binom{3}{2}$=3 üç kişiden iki kişiyi aldık, 6 sıradan birine oturabilirler, diğer ikili de kalan beş yerden birine otururlar ve son ikili de 4 yerden birine otururlar. Yan yana iki farklı şekilde oturabilirler. Bu da;

$|A \cap F \cap T|$ = 3.2.3.2.3.2.6.5.4.6! demektir. Bu şekilde dört farklı ikili grup oluşturulabilir.

$|A \cap F \cap T \cap \text{İ}|$ = 3.2.3.2.3.2.3.2.6.5.4.3.4! demektir. Bu şekilde tek ikililer grupları oluşturulabilir.

Buna göre aranan durum;

12!-6.3.2.3.2.6.5.8!+4.3.2.3.2.3.2.6.5.4.6! − 1. 3.2.3.2.3.2.3.2.6.5.4.3.4!= 154275840 dır.

Örnek 32

6 farklı çikolata dört çocuğa, her çocuk en az bir tane alacak şekilde kaç değişik biçimde dağıtılabilir?

Çözüm

6 farklı çikolata dört çocuğa hiçbir şart olmadan 4^6 farklı şekilde dağıtılır. Bir çocuğun almaması durumunda ise üç çocuğa $\binom{4}{3}.3^6$ farklı şekilde, iki çocuğun almaması durumunda diğer iki çocuğa $\binom{4}{2}.2^6$ farklı şekilde dağıtılır. Bir çocuğa da, $\binom{4}{1}.1^6$ farklı şekilde dağıtılır. İçerme Dışarma Prensibine göre,

4^6- $\binom{4}{3}.3^6$ + $\binom{4}{2}.2^6$ – $\binom{4}{1}.1^6$ = 4096-2916+384-4= 1560 bulunur.

Örnek 33

6 basamaklı sayıların kaç tanesinde en az bir tane 1, en az bir tane 2 ve en az bir tane 3 rakamı vardır?

Çözüm

X, altı basamaklı farklı sayıların kümesini,

A; rakamlarından hiçbirinin 1 olmadığı altı basamaklı sayıların kümesini,

B; rakamlarından hiçbirinin 2 olmadığı altı basamaklı sayıların kümesini,

C; rakamlarından hiçbirinin 3 olmadığı altı basamaklı sayıların kümesini göstersin.

Buna göre,

$|X|=9.10^5$, $|A|=|B|=|C|=8.9^5$ tir.

$|A\cap B|=|B\cap C|=|A\cap C|=7.8^5$ ve $|A\cap B\cap C|=6.7^5$ olup buna göre aranan durumların sayısı İçerme Dışarma Prensibine göre,

$9.10^5-3.8.9^5+3.7.8^5-6.7^5=70110$ bulunur.

Örnek 34

100 özdeş bilye 5 farklı kutuya dağıtıldığında kutulardan hiçbirinin boş kalmama olasılığı nedir?

Çözüm

X; 100 özdeş bilyenin 5 farklı kutuya dağılımlarının sayısı; 5^{100}

S_1; Herhangi bir kutunun boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{1}.4^{100}$

S_2; Herhangi iki kutunun boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{2}.3^{100}$

S_3; Herhangi üç kutunun boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{3}.2^{100}$

S_4; Herhangi dört kutunun boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{4}.1^{100}$

S_2; Beş kutunun da boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{5}.0^{100}$ olup, aranan olasılık,

$$\frac{5^{100}-\binom{5}{1}4^{100}+\binom{5}{2}3^{100}-\binom{5}{3}2^{100}+\binom{5}{4}1^{100}-\binom{5}{5}0^{100}}{5^{100}}=\frac{\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\cdot\binom{5}{i}(5-i)^{100}}{5^{100}}$$ dir.

Örnek 35

2 Kimya, 2 Biyoloji, 2 Fizik bilim insanından oluşan 6 kişilik heyet aynı daldan iki bilim insanı yan yana olmayacak şekilde bri yuvarlak masa etrafında kaç farklı şekilde otururlar?

Çözüm

Altı kişinin hiçbir şart olmadan yuvarlak masa etrafına farklı şekilde yan yana oturmalarının kümesi X, iki Kimyacı yanyana olacak şekilde oturduklarında farklı durumların kümesi K, iki Fizikçi yanyana olacak şekilde oturduklarında farklı durumların kümesi F ve iki Biyolojici yanyana olacak şekilde oturduklarında farklı durumların kümesi B olsun.

Buna göre aranan durumların sayısı;

$$|X| - (|K| + |F| + |B|) + (|K \cap F| + |F \cap B| + |K \cap B|) - |K \cap F \cap B|$$

= 5! - (3 . 4! . 2) + 3 .3!.2.2-2!.2.2.2 = 120-144+72-16 = 32 bulunur.

Örnek 36

Yedi arkadaş su savaşı yapıyorlar. Yedi kişiden her biri diğer altı kişiden birine su tabancası ile su sıkıyor. Bu su savaşında iki kişini birbirine su sıkıyor olmaları olasılığı nedir?

Çözüm

Bu yedi kişiyi a_1, a_2, … , a_7 ile gösterelim. a_1, 6 farklı kişiden birine sıkar. Hiçbir şart olmadan yedi kişinin birbirine su suıkışlarındaki farklı durumların sayısı, her birinin diğer altı kişiden birine atma durumu olacağından, 6.6.6.6.6.6.6=6^7 dir.

En az iki kişinin (bir ikilinin) birbirlerine su sıkmaları durumunda 7 kişinin farklı su sıkmalarının sayısını bulmak için önce 7 kişiden ikisini seçeriz. Bunlar birbirlerine su sıkar. Geriye kalan beş kişiden her birinin 6 kişiden birine sıkma şansı olduğundan, aranan farklı durumların sayısı, $\binom{7}{2}.6^5$ tir.

İki ikilinin karşılıklı birbirlerine su sıkmaları durumunda 7 kişinin farklı su sıkmalarının sayısı, $\frac{\binom{7}{2}.\binom{5}{2}.6^3}{2!}$ dir.

Üç ikilinin karşılıklı birbirlerine su sıkmaları durumunda 7 kişinin farklı su sıkmalarının sayısı, $\frac{\binom{7}{2}.\binom{5}{2}.\binom{3}{2}6^1}{3!}$ dir.

Buna göre aranan olasılık, P(A)= $\frac{\binom{7}{2}.6^5-\frac{\binom{7}{2}.\binom{5}{2}.6^3}{2!}+\frac{\binom{7}{2}.\binom{5}{2}.\binom{3}{2}6^1}{3!}}{6^7}$ dir.

Örnek 37

{1,2,3,4,5,6} kümesi veriliyor. P, S kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere, P kümesinde olan bir veya iki küme rastgele alınarak A ve B kümesi olarak yazılıyor. (İki küme birbirinden farklı olmak zorunda değil)

Buna göre, B kümesinin A veya S\A kümesinin bir alt kümesi olma olasılığı nedir?

Çözüm

i) B, A kümesinin bir alt kümesi olsun. Yani x∈S için B⊂A ise, x için üç farklı durum vardır.

a) x∈A ve x∈B olabilir.

b) x∈A ve x∉ B olabilir.

c) x∉A ve x∉ B olabilir.

Yani x elemanı üç farklı yerden birine gidebilir. Buna göre S kümesinin her bir elemanı üç farklı yerden birine gidebileceğinden elde edilecek (A,B) ikililerinin sayısı 3.3.3.3.3.3=3^6 dır.

ii) B, S\A nın alt kümesi olsun. Bu durumda da önceki durumda olduğu gibi bir elemanın gidebileceği üç farklı yer vardır. Buna göre elde edilecek (A,B) ikililerinin sayısı 3.3.3.3.3.3=3^6 dır.

iii) $B \subset A$ ve $B \subset S \setminus A$ durumu için $B \cap S \setminus A = \emptyset$ olduğundan $B \subset \emptyset$ demektir. $B = \emptyset$ ise S deki her bir elemanın gidebileceği iki farklı yer olacağından farklı (A,B) ikililerinin sayısı $2.2.2.2.2.2=2^6$ olacaktır.

(A,B) ikililerinin toplamdaki sayısı ise $2^6.2^6=2^{12}$ olduğundan, B kümesinin A veya S\A kümesinin bir alt kümesi olma olasılığı;

$\frac{2.3^6-2^6}{2^{12}} = \frac{697}{2048}$ bulunur.

Örnek 38

20 kişi 3 odaya her bir odada en az bir kişi olmak şartıyla kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

Çözüm

N; 20 kişinin üç odaya hiçbir şart olmadan farklı dağılımlarının sayısı; 3^{20}

S_1; Üç odadan herhangi birinin boş olduğu durumların sayısı; $\binom{3}{1}.2^{20}$

S_2; Üç odadan herhangi ikisinin boş olduğu durumların sayısı; $\binom{3}{2}.1^{20}$

S_3; Üç odadan hepsinin boş olduğu durumların sayısı; $\binom{3}{3}.0^{20}$

Buna göre, aranan durumların sayısı, İçerme Dışarma Prensibinden,

$3^{20}-\binom{3}{1}.2^{20}+\binom{3}{2}.1^{20}-\binom{3}{3}.0^{20}$ bulunur.

Örnek 39

Beş farklı mektubu beş farklı posta kutusuna, en az bir posta kutusu boş kalacak biçimde kaç değişik şekilde yerleştirebiliriz?

Çözüm

S_1; Beş kutudan herhangi birinin boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{1}.4^5$

S_2; Beş kutudan herhangi ikisinin boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{2}.3^5$

S_3; Beş kutudan herhangi üçünün boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{3}.2^5$

S_4; Beş kutudan herhangi dördünün boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{4}.1^5$

S_5; Beş kutunun hepsinin boş olduğu durumların sayısı; $\binom{5}{5}.0^5$

Buna göre, aranan durumların sayısı, İçerme Dışarma Prensibinden,

$\binom{5}{1}.4^5 - \binom{5}{2}.3^5 + \binom{5}{3}.2^5 - \binom{5}{4}.1^5 + \binom{5}{5}.0^5$ bulunur.

Örnek 40

21 öğrenciden oluşan ve herhangi üç öğrencisinin en az ikisi arkadaş olan bir sınıfta en az **k** arkadaşı olan bir öğrenci varsa **k** nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

Çözüm

En çok arkadaşa A sahip olsun.

A ve B öğrencilerini alalım.

A-B-X üçlüsünü alalım. (X herhangi bir öğrenci)

X(A) = A ile arkadaş olan X öğrencilerinin sayısı,

X(B) = B ile arkadaş olan X öğrencilerinin sayısı,

X(A∩B) = Hem A hem de B ile arkadaş olan X öğrencilerinin sayısı olsun.

X(A∩B) en az 2 olur.

İçerme Dışarma Prensibinden:

$X(A) + X(B) - X(A\cap B) = 19$

$X(A) \geq X(B)$ ve $X(A) + X(B) \geq 19$

$2\cdot X(A) \geq 19$ olduğundan X(A) nın alabileceği en küçük değer 10 olur.

BÖLÜM 4

OLİMPİYATLARDA ÇIKMIŞ SORULAR VE ÇÖZÜMLERİ

SORU 1

26 takımın katıldığı bir turnuvada her takım ikilisi aralarında tam olarak bir maç yapıyor. A takımı B takımını, B takımı C takımını, C takımı da A takımını yenerse {A, B, C} küumesine tuhaf küume diyelim. Bu turnuvada tuhaf küme sayısı en çok kaç olabilir? **(UMO-2018)**

a) 684 b) 696 c) 712 d) 728 e) 736

ÇÖZÜM

Tuhaf olmayan her {A, B, C} kümesinde bir takımın diğer iki takımı yenmesi gerekiyor. m tane takımı yenmiş her takım $\binom{m}{2}$ tane tuhaf olmayan küme oluşturacaktır. Demek ki tuhaf olmayan kümelerin sayısının en az olması için takımların kazandıkları maç sayıları bibirlerine mümkün olduğunca yakın olmalıdır ve bu durumda da 13 takımın 13, kalan 13 takımın ise 12 takımı yenmesi gerekiyor. Bunun için bir çember etrafına dizilmiş 26 takımın her birinin saat yönündeki ilk 12 takımı yenmesi gerekiyor, diğer maç sonuçları önemli değildir.

$$\binom{26}{2} - 13 \cdot \binom{13}{2} - 13 \cdot \binom{12}{2} = 728$$

Cevap D

SORU 2

210^9 doğal sayısının pozitif bölenlerinin kaç tanesi 4, 9, 25, 49 doğal sayılarından en az ikisine tam bölünür? **(UMO-2017)**

A) 9984 B) 9744 C) 9728 D) 9648 E) 9216

ÇÖZÜM

210^9 doğal sayısının tüm pozitif tam bölenleri $0 \leq a, b, c, d \leq 9$ olmak üzere $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ şeklindedir. Soruda istenen koşul ise, a, b, c, d tam sayılarının en az ikisinin 2 den büyük veya eşit olmasıdır. Dolayısıyla istenmeyen durumların sayısı

$$\underbrace{2^4}_{\text{(her birinin 2 den küçük olması)}} + \underbrace{4 \cdot 8 \cdot 2^3}_{\text{(tam olarak birinin 2 den büyük veya 2 ye eşit olması)}} = 272$$

Tüm durumların sayısı da 10^4 olduğundan $10000 - 272 = 9728$

Cevap C

SORU 3

KARPUZ kelimesinin harfleri ile yazılabilecek olan tüm kelimelerin kaç tanesinde ya K, A'dan önce, ya da R, A'den sonra, ya da R, P'den öncedir? (Burada önce ya da sonra ifadeleri yan yana olmaları gerektiği anlamına gelmez) **(UMO-2017)**

A) 696 B) 690 C) 660 D) 600 E) 580

ÇÖZÜM

KARPUZ kelimesinin harfleri ile yazılabilecek 6 harfli tüm kelimelerin sayısı 6! = 720 dir. Soruda verilen şartın sağlanmaması için A, K, P, R harfleri soldan sağa tam olarak P, R, A, K sırasında olmalıdır. Dolayısıyla istenmeyen kelimelerin sayısı

$$\frac{6!}{4!} = 30\ olur. Buradan\ cevap\ 720 - 30 = 690\ bulunur.$$

Cevap B

SORU 4

1, 2, 3, 3, 5, 5, 8, 8 rakamlarını kullanarak aynı olan rakamlar yan yana olmayacak şekilde oluşturulabilen beş basamaklı kaç farklı şifre vardır? **(UMO-2017)**

A) 980 B) 840 C) 720 D) 660 E) 580

ÇÖZÜM

a, b, c, d, e harflerinin her biri 1, 2, 3, 5, 8 rakamlarından farklı

- 2 tane a, 2 tane b, 1 tane c veya
- 2 tane a, 1 tane b, 1 tane c, 1 tane d veya
- 1 tane a, 1 tane b, 1 tane c, 1 tane d, 1 tane e

içerebilir. Dolayısıyla toplam şifre sayısı

$$\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{5!}{2!\,2!}-\frac{4!}{2!}-\frac{4!}{2!}+3!\right)+\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\left(\frac{5!}{2!}-4!\right)+5!=660$$

Cevap D

SORU 5

$a_i \in \{0,1\}$ olmak üzere, kaç $(a_1, a_2, \ldots, a_{11})$ onbirlisi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$ koşulunu sağlar? **(UMO-2015)**

a) 682 b) 758 c) 864 d) 956 e) 1024

ÇÖZÜM

Cevap T olsun. Bir $(a_1, a_2, \ldots, a_{11})$ onbirlisinde ilk beş elemandan 0'a eşit olanların sayısı f(5), 1'e eşit olanların sayısı g(5), son altı elemandan 0'a eşit olanların sayısı f(6) ve son altı elemandan 1'e eşit olanların sayısı g(6) olsun. T sayısı f(5) < f(6) koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısıdır. Simetriden dolayı g(5) < g(6) koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısı da T'dir. O zaman g(5) ≥ g(6) koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısı 2^{11}–T olur. Yine simetriden dolayı f(5) ≥ f(6) koşulunu sağlayan onbirlilerin sayısı da 2^{11}–T olur. Buradan T +(2^{11}–T) = 2^{11} ve T = 2^{10} olur.

Cevap E

SORU 6

Köşeleri, verilmiş bir düzgün n-genin köşeleri üzerinde olan ikizkenar üçgenlerin sayısı s(n) olmak üzere, s(n) > s(n + 1) koşulunu sağlayan kaç n ≤ 2015 pozitif tam sayısı vardır? **(UMO-2015)**

a) 336 b) 403 c) 504 d) 671 e) 1007

ÇÖZÜM

İkizkenar üçgeninin tepe noktasını $\binom{n}{1}$ şekilde seçebiliriz. Geriye kalan iki nokta ise ikizkenar üçgen oluşturabilmek için $\binom{n-1}{2}$ farklı şekilde seçilebilir. Dolayısıyla oluşturulabilecek ikizkenar üçgen sayısı $n\binom{n-1}{2}$ kadardır. Ancak, oluşturulan ikizkenar üçgenler içinde eşkenar olanları (varsa) 3 kez saydık. Bu yüzden, eğer n sayısı 3 ile tam bölünüyorsa bu ifadeden $\frac{2n}{3}$çıkarılmalı. O zaman n+1 sayısı 3 ile tam bölünmüyorsa $s(n) \le s(n + 1)$ olduğu açık. $s(6k - 1) = (6k - 1)\cdot(3k - 1) = 18k^2 - 9k+1$ ve $s(6k) = 6k\cdot(3k-1) - 4k = 18k^2-10k$ olduğundan $k \ge 1$ için $s(6k-1) > s(6k)$ olur.
$s(6k + 2) = (6k +2)\cdot 3k = 18k^2+6k$ ve $s(6k+3) = (6k+3)\cdot(3k+1) - 2\cdot(2k+1) = 18k^2+11k+1$ olduğundan her $k \ge 1$ için $s(6k + 2) < s(6k + 3)$ olur. Bu şartı sağlayan sayılar $6k - 1$ formunda olan sayılardır ve bunlar da 5, 11, 17, 23, …, 2015 tir.

Cevap A

SORU 7

$x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23}$ olacak şekilde en az bir x tam sayısının bulunmasını sağlayan kaç farklı $0 \le a < 23$ tam sayısı vardır? **(UMO-2015)**

a) 5 b) 6 c) 10 d) 11 e) 12

ÇÖZÜM

$x^2 + 1 \equiv ax \pmod{23}$ olması için $\left(\frac{x-a}{2}\right)^2 \equiv \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1 \pmod{23}$ olacağından 23 modunda $x^2 - 1$ formundaki kare kalan sayısını bulmamız gereklidir. Tüm kare kalanlar 0, 1, 4, 9, 16, 2, 13, 3, 18, 12, 8, 6 ve $x^2 - 1$ formundaki tüm sayılar da 22, 0, 3, 8, 15, 1, 12, 2, 17, 11, 7, 5 sayılarıdır. Bunlardan 0, 3, 8, 1, 12, 2 sayıları kare kalan olur. Karşılık gelen a değerleri sırasıyla 2, 21, 4, 19, 6, 17, 10, 13, 12, 11, 14, 9 olur.

Cevap E

SORU 8

Bir sınıftaki 23 öğrenci üç gruba, birbirleriyle arkadaş olan öğrenciler aynı grupta olmayacak şekilde tek türlü dağıtılabiliyorsa, sınftaki arkadaş ikilisi sayısı en az kaç olabilir? **(UMO-2015)**

a) 41 b) 43 c) 46 d) 48 e) 50

ÇÖZÜM

Her öğrenciyi bir nokta ve arkadaşlıkları da bu noktaları birleştiren kenarlarla gösterelim. Gruplar A, B ve C olsun. $A \cup B$ çizgesi bağlantılı olmayıp $A \cup B = G_1 + G_2$ olduğunu varsayalım. O zaman $A \cap G_1$ ve $B \cap G_1$ deki elemanların yerleri değiştirilebilir ve bu da tek türlü dağıtılabilme koşuluyla çelişki oluşturur. Benzer şekilde $B \cup C$ ve $A \cup C$ çizgeleri de bağlantılıdır. A, B ve C nin eleman sayıları sırasıyla a, b ve c olsun. Toplam kenar sayısı en az $a + b - 1 + b + c - 1 + a + c - 1 = 2n - 3 = 46 - 3 = 43$ olacaktır. 43 için örnek: A ve B hem kendi aralarında hem de herkesle arkadaş olup, A ve B dışındaki herhangi ikili aralarında arkadaş olmazsa koşullar sağlanmış olur.

Cevap B

SORU 9

Tabanı $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ yedigeni olan bir piramidin her ayrıtının kırmızı ve mavi renklerden birine, bu piramidin her köşesinden herhangi bir diğer köşesine hem sadece kırmızıya boyalı hem de sadece maviye boyalı ayrıtlar takip edilerek ulaşılabilecek şekilde boyanmasına iyi boyama diyelim. Kaç iyi boyama vardır? **(UMO-2015)**

a) 218 b) 234 c) 252 d) 298 e) 324

ÇÖZÜM

Taban dışındaki kenarların boyama sayısı 2^7. Bir iyi boyamada bu yedi kenarın tümü kırmızı, veya tümü mavi olamaz, $2^7 - 2$. Piramidin tepe noktası O olmak üzere, genelliği bozmadan $[OA_i]$ kırmızı, $[OA_{i+1}]$ mavi renge boyanmış olsun. $[A_iA_{i+1}]$ kenarını herhangi bir renge boyayalım, bu renk te genelliği bozmadan mavi olsun. O zaman $[A_{i+1}A_{i+2}]$ kenarı kırmızı renge boyanmak zorunda olacaktır. Benzer şekilde devam edersek diger taban kenarların da tek türlü boyanmak zorunda olacaklarını göreceğiz. Demek ki iyi boyama sayısı $2 \cdot (2^7 - 2) = 252$ dir.

Cevap C

SORU 10

3 kırmızı, 2 beyaz ve 2 mavi top rastgele sıraya dizildiğinde iki beyaz topun veya iki mavi topun yan yana gelme olasılığı nedir? **(UMO-2014)**

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{16}{35}$ d) $\frac{10}{21}$ e) $\frac{5}{14}$

ÇÖZÜM

İki beyaz topun yan yana gelme olasılığı $\frac{2.6!}{7!} = \frac{2}{7}$ dir. Benzer biçimde iki mavi topun yan yana gelme olasılığı da $\frac{2}{7}$ dir. Bu iki olasılığın toplamından hem mavi topların yan yana hem de beyaz topların yan yana gelme olasılığını çıkarmalıyız. Bu olasılık ise $\frac{2.2.5!}{7!} = \frac{2}{21}$ dir. Dolayısıyla cevap $2 \cdot \frac{2}{7} - \frac{2}{21} = \frac{10}{21}$

Cevap D

SORU 11

Köşeleri, verilen bir düzgün yirmigenin köşelerinden dördünde yer alan kaç deltoid vardır? **(UMO-2013)**

a) 105 b) 100 c) 95 d) 90 e) 85

ÇÖZÜM

Düzgün yirmigenin köşeleri $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ olsun. Deltoidin kköşegenlerinden biri bu deltoidi iki ikizkenar üçgene ayırıyor. Bu köşegen deltoidi tek türlü belirliyor. Bu köşegenin A_iA_j $(i > j)$ olması için gerek ve yeter koşul $i - j$ sayısının çift olmasıdır. Böyle (i, j) ikililerinin sayısı $2 \cdot \binom{10}{2} = 90$ dır. 5 tane eşkenar deltoid iki kez sayıldığı için cevap $90 - 5 = 85$ olur.

Cevap E

SORU 12

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin birbirinden farklı ve biri diğerini içeren ik alt kümesi kaç farklı biçimde seçilebilir? **(UMO-2012)**

a) 2059 b) 2124 c) 2187 d) 2315 e) 2316

ÇÖZÜM

Alt kümeler A ve B olsun: $A \subset B$. O zaman 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarının her biri ya aynı anda A ve B nin ya sadece B nin ya da ne A ne de B nin elemanı olacak: toplamda 3^7 seçenek bulunuyor. Fakat sadece birinci ve üçüncü seçenekleri kullanırsak $A = B$ olur. Sonuç olarak cevap $3^7 - 2^7 = 2059$ olur.

Cevap A

SORU 13

On tabanına göre tersten yazılımı ile kendisi aynı olup 11 ile bölünen kaç tane yedi basamaklı pozitif tam sayı vardır? **(UMO-2010)**

a) 900 b) 854 c) 818 d) 726 e) Hiçbiri

ÇÖZÜM

Sayı abcdcba seçilirse $11 \mid 2(a + c - b) - d$ olmalıdır. a, b, c rakamları rastgele seçildiğinde d rakamı tek türlü belli olur. Ancak d rakam olduğundan $a + c - b = 5 \pmod{11}$ olan durumları çıkarmalıyız. Başka bir deyişle abc üç basamaklı sayısı (mod 11) de 5 e denk olmayan herhangi bir sayı olabilir. O halde cevap 900 - 82 = 818 olarak bulunur.

Cevap C

SORU 14

$3m^2n = n^3 + A$ denkleminin doğal sayılarda aşağıdaki A değerlerinden hangisi için çözümü vardır? **(UMO-2008)**

a) 301 b) 403 c) 415 d) 427 e) 481

ÇÖZÜM

Denklemi $n \cdot (3m^2 - n^2) = A$ olarak yazalım. 301, 403, 427 ve 481 sayılarının her birinin tüm çarpanları $3k + 1$ şeklindedir:

$301 = 7 \cdot 43$ $403 = 13 \cdot 31$ $427 = 7 \cdot 61$ $481 = 13 \cdot 37$

Fakat $3m^2 - n^2 \neq 1 \pmod{3}$ olduğuna göre, bu dört durumda denklemin çözümü bulunmaz. $415 = 5(3 \cdot 6^2 - 5^2)$ olduğuna göre, cevap 415 tir.

Cevap C

SORU 15

20 kişilik bir toplulukta, 10 kişi İngilizce, 10 kişi Almanca, 10 kişi de Fransızca biliyor. Bu topluluğun üç kişilik bir alt kümesinde İngilizce bilen en az bir kişi, Almanca bilen en az bir kişi ve Fransızca bilen en az bir kişi varsa bu alt kümeye "komite" diyoruz. Bu toplulukta en çok kaç farklı komite olabilir? **(UMO-2005)**

a) 120 b) 380 c) 570 d) 1020 e) 1140

ÇÖZÜM

Toplulukta 10 kişi her üç dili biliyorsa, geriye kalan 10 kişi hiçbir dili bilmiyorsa, komite oluşturmayan üçlüler hiçbir dil bilmeyen 10 kişi arasından seçilmelidir. Dolayısıyla farklı komite sayısı

$$\binom{20}{3} - \binom{10}{3} = 1020 \text{ olur}$$

Öte yandan dil bilen kişilerin dağılımı ne şekilde olursa olsun İngilizce bilen 10 kişiden en az birini içerem üçlülerin sayısı yine

$$\binom{20}{3} - \binom{10}{3} = 1020 \text{ olur}$$

olduğundan komite oluşturan üçlülerin sayısı da 1020'den fazla değildir. O halde doğru cevap 1020 dir.

Cevap D

SORU 16

a ve b'den oluşan 9 harfli dizilerden kaç tanesi *baba* kelimesini içerir? **(UMO-1996)**

a) 192 b) 186 c) 158 d) 156 e) 154

ÇÖZÜM

baba kelimesini başa, sona ve geriye kalan beş harfin aralarına koyabiliriz (6 seçenek); geriye kalan harfleri de 2^5 yolla yazabiliriz; fakat bazı dizileri birkaç kez kullandığımız için fazlalıkları çıkarmamız gerekir. *bababa* alt dizisi içeren dizileri ikişer kez saymışız, bunların birini çıkaralım. Bu dizilerde *bababa* alt dizisi geriye kalan üç harfe göre dört değişik konumda olabilir; geriye kalan harfleri de 2^3 yolla yazabiliriz. *babababa* alt dizisini içeren dizilerin herbirini *baba* kelimesini içeren dizilerde üçer kez saymışız, *bababa* alt dizisi içeren diziler arasında da ikişer kez çıkarmışız, geriye tam birer tane kalmıştır. Dolayısıyla bunlarla ilgili hiçbir işlem yapmamız gerekmez. Son olarak, *babaxbaba* (x=a veya b) şeklindeki iki diziyi ikişer kez saymışız. Böylece istenen:

$6 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 2 = 158$ olacaktır.

Cevap C

SORU 17

Ondalık yazılımında 4 ve 5 rakamları bulunup, 0 ve 8 rakamları bulunmayan kaçtane 10 basamaklı sayı vardır? **(UMO-1995)**

a) $8^{10}-2\cdot7^{10}+6^{10}$ b) $8!-2\cdot7!+6!$ c) $10^8-2\cdot10^7+6^6$

d) $2\binom{10}{2}8^8$ e) $2\binom{10}{2}8^8-6\binom{10}{3}8^7$

ÇÖZÜM

0 ve 8 rakamları bulunmayan 8^{10} tane on basamaklı sayı bulunur. Bunlardan 4'ü içermeyenler kümesini A ile, 5'i içermeyenler kümesini B ile gösterirsek, $s(A)=s(B)=7^{10}$ ve $s(A\cap B)=6^{10}$ olacaktır. 4'ü veya 5'i içermeyenler kümesi $A\cup B$ olacak ve $s(A\cup B)=s(A)+s(B)-s(A\cap B)=2\cdot7^{10}-6^{10}$ olduğundan yanıt $8^{10}-2\cdot7^{10}+6^{10}$

Cevap A

KAYNAKÇA

Grimaldi, R.P. (2014). Discrete and Combinatorial Mathematics (Fifth Edition). Harlow: Pearson Education Limited

Alizade R. ve Ufuktepe Ü. (2006). Sonlu Matematik Olimpiyat Soruları ve Çözümleri. Ankara: Tübitak Yayınları

Gürlü Ö. (2015). Olimpik Sonlu Matematik. İzmir: Altın Nokta Yayınevi

Özdemir M. (2012). Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık 2. İzmir: Altın Nokta Yayınevi

Kaya E. (2012). Kombinatorik. İzmir: Altın Nokta Yayınevi

https://www.tubitak.gov.tr

https://www.artofproblemsolving.com

ÖZGEÇMİŞ

Onur EREN 01.12.1979 tarihinde Polatlı'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Polatlı'da, lise öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. 2005 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünden mezun oldu. 2013 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Alan Öğretmenliği Tezsiz Yuksek Lisansını tamamladı. 2005 yılından beri özel sektörde matematik öğretmenliği yapan Onur EREN evli ve bir çocuk babasıdır.