YAŞAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

STOKASTİK ORTA-ALAN VE DETERMİNİSTİK ANAHTARLAMA SİSTEMLERİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ

DENİZ HASAN GÜÇOĞLU

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ŞAHLAR MEHERREM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SUNUM TARİHİ: 17.05.2019

BORNOVA/İZMİR
MAYIS 2019

Jüri üyeleri olarak bu tezi okuduğumuzu ve kapsam ve kalite bakımından Doktora tezi olarak uygunluğunu onaylıyoruz.

Jüri Üyeleri:	İmza:
Doç. Dr. Şahlar MEHERREM Yaşar Üniversitesi	....
Prof. Dr. Mehmet TERZİLER Yaşar Üniversitesi	....
Prof. Dr. Şaban EREN Yaşar Üniversitesi	....
Doç. Dr. Serap TOPAL Ege Üniversitesi	....
Dr. Öğr. Üyesi Derya DOĞAN Celal Bayar Üniversitesi	....

Prof. Dr. Cüneyt GÜZELİŞ
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZ

STOKASTİK ORTA-ALAN VE DETERMİNİSTİK ANAHTARLAMA SİSTEMLERİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ

GÜÇOĞLU, Deniz Hasan

Doktora Tezi, Matematik
Danışman: Doç. Dr. Şahlar MEHERREM
Mayıs 2019

Bu tezde, deterministik sistemlerin bilinmeyen anahtarlama noktalı optimal anahtarlama kontrol problemi için bir nümerik çözüm elde edildi. Ayrıca, orta-alan sıçrama sistemleri için stokastik optimal bileşik kontrolün genel bir karakterizasyonu, karma konveks-spike perturbasyon yöntemi uygulanarak oluşturuldu. Ortogonal Teugels martingalelere dayalı orta-alan Lévy-ileri-geri stokastik sistemin stokastik singüler kontrolü ele alındı ve maksimum prensibi formunda optimallik için gereklilik ve yeterlilik koşulları belirlendi. Ayrıca, genel McKean-Vlasov diferansiyel denklemlerine dayalı sistemlerin optimal singüler kontrolleri için gereklilik ve yeterlilik koşulları elde edildi.

Anahtar sözcükler: Anahtarlama Sistemleri, Optimal Singüler Kontrol, Stokastik Maksimum Prensip, Orta-Alan Stokastik Sistemler, McKean-Vlasov Diferansiyel Denklemler.

ABSTRACT

OPTIMAL CONTROL PROBLEMS FOR DETERMINISTIC SWITCHING AND STOCHASTIC MEAN-FIELD SYSTEMS

GÜÇOĞLU, Deniz Hasan

PhD, Mathematics
Advisor: Assoc. Prof. Dr. Şahlar MEHERREM
May 2019

In this thesis, a numerical solution to the optimal switching control problem for deterministic systems with unknown switching point is obtained. Moreover, a general characterization of the optimal stochastic combined control for mean-field jump systems is constructed by applying mixed convex-spike perturbation method. Stochastic singular control for mean-field forward-backward stochastic differential equations, driven by orthogonal Teugels martingales associated with some Lévy processes are discussed and necessary and sufficient conditions for optimality in the form of maximum principle are determined. Furthermore, the necessary and sufficient conditions for optimal singular control of systems governed by general McKean-Vlasov differential equations are derived.

Keywords: Switching Systems, Optimal Singular Control, Stochastik Maximum Principle, Mean-Field Stochastic Systems, McKean-Vlasov Differential Equations.

TEŞEKKÜR

Matematiği diğer bilimlerden ayıran, ona bilimlerin kraliçesi payesini kazandıran en belirgin özelliği hiç kuşkusuz kesinliği ve ulaştığı sonuçların vazgeçilmezliğidir. Bilimin ve bilgiye ulaşmanın öneminin giderek arttığı günümüzde, beni matematiğin büyülü dünyasıyla tanıştıran, matematik bilimine katkıda bulunmama yardımcı olan ve yetişmemde büyük emeği geçen değerli tez danışmanım Doç. Dr. Şahlar MEHERREM' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamın başından sonuna kadar ki tüm süreçte bilimsel öneri ve desteğini hiç esirgemeyen kıymetli bilim insanı Prof. Dr. Mokhtar HAFAYED' e, bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli hocam Doç. Dr. Burhan PEKTAŞ' a ve varlıklarıyla bana güç ve moral veren değerli eşim ve sevgili kızıma sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

Deniz Hasan GÜÇOĞLU

İzmir, 2019

YEMİN METNİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "STOKASTİK ORTA-ALAN VE DETERMİNİSTİK ANAHTARLAMA SİSTEMLERİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ" adlı çalışmanın, tarafımdan bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın yazıldığını ve yararlandığım eserlerin bibliyografyada gösterilenlerden oluştuğunu, bunlara atıf yapılarak yararlanılmış olduğunu belirtir ve bunu onurumla doğrularım.

Deniz Hasan GÜÇOĞLU

17.05.2019

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklama
$u^{*}(.)$	Optimal kontrol
U_{ad}	Tüm kabul edilebilir (admissible) kontrol prosesleri kümesi

Kısaltmalar	Açıklama
LQOCP	Lineer Kuadratik Optimal Kontrol Problemi
ODE	Adi Diferansiyel Denklem
SDE	Stokastik Diferansiyel Denklem
BSDEs	Geri Stokastik Diferansiyel Denklemler
MF-SDE	Orta-Alan Stokastik Diferansiyel Denklem
MF-SDEJs	Orta-Alan Sıçramalı Stokastik Diferansiyel Denklemler
MF-FBSDEs	Orta-Alan İleri Geri Stokastik Diferansiyel Denklemler
McV-SDEs	McKean-Vlasov Stokastik Diferansiyel Denklemler

1. GİRİŞ

Optimal kontrol teori 1950' lerin sonunda ortaya çıksa da aslında antik çağlara kadar uzanan ve iki nokta arasındaki en kısa yolu keşfeden insanoğlunun oldukça uzun bir serüvene sahip yolculuğudur. Optimal kontrol teorinin kabul edilen en yakın öncüsü 1600' lerde doğan (calculus of variations) varyasyonlar hesabıdır. 1662' de, Pier de Fermat (1601-1665) yazdığı bir makalesinde iki optik nesne arasından geçen ışığın minimum geçiş zamanını kalkulusun metotları ile hesaplamış ve bu sonuç günümüzde Fermat'ın en kısa zaman prensibi olarak bilinmektedir. Aynı zamanda bu çalışma bazı kaynaklarda varyasyon hesabının doğuşu olarak kabul edilmektedir. 1669' da, Johann Bernoulli (1667-1748) ünlü Brachistochrone Problemini ileri sürdü: "Aynı yatay ya da dikey doğru üzerinde olmayan iki nokta arasındaki en kısa uzaklığa sahip yolun bulunması" problemiydi. Bu problemle ilk ilgilenen 1638' de Galilei Galileo (1564-1642) olmuştu. Fakat, hatalı bir çözüm olduğunu 1697' de Johann Bernoulli, kardeşi Jacob (1654-1705), Golfried Leibniz (1646-1716) ve Isaac Newton (1642-1727) doğru çözümleriyle göstermiş oldular. 1744' te Leonhard Euler (1707-1783), Euler denklemi (ya da Euler-Lagrange denklemi) adı verilen ekstremaların birinci mertebeden gereklilik koşullarını elde etti. 1755' te, Joseph L. Lagrange (1736-1813) bu alanda yeni bir çığır açan sözde δ-calculus'u ortaya koydu. Bunu öğrenen Euler 1756' da bu konunun adını calculus of variations (varyasyonlar hesabı) şeklinde adlandırarak isim babası oldu.

1786' da, Adrien M. Legendre (1752-1833) maksimum ya da minimumlar için yeterlilik koşullarını bulmayı sağlayan ikinci varyasyonu ileri sürdü. Ancak, bu makaledeki eksiklik daha sonra 1838' de Karl Jacobi (1804-1851) ile beraber Legendre-Jacobi Teorisi olarak tamamlandı. 1833' de, W. Hamilton (1805-1865) kendi adını taşıdığı en küçük hareket prensibini yayınladıktan sonra 1834-1835 'te kanonik sistem olarak yine kendi adıyla bilinen Euler Lagrange denklemine denk adi diferansiyel denklemler sistemini ortaya koydu. Aynı zamanda, 1838' de, Jacobi tarafından geliştirilecek Hamilton-Jacobi denklemini ileri sürdü. Karl Weierstrass'ın (1815-1897) kuvvetli ve zayıf ekstremalar arasındaki farkı ifade etmesi, Weierstrass koşulu ve yeterlilik koşullarını geliştirmesini sağladı. 1898' de, Adolf Kneser (1862-1930), Karl Gauss'un (1777-1855) jeodezikler üzerine elde ettiği sonucu varyasyon hesabına uyguladı. 1900' de, David Hilbert (1862-1943) ikinci varyasyonu özdeğerler ve özvektörler kullanarak kuadratik fonksiyoneller üzerinden gösterdi. Aynı yıl Uluslararası Matematik Kongresi'nde ileri sürdüğü ünlü 23 probleminden sonuncusu varyasyon hesabı üzerine olup, 19. ve 20. problemleri bu konuya yakın soruları içeriyordu. Varyasyon hesabı ile ilgili daha detaylı çalışmalar ve tarihsel perspektif için (Goldstine, 1980), (Hestenes, 1980) ve (Giaguinta and Hildebradt, 2006), bakılabilir.

20. yüzyılın ortalarına gelindiğinde, sözde klasik varyasyon hesabı sona ermiş ve II. Dünya savaşının sonlanması ile modern optimal kontrol teori devri başlamıştır. Bu devir, ABD ve SSCB' nin eş zamanlı olarak ”Diferansiyel Oyunlar” başlıklı çalışmaları ile R. E. Bellman (1920-1984), J. P. LaSalle (1916-1983), D. H. Blackwell (1919-2010) ve W. H. Fleming' in (1928-) aralarında bulunduğu bir araştırma grubunda oldukça kapsamlı bir çalışma ortaya konmuştur. 1952' de Bellman' ın ”Dinamik Programlama Metodu” ve ardından L. Pontryagin'in (1908-1988) içinde bulunduğu çalışma grubuyla geliştirdiği ”Regulasyonun Optimal Süreçleri” adlı çalışma ve Steklov Matematik Enstitüsündeki seminerler sonucu, 1956' da ilan edilen ”Pontryagin Maksimum Prensib” i ve ardından 1950' lerin sonunda R. E. Kalman' ın (1930-2016) ”Lineer Kuadratik Teori” si, (Kalman, 1960), bu döneme damga vuran üç büyük kilometre taşı olmuştur.

Optimal kontrol teori ile ilgili daha ayrıntılı bigi ve tarihsel dökümantasyon için; (Susmann, 1997), (Bellman, 1957), (Bellman and Dreyfus, 1962), (Boltyanskii et al., 1965), (Pontryagin et al., 1962), (Bryson, 1996), (Bittanti, 1996), (Pierre, 1969), (Anderson and Moore, 1969), (Kirk, 1970) ve (Naidu, 2002) ye bakılabilir.

Kimyasal süreçlerden otomotiv sistemlerine, havacılık alanından orduya kadar mühendislikte, farklı dinamikler içeren alt sistemler vardır ve her seferinde bir tanesi aktif olan anahtarlama sistemleri (Antsaklis and Nerode, 1998) ve (Bensoussan and Menaldi, 1997) de olduğu gibi bir çok örnekten bahsedilebilir. Dolayısıyla, bu süreçleri kontrol etmek, sisteme istikrar kazandıran bir kontrol uygulamakla kalmayıp aynı zamanda ne zaman geçiş yapılacağı ve hangi modun seçileceği konusunda kararlar alınmasını da gerektirir. Bir anahtarlama sisteminin optimal anahtarlaması ve kontrolü zor bir problemdir ve problemi çözmek için bazı teorik yöntemler geliştirilmiştir: Anahtarlamalı kontrol sistemlerin gereklilik optimallik şartları, (Maharramov, 2010) da, değişken yapılı sistemler için maksimum prensibi (Boltyanskii, 2004) te, hibrit gereklilik koşulları (Caravello and Picolli) de, Potryagin maksimum presibinin bir sonucu: hibrit maksimum prensibi (Dmitruk and Kaganovich, 2008) de, değişimli sistemlerin optimal kontrolü için arttırılmış kontrol parametrizasyonu (Li et al., 2006) da, zaman-invaryant ertelemeli değişen sistemlerin stabilite kriterleri (Xu et al., 2008) de, hibrit sistemlerde lineer kuadratik optimal kontrol problemleri için dinamik programlama metodu (Azmyakov et al., 2009) da ele alınmıştır. En önemli mesele en iyi anahtarlama anlarını bulmak ve bir kez bulduktan sonra, problemi geleneksel bir optimal kontrol problemine indirgemektir.

Otonom anahtarlama sistemleri için hibrit sistem maksimum prensibinin ispatı (Witsenhausen, 1966) da oldukça erken bir dönemde verilmiştir. (Piccoli, 1998) de teorik olarak hibrit maksimum prensibini, (Sussmann, 1999) da hibrit sistemler için maksimum prensibini, minimalleştirilen pürüzsüz fonksiyonel için elde etmiştir. Hamilton-Jacobi-Belmann denklemlerine ulaşmak için kullanılan dinamik programlama yaklaşımı (Capuzzo and Evans, 1984) ve (Yong, 1989) da anahtarlama sistemlerininin incelenmesi için ele alınmıştır. Optimal kontrol problemlerinin gerçek yaşam problemlerine uygulanışına örnek olarak; (Lucas and Kaya, 2001) de genel hibrit optimal kontrol problemleri için kavramsal algoritmalar, sınırlandırılmış difaransiyel programlama yaklaşımı kullanılarak ayrık-zaman hibrit sistem algoritması (Lu, et al., 1993) te, görülebilir.

Gerçek hayattaki birçok durumda, gözlemler belirli bir sürede yapılır ve yalnızca bir anda değil, tüm zaman aralığı veya zaman dizisi boyunca rastgele durumlardan etkilenir. Hisse senedi fiyatları, yayılan partikülün akışkan içindeki hareketleri ve zaman içinde gözlemlenen diğer birçok proses, stokastik proseslerle modellenir. Nüfusun zaman içindeki büyümesinin incelenmesi, bir kullanıcının internette footprint çalışması önerileri bunlara örnek olarak verilebilir.

Modern portföy teorisi (MPT), riskten kaçınan yatırımcıların, belirli bir piyasa riski seviyesine dayanarak beklenen getiriyi optimize etmek veya en üst düzeye çıkarmak için portföyler oluşturarak, riskin daha yüksek bir ödülün doğal bir parçası olduğunu vurgulayan bir teoridir. Teoriye göre, belirli bir risk seviyesi için mümkün olan maksimum getiriyi sağlayan en uygun portföylerin ”etkin bir sınırını” oluşturmak mümkündür. MPT, bir yatırımın risk ve getiri özelliklerinin tek başına görülmemesi gerektiğini, ancak yatırımın genel portföyün risk ve getirisini nasıl etkilediğiyle değerlendirilmesi gerektiğini ileri sürmektedir. MPT, bir yatırımcının, belirli bir risk seviyesi için getirileri en üst düzeye çıkaracak olan çoklu varlıklardan oluşan bir portföy oluşturabileceğini göstermektedir. Aynı şekilde, istenen düzeyde bir getiri elde edildiğinde, bir yatırımcı olası en düşük riski taşıyan bir portföy oluşturabilir. Varyans ve korelasyon gibi istatistiksel önlemlere dayanarak, bireysel bir yatırımın geri dönüşü, yatırımın tüm portföy bağlamında nasıl davrandığından daha az önemlidir. Bu teori, Harry Markowitz tarafından 1952'de Journal of Finance tarafından yayınlanan ”Portföy Seçimi” adlı makalesinde yer almıştır.

Orta-alan stokastik kontrol problemleri birçok yazar tarafından araştırılmıştır: Kısmi bilgi altında optimal kontrol için orta-alan tipi stokastik maksimum prensibini (Wang et al.,2014) te, korelasyonlu durum ve gözlem etkileri ile birlikte orta-alan tipi stokastik diferansiyel denklemler için maksimum prensibini (Zhang, 2016) da, orta alan sıçrama difüzyon sistemlerinin gecikmeli olarak stokastik optimal kontrolü (Meng and Shen, 2015) tarafından incelenmiştir. Yakın-optimal orta-alan stokastik singüler kontrollerin yakın-optimallik için gereklilik ve yeterlilik koşullarını (Hafayed and Abbas, 2014) te, orta-alan tipindeki SDE' ler için genel stokastik maksimum prensibini (Buckdahn et al., 2011) de, orta-alan kontrollerinde stokastik maksimum prensibini (Li, 2012) de, stokastik gecikmeli diferansiyel denklemlerde orta-alan sıçrama difüzyonlarının maksimum prensibini (Shen et al., 2014) te, Markov tekrarlı-sıçramalı skaler ve lineer olmayan sistemlerin dış geribeslemesini (Wu et al., 2014) te, optimal stokastik müdahale kontrolu ve uygulamalarını (Mundaca and Øksendal, 1998) de, ele almışlardır. Son yıllarda stokastik singüler kontrol problemlerinin bir çok farklı disiplinde geniş uygulama olanağı doğduğu için dikkatleri üzerine çekmiştir. Anahtarlamalı sistemler için stokastik singüler optimal kontrol problemi (Aghayeva, 2016) da, singüler stokastik kontrol problemlerinin ilk maksimum prensibi versiyonu (Cadenillas and Haussmann, 1994) te, lineer formdaki singüler bileşene sahip stokastik maksimum prensibi (Dufour and Miller, 2006) da, benzer tipteki singüler kontrol problemi (Haussmann and Suo, 1995) te, sıçrama difüzyonları için stokastik optimal kontrol ve finanstaki uygulamaları (Øksendal and Sulem, 2007) de ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Stokastik sürekli prosesler içindeki en önemli proses Brown hareketidir: İlk defa, Botanist R. Brown 1828' de akışkanda asılı polen partikülünün hareketini gözlemledi, bu parçacık düzensiz rastgele bir şekilde hareket ediyordu. Ardından A. Einstein 1905' te bu hareketin, parçacığın sıvının molekülleri tarafından bombardımanından kaynaklandığını savundu ve Brown hareketi için denklemler elde etti. 1900 yılında, L. Bachelier Brown hareketini matematiksel spekülayon teorisinde hisse senedi fiyatlarının hareketi için bir model olarak kullandı. Brown hareketinin stokastik bir süreç olarak matematiksel temeli N. Wiener tarafından 1931' de yapıldı ve bu süreç Wiener proses olarakta adlandırılmaktadır. Brown hareketi prosesi $B(t)$, saf noise 'un kümülatif etkisi için temel bir model görevi görür. $B(t)$ prosesi t zamanındaki bir parçacığın konumunu belirtirse, $B(t) - B(0)$ yer değiştirmesi, akışkanın molekülleri tarafından tamamen rastgele bombardımanın etkisi ya da t zamanındaki noise' un etkisidir (Klebaner F. C., 2005).

Lévy prosesleri doğa bilimlerinde, finans matematiğinde, ekonomide ve biyolojide ortaya çıkan fenomenleri modellemek için yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. (Nualart and Schoutens, 2000, 2001) ve (Bertoin, 1996). Lévy prosesleri ile ilgili stokastik maksimum prensibi bir çok yazar tarafından çalışılmıştır: (Meng and Tang, 2009)' da yazarlar, Teugels martingaller ile ifade olunan ve bağımsız çok boyutlu Brown hareketini içeren genel stokastik optimal kontrol problemini stokastik sistemler için ele alıp, stokastik maksimum prensibini ispatlamışlardır. Kısmi enformasyon altında Lévy prosesleri ile bağlantılı geri stokastik kontrol sistemleri için optimal kontrol problemi (Meng et al., 2002) de araştırıldı. Lévy prosesleri ve stokastik lineer-kuadratik problemler (Mitsui and Tabata, 2008) ve (Tang and Wu, 2009) çalışmalarında ele alındı. Teugels martingaller ile ifade edilen BSDEs' lerin optimal kontrolu (Tang and Zhang, 2012) de, Lévy prosesleri için geri stokastik diferansiyel denklemler ile Feynman-Kac formülü ve finanstaki uygulamaları (Nualart and Schoutens, 2001) de, kısmi enformasyon altında Lévy prosesleri ile bağlantılı ortogonal Teugels martingalleri ile ifade edilen orta-alan SDEs'lerde optimal singüler kontrol için gereklilik ve yeterlilik koşulları (Hafayed et al., 2016a) da, Lévy prosesleri ile ifade olunan orta-alan FBSDEs'lerin optimal kontrolu için gereklilik koşulları (Hafayed et al., 2016b) de, Lévy prosesleri ile bağlantılı Teugels martingaller ile ifade olunan ileri-geri stokastik sistemin sonsuz ufuktaki optimal kontrolü (Muthukumar and Deepa, 2016) da ele alınmıştır.(Young, 2010) ve (Wu, 2013) deki çalışmalarda tam uyumlu kontrol için optimum şartlar elde edilmiştir. FBSDEs' lerin optimal itki kontrolu için stokastik maksimum prensibi (Wu and Zhang, 2011) de, BSDEs' ler için kısmi enformasyon maksimum prensibi ve uygulamaları (Huang et al., 2009) da, kısmi enformasyon altında başlangıç ileri-geri stokastik diferansiyel denklemler çiftinin optimal kontrolu için gereklilik koşulu (Xiao and Wang, 2011) de, kısmi enformasyon altında stokastik rekürsif optimal kontrol problemleri için maksimum prensibi (Wang and Wu, 2009) da, ileri-geri tam stokastik sistem çiftinin kısmi enformasyon altında optimal kontrol problemi için maksimum prensibi (Meng, 2009) da ele alınmıştır.

Orta-alan stokastik sistemleri olarak da adlandırılan McKean-Vlasov sistemleri ilk kez Marc Kac tarafından çalışıldı. Seyreltik monatomik gazların kinetik teorisinin temel denklemi, Boltzmann'ın ünlü doğrusal olmayan integro-diferansiyel denklemidir. En basit durumda, gaz moleküllerinin sadece elastik çarpışmalar yoluyla enerji alışverişine izin verilen t çapındaki sert küreler olduğu durumlarda, Boltzmann denklemi biçimini alır. Bu da plazmanın Vlasov kinetik denklemi için stokastik toy modelinde olduğu durumla örtüşmektedir (Kac, 1956; Kac, 1958). Durum denklem sistemlerinin katsayıları, çözüm prosesine ve bu prosesin beklenen değerine bağlı orta-alan tipindeki stokastik kontrol problemleri bir çok yazar tarafından çalışılmıştır: 0rta-alan stokastik denklemler (Buckdahn et al., 2014) te, Orta alan tipindeki SDE ler için genel stokastik maksimum prensibi (Buckdahn et al., 2011) de, orta-alan stokastik kontrol problemleri için optimalliğin yeterlilik koşulları (Shi, 2012) de, Ölçümlere göre türev yoluyla Teugels martingallerle yönetilen orta-alan stokastik sistemlerin optimal kontrolu (Hafayed and Meherrem, 2018) de, Olasılık kaidesine göre diferansiyellenebilme yolu ile Lévy proseslerine bağlı McKean-Vlasov sistemlerinin optimal kontrolü için maksimum prensibi (Meherrem and Hafayed, 2019) da, İleri-geri stokastik sistemler için singüler orta-alan optimal kontrol ve finansa uygulamaları (Hafayed, 2014b) te araştırılmıştır. Ayrıca, Poisson sıçrama prosesli lineer olmayan stokastik sistemler için McKean-Vlasov optimal karma-singüler kontrol problemleri (Hafayed et al., 2016) da, Sıçrama prosesli orta-alan stokastik denklemlerin optimal kontrolü için Peng tipindeki maksimum prensibi (Meherrem et al., 2019) da, McKean Vlasov sistemlerinin SDE leri için Peng tipinde maksimum prensibi, ölçümlere göre ikinci mertebeden türevler kullanılarak (Buckdahn et al., 2016) da ispatlanmıştır.

Tez beş anabölümden oluşmakta ve tezin ikinci bölümünde, anahtarlamalı sistemler için deterministik lineer kuadratik optimal kontrol probleminin nümerik çözümü incelenmektedir (Meherrem et al., 2018a). Üçüncü bölümde, orta-alan stokastik sistemlerin stokastik optimal kontrolünün genel karakteristiği ve bir uygulaması (Meherrem et al., 2018b), dördüncü bölümde, ortogonal Teugels martingallere dayalı orta-alan Lévy-ileri-geri sistemin stokastik singüler kontrolü için varyasyonel prensibi ve bir uygulaması (Hafayed et al., 2017) ve son bölümde ise genel McKean-Vlasov diferansiyel denklemlerinin optimal singüler kontrolü için gereklilik ve yeterlilik koşulları incelenmektedir (Hafayed et al., 2018). Genel sonuçlar bölümünde, tezin anabölümlerini içeren çalışmaların özet sonuçları yer almaktadır.

2. ANAHTARLAMALI SİSTEMLER İÇİN LİNEER KUADRATİK OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, durum (state) denklemleri ve performans fonksiyoneli, bilinmeyen t_1 anahtarlama noktasına bağlı bir lineer kuadratik optimal kontrol problemi (LQOCP) ele alınacaktır. Problemin referans makalesinde (Kurina and Zhou, 2011); anahtarlama noktası sabit bir değer olarak kabul edilmiş, bunun üzerine sistemin optimal çiftinin çözümü araştırılmıştır. Bu makaleye dayanarak; kontrol problemi sabit aralıkta, bilinmeyen anahtarlama noktalı daha genel duruma dönüştürülerek incelenecektir. Optimal kontrol probleminin çözümünde Gradyan Projeksiyon Metodu kullanılarak optimal anahtarlama anı, optimal durum eğrileri, optimal kontrol fonksiyonu ve optimal maliyet değeri elde edilecek; çözüm prosedürü bir örnek üzerinden uygulamalı olarak gösterilecektir.

2.1 LQOC Probleminin Formülasyonu

Bu çalışmada ele alınan, anahtarlamalı sistemler için lineer-kuadratik optimal kontrol problemi (Kurina and Zhou, 2011) de referans alındığı haliyle *Problem I* olarak aşağıdaki formdadır:

Minimalleştirilen fonksiyonel:

$$\begin{aligned} J(u,t_1) &= \frac{1}{2}\langle C_1x_1(t_1)-C_2x_2(t_1), F\left(C_1x_1(t_1)-C_2x_2(t_1)\right)\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\langle x_j(t),W_j(t)x_j(t)\rangle+\langle u_j(t),R_j(t)u_j(t)\rangle)dt, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

olmak üzere, kontrol fonksiyonu bileşenleri $u(t)=(u_1(t),u_2(t))$ ve durum eğrisi bileşenleri $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$' dir.

Sistemin yörünge (trajectory) denklemleri:

$$\dot{x}_j(t) = A_j(t)x_j(t) + B_j(t)u_j(t), \quad t_{j-1} \le t \le t_j,\ j = 1, 2., \tag{2.1.2}$$

ve sınır değerleri: $x_1(0) = x^0,\ x_2(T) = x^T$ olarak verilmiştir.

Kabul edilebilir kontrol $u^*(\cdot)$, aşağıdaki eşitliği sağlıyorsa optimaldir:

$$J\left(u^*(\cdot)\right) \triangleq \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} J\left(u(\cdot)\right). \tag{2.1.3}$$

Burada, $0 = t_0 < t_1 < t_2 = T$ için t_0, t_2 değerleri sabit, t_1 sabit değildir. Tüm $t \in [t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$ için; $x_j(t) \in X_j$, $u_j(t) \in U_j$, $A_j(t), W_j \in L(X_j)$, $B_j(t) \in L(U_j, X_j)$, $R_j(t) \in L(U_j)$, $C_1 \in L(X_1, Y)$, $C_2 \in L(X_2, Y)$, $F \in L(Y)$, ve X_j, U_j, Y reel sonlu boyutlu Öklid uzaylarıdır. Ayrıca, F, $W_j(t)$, $R_j(t)$ simetrik operatörler ve F, $W_j(t) \geq 0$ olmak üzere $R_j(t)$ pozitif tanımlıdır. Sistemin sınır değerleri $x^0 \in X_1$, $x^T \in X_2$ uzaylarına aittir. Kabul edilebilir kontroller parçalı sürekli fonksiyon çifti $u_1(.)$ ve $u_2(.)$ olmak üzere; sırasıyla $[0, t_1]$ ve $[t_1, T]$ aralıklarında tanımlıdır. Benzer şekilde durum yörüngeleri de parçalı sürekli fonksiyonlar olup, $x_1(.)$ ve $x_2(.)$ sırasıyla aynı alt sistemlerde tanımlıdır.
F, C_1, C_2 operatörleri, t den bağımsız operatörler; fakat, diğerleri t ye $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, 2$ aralığında bağımlı operatörlerdir. Uygun uzaylardaki iç çarpım $< .,. >$ ile gösterilmiştir.

Not 2.1.1 Referans alınan makalede, t_1 sabit orta nokta olarak seçilmiş, bu yüzden minimalleştirilen fonksiyonel $J(u)$ olarak aşağıdaki formda verilmiştir:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\langle C_1x_1(t_1) - C_2x_2(t_1), F\left(C_1x_1(t_1) - C_2x_2(t_1)\right)\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\langle x_j(t), W_j(t)x_j(t)\rangle + \langle u_j(t), R_j(t)u_j(t)\rangle)dt. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Sistemin yörünge denklemleri ve sınır değerleri (2.1.2) de verildiği gibidir. Daha genel bir probleme geçiş yapabilmek için t_1 noktası bilinmeyen anahtarlama noktası, performans indeks ise $J(u,t_1)$ formunda yeniden ele alınacaktır.

Tanım 2.1.1 $w = (t_1, u(t), x(t))$ üçlüsü *Problem I*' in (sınırlamalar için bkz: (Kurina and Zhou, 2011)) tüm sınırlamalarını sağlıyorsa, (admissible) kabul edilebilirdir.

Tanım 2.1.2 $w^0 = (t_1, u(t), x(t))$ üçlüsü tüm kabul edilebilir proses w için $J(w^0) \leq J(w)$ koşuşunu sağlıyorsa, optimal kontroldür.

2.2 LQOCP İçin Eşdeğer Formülasyon ve Dönüşümler

Anahtarlama parametresi x_{n+1} olmak üzere, $[t_0, t_2]$ aralığında $\frac{dx_{n+1}(t)}{dt} = 0$ diferansiyel denklemi $x_{n+1}(0) = t_1$ başlangıç şartını sağlasın. Burada, x_{n+1}' in sabit olduğu görülmektedir.

Bağımsız zaman değişkeni τ olmak üzere, aşağıdaki lineer dönüşüm tanımlanabilir:

$$t = \begin{cases} t_0 + (x_{n+1} - t_0)\tau, & 0 \leq \tau < 1 \\ x_{n+1} + (t_2 - x_{n+1})(\tau - 1), & 1 \leq \tau \leq 2. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Bu dönüşümün diferansiyel gösterimi,

$$dt = \begin{cases} (x_{n+1} - t_0)d\tau, & 0 \leq \tau < 1 \\ (t_2 - x_{n+1})d\tau, & 1 \leq \tau \leq 2, \end{cases} \tag{2.2.2}$$

formunda yazılabilir.

Açıkça, (2.2.1) lineer dönüşümü:

$t : \tau \to [t_0, t_1]$, $\quad \tau \in [0, 1)$,

$t : \tau \to [t_1, t_2]$, $\quad \tau \in [1, 2]$.

Yani; $\tau = 0$ olduğunda, $t = t_0$;

$\tau = 1$ olduğunda, $t = t_1$; $\quad \tau = 2$ olduğunda $t = t_2$ olur.

Ayrıca, (2.2.1)' in ters dönüşümü:

$\tau = \frac{t - t_0}{x_{n+1} - t_0}, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad \tau = \frac{t - x_{n+1}}{t_2 - x_{n+1}}, \quad 1 \leq \tau \leq 2$ olur.

Anahtarlama parametresi x_{n+1} ile τ zaman değişkeni ve yeni durum değişkenleri $y_i(\tau) = x_i(t(\tau))$ şeklinde tanımlanabilir. Ayrıca, yeni kontrol değişkenleri $v_i(\tau) = u_i(t(\tau)), i = 1, 2$ olmak üzere, (2.1.1) - (2.1.2)' de belirtilen *Problem I* aşağıdaki ek probleme dönüştürülebilir:

Problem II:

Durum denklemleri (2.1.2), aşağıdaki alt sistemlere dönüşür:

$$altsistem(1) : \begin{cases} \frac{dy_1(\tau)}{d\tau} &= (x_{n+1} - t_0)\,(A_1(\tau)y_1(\tau) + B_1(\tau)v_1(\tau)) \\ \frac{dx_{n+1}}{d\tau} &= 0 \\ x_{n+1}(0) &= t_1 \\ \end{cases} \tag{2.2.3}$$

$\tau \in [0, 1)$ aralığında,

$$altsistem(2) : \begin{cases} \frac{dy_2(\tau)}{d\tau} &= (t_2 - x_{n+1})\,(A_2(\tau)y_2(\tau) + B_2(\tau)v_2(\tau)) \\ \frac{dx_{n+1}}{d\tau} &= 0 \\ x_{n+1}(0) &= t_1 \\ \end{cases} \tag{2.2.4}$$

$\tau \in [1, 2]$ aralığındadır.

Minimalleştirilen fonksiyonel (2.1.1), aşağıdaki forma dönüşür:

$$\begin{aligned} \tilde{J}(v, x_{n+1}) &= \frac{1}{2}\langle C_1y_1(1) - C_2y_2(1), F(C_1y_1(1)) - C_2y_2(1))\rangle \\ &+ \int_0^1 (x_{n+1} - t_0)(\langle y_1(\tau), W_1(\tau)y_1(\tau)\rangle + \langle v_1(\tau), R_1(\tau)v_1(\tau)\rangle)d\tau \\ &+ \int_1^2 (t_2 - x_{n+1})(\langle y_2(\tau), W_2(t)y_2(\tau)\rangle + \langle v_2(\tau), R_2(\tau)v_2(\tau)\rangle)d\tau. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Böylece, *Problem I* yukarıdaki dönüşümler doğrultusunda durum yörünge bileşenleri $y(\tau) = (y_1(\tau), y_2(\tau))$ ve kontrol bileşenleri $v(\tau) = (v_1(\tau), v_2(\tau), x_{n+1})$

olmak üzere; belirlenen $0 \leq \tau \leq 2$ aralığında *Problem II*' ye indirgenir. Bununla beraber, anahtarlama (x_{n+1}) parametresi $[0, 2]$ aralığında bilinmeyen sabit bir parametre olduğu için, yapılan dönüşümlerden sonra *Problem II*' nin boyutu, *Problem I*' in boyutuyla aynı olacaktır.

Teorem 2.2.1 *Problem I'in admissible (kabul edilebilir) prosesleri* $(t_1, x(t), u(t))$ *ile Problem II ' nin kabul edilebilir prosesleri* $(y(\tau), v(\tau))$ *arasında bire-birlik ilişkisi vardır.*

İspat. Kabul edilebilir $(t_1, x(t), u(t))$ proseslerinden $(y(\tau), v(\tau))$ prosesleri elde edildi. Şimdi ise tersini gösterelim, yani eğer $(y(\tau), v(\tau))$ kabul edilebilir proses ise ki ($v(\tau) = (v_1(\tau), v_2(\tau))$ olduğu (2.2.3), (2.2.4) de verilmiştir), (2.2.1) deki ilişkiyi kullanarak şu söylenebilir: $\tau = 0$ ise $t = t_0, \tau = 1$ ise $t = x_{n+1}$ $(x_{n+1}(0) = t_1)$, ayrıca $\tau = 2$ ise $t = t_2$ dir. Bu, $[t_0, t_1]$ ve $[t_1, t_2]$ aralıklarının elde edileceği anlamına gelir. (2.2.1)' deki ilişkiden, $\tau = \frac{t-t_0}{x_{n+1}-t_0}$, $0 \leq \tau \leq 1$ ve $\tau = \frac{t-x_{n+1}}{t_2-x_{n+1}}$, $1 \leq \tau \leq 2$ aralıklarına ait zaman değişkenleri elde edilir. $x_1(t) = y_1(\tau(t))$ ve $x_2(t) = y_2(\tau(t))$ dönüşümleri kullanılarak, zincir kuralı ile $\dot{x}_1 = \dot{y}_1(\tau(t))(\frac{1}{x_{n+1}-t_0})$ ve $\dot{x}_2 = \dot{y}_2(\tau(t))(\frac{1}{t_2-x_{n+1}})$ eşitliklerine ulaşılır. Bu eşitlikler ile (2.2.3) ve (2.2.4) denklemleri göz önüne alınırsa, $(t_1, x(t), u(t))$ proses üçlüsünün (2.1.1) ve (2.1.2) de belirtilen denklemlerin kabul edilebilir prosesleri olduğu sonucuna varılır. □

Teorem 2.2.2 (2.1.2)*,* (2.2.3) *ve* (2.2.4) *denklemleri için* $(t_1, x(t), u(t))$ *ve* $(y(t), v(t))$ *kabul edilebilir prosesleri arasındaki dönüşüm,* (2.1.1) *ve* (2.2.5) *de belirtilen fonksiyonellerin değerini korur.*

İspat. *Problem I* için $(t_1^0, x^0(t), u^0(t))$ prosesi optimal kontrol olsun. $(y^0(\tau), v^0(\tau))$ prosesi, $(t_1^0, x^0(t), u^0(t))$ optimal prosesinden elde edilsin *(Teorem 2.2.1)*. Farz edilsin ki; $(y^0(\tau), v^0(\tau))$ optimal proses olmasın ve $(\tilde{y}(\tau), \tilde{v}(\tau))$ optimal proses olmak üzere, $\tilde{J}(\tilde{y}(\tau), \tilde{v}(\tau)) \leq J(y^0(\tau), v^0(\tau))$ eşitsizliğini sağlasın. Ters dönüşümle elde edilen uygun kabul edilebilir proses $(\tilde{x}_{n+1}, \tilde{y}(\tau), \tilde{v}(\tau))$ olsun ve $(t_1, u(t), x(t))$ ile ifade edilsin. Açıktır ki;
$J(t_1, u(t), x(t)) = \tilde{J}(\tilde{y}(\tau), \tilde{v}(\tau)) \leq \tilde{J}(y^0(\tau), v^0(\tau) = \tilde{J}(t_1^0, x^0(t), u^0(t)).$

Bu durum $(t_1^0, x^0(t), u^0(t))$ prosesinin *Tanım 2.1.2* deki ifadesi ile çelişir. Tersine ispat benzer yolla gösterilebilir. □

Sonuç 2.2.1 Son iki teorem dikkate alındığında; *Problem I* için $(t_1^0, x^0(t), u^0(t))$ minimum değer verirse , dönüşümlerle elde edilen $(y^0(\tau), v^0(\tau))$ prosesi de *Problem II* için minimum değer verir. Benzer şekilde tersi durumda geçerlidir.

2.3 Gradyan Projeksiyon Metot Algoritması

Ele alınan optimal kontrol problemi için optimize edilecek üç argümandan bahsedilebilir:

Birincisi skaler argüman $t_1 \in [t_0, t_f]$, ikincisi $t \in [t_0, t_{mid}]$ aralığına ait ilk kontrol fonksiyonu $v_1(t)$ ve sonuncusu $t \in [t_{mid}, t_f]$ aralığınına ait ikinci kontrol fonksiyonu olan $v_2(t)$, durum yörüngesi $x = (t_1, v_1(t), v_2(t))$ ve maliyet fonksiyoneli $J(t_1, v_1(t), v_2(t))$ olmak üzere, ilk skaler argümanı üzerindeki tek sınırlama alanı $t_1 : t_0 \leq t_1 \leq t_f$ biçiminde tanımlansın.

İfade edilen formdaki kabul edilebilir proses argümanları sonsuz-boyutlu bir optimizasyon problemini ortaya çıkarmıştır. ”Parametrizasyon tekniği” uygulanarak, başlangıç-sonsuz-boyutlu optizasyon problemi sonlu-boyutlu optimizasyon problemine indirgenecektir. Bu kullanışlı prosedür sonlu-boyutlu optimizasyon problemini çözmede oldukça etkili bir yöntem ve algoritma ihtiva eder.

Problemi sonlu-boyutlu optimizasyon problemine dönüştürebilmek için aşağıdaki parametrizasyon tekniği kullanılmıştır:

Öncelikle, $[t_0, t_{mid}]$ ve $[t_{mid}, t_f]$ aralıkları sonlu sayıda alt aralıklara bölünür:

$[t_0, t_{mid}] = \bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i)$ ve $[t_{mid}, t_f] = \bigcup_{j=1}^{M} [c_j, d_j)$.

Burada, $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ fonksiyonlarının yerine onların parçalı sabit yaklaşımları ele alınmıştır:

$v_1(t) = u_1^i =$ sabit, eğer $t \in [a_i, b_i)$, $i = 1, 2, ..., N$;

$v_2(t) = u_2^j =$ sabit, eğer $t \in [c_j, d_j)$, $j = 1, 2, ..., M$;

Böylece, kabul edilebilir prosesler yerine, sonlu-boyutlu bir optimizasyon problemi elde edilmiştir:

t_1, u_1^i, u_2^i yaklaşımları ile sonlu-boyutlu fonksiyonel aşağıdaki forma dönüşmüştür:

$J(t_1; u_1^1, u_1^2, ..., u_1^N; u_2^1, u_2^2, ..., u_2^M)$.

Ele alınan sonlu-boyutlu optimizasyon probleminin çözülebilmesi için, birinci mertebeden optimizasyon tekniği, yani gradyan-baz metodu da denilen gradyan projeksiyon prosedürü kullanılmıştır. Bu prosedürün adımları:

1) Fonksiyonelin optimize edilecek argümanları için sınırlamayı da sağlayacak bazı nominal değerler seçilir:

$$x^0 = (t_1^0, u_1^{1^0}, u_1^{2^0}, ..., u_1^{N^0}; u_2^{1^0}, u_2^{2^0}, ..., u_2^{M^0}).$$

2) Klasik anlamdaki gradyan metot algoritması aşağıdaki formdadır:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha_k.\nabla f(x_k). \tag{2.3.1}$$

Burada, $\nabla f(x_k)$ fonksiyonelin x_k noktasındaki gradyanı ; α_k ise anti-gradyan yönündeki adımdır (Ma et al., 2017).

3) Gradyan metot algoritması (2.3.1) de sonraki iterasyon tamamlandıktan sonra, x_1^{k+1} için uygun sınırlara geçilir ki burada t_1^{k+1} , $[t_0, t_f]$ aralığında aşağıdaki koşulla belirlenmiştir:

$$t_1^{k+1} = \begin{cases} 0, & t_1^{k+1} < 0 \\ 2, & t_1^{k+1} > 2. \end{cases}$$

4) Prosedür adımlarından 2 ve 3 bazı çıkış kriterleri sağlanıncaya kadar $k := k+1$ olacak şekilde değer atamasına devam edilir. Önerilen çıkış kriterleri:

- $\|\nabla f(x_k)\| \leq \epsilon_1$ • $|x^{k+1} - x^k| < \epsilon_3$ • $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| < \epsilon_2$

2.4 Uygulama

Bu uygulama (Kurina, 2011) den esinlenilerek hazırlanmış olup, t_1 anahtarlama noktası sabit olmayan bir nokta olarak ele alınmıştır. Bilinmeyen anahtarlama problemi, alt bölüm 2.3 teki Gradyan Projeksiyon Metot kulanılarak, bilinen anahtarlama problemine dönüştürülmüştür.

Minimize edilecek fonksiyonel aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$J(x,u_1,u_2,t_1) = \frac{1}{2}[(x_{11}(t_1) + x_{21}(t_1))^2 + \int_0^{t_1} (x_{11}^2(t) + 2x_{11}(t)x_{12}(t) \\ +3x_{12}^2(t) + u_1^2(t))dt \; + \int_{t_1}^{2} (x_{21}^2(t) + 8x_{22}^2(t) + u_2^2(t))dt]. \tag{2.4.1}$$

Sistemin durum yörüngeleri aşağıdaki gibi iki alt sistem olarak yazılabilir:

$$altsistem(1): \begin{cases} \dot{x}_{11}(t) - x_{11}(t) &= 0 \\ x_{12}(t) + u_1(t) &= 0 \qquad t \in [0,t_1) \\ x_{11}(0) &= -1, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$altsistem(2): \begin{cases} \dot{x}_{21}(t) &= 0 \\ x_{22}(t) - u_2(t) &= 0 \qquad t \in [t_1,2] \\ x_{21}(2) &= 1. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Dönüşüm (2.2.1) kullanılarak, (2.4.1)-(2.4.3) problemi bilinmeyen anahtarlama noktasını içermeyen yeni probleme dönüşür. Bu amaçla, $\dot{x}_{n+1}(t) = 0$ ve $x_{n+1}(0) = t_1$ olacak şekilde yeni değişken belirlenirse, bu adi diferansiyel denklemden $[0,2]$ aralığına ait $x_{n+1} = t_1$ bilinmeyen sabit değeri elde edilir. Ayrıca, $y_{i,j}(\tau) = x_{i,j}(t(\tau))$, $v_i(\tau) = u_i(t(\tau))$, $i,j = 1,2$ olmak üzere yeni durum ve kontrol değişkenleri atanır. Lineer dönüşüm (2.2.1) kullanılarak, $t_0 = 0$ ve $t_2 = 2$ olacak şekilde aralık dönüşümü yapılır. Eğer $\tau = 0$ iken $t = 0$; $\tau = 1$ iken $t = x_{n+1} = t_1$ ve $\tau = 2$ iken $t = 2$ olduğu göz önünde tutulursa, minimize edilen fonksiyonel ve durum denklemleri aşağıdaki formda olur:

$$J(v) = \frac{1}{2}[(y_{11}(1) + y_{21}(1))^2 + t_1 \int_0^1 (y_{11}^2(\tau) + 2y_{11}(\tau)y_{21}(\tau)$$
$$+3y_{12}^2 + v_1^2(\tau))d\tau + (2 - t_1) \int_1^2 (y_{21}^2(\tau) + 8y_{22}^2(\tau) + v_2^2(\tau))d\tau]. \quad (2.4.4)$$

Burada, $v = (v_1, v_2)$ dir ve durum denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$altsistem(1) : \begin{cases} \dot{y}_{11}(t) - t_1 y_{11}(t) &= 0 \\ y_{12}(t) + v_1(t) &= 0 \qquad t \in [0, t_1) \\ y_{11}(0) &= -1, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

$$altsistem(2) : \begin{cases} \dot{y}_{21}(t) &= 0 \\ y_{22}(t) - v_2(t) &= 0 \qquad t \in [t_1, 2] \\ y_{21}(2) &= 1. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

Üstteki sistemler göz önüne alındığında; (2.4.5) ile verilen altsistem(1), $y_{11}(t)$ ve $y_{12}(t)$ durum değişkenlerine, (2.4.6) ile verilen altsistem(2) ise $y_{21}(t)$ ve $y_{22}(t)$ durum değişkenlerine göre çözülüp (2.4.4) te yerine yazılırsa, minimize edilecek performans fonksiyoneli aşağıdaki formda olur:

$$\begin{aligned} J(t_1, v_1, v_2) &= \frac{1}{2}[(1 - \exp(t_1))^2 + t_1 \int_0^1 (\exp(2t_1\tau) + 2\exp(t_1\tau)v_1(\tau) \\ &+ 4v_1^2(\tau))d\tau + (2 - t_1) \int_1^2 (1 + 9v_2^2(\tau))d\tau]. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Ayrıca; (2.4.7) ile verilen fonksiyonelin sonlu-optimizasyon teknikleri ile çözülebilmesi için öncelikle aşağıdaki formda sonlu-boyutlu yapıya dönüştürülmesi gerekir:

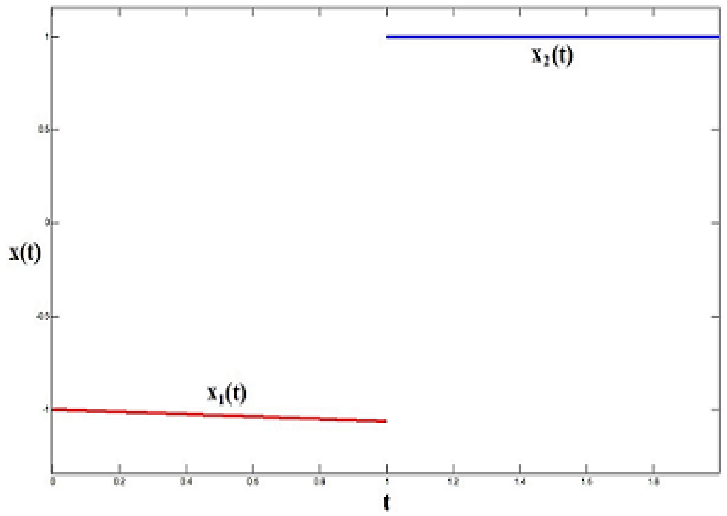
$$\begin{aligned} J(t_1, w_1, w_2) &= \frac{1}{2}[(1 - \exp(t_1))^2 + t_1 \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 (\exp(2t_1\tau) + 2\exp(t_1\tau)w_1^i(\tau) \\ &+ 4(w_1^i)^2(\tau))d\tau + (2 - t_1) \sum_{j=1}^{M} \int_1^2 (1 + 9(w_2^j)^2(\tau))d\tau]. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Burada, $t \in [0,1)$ için $v_1(t) = w_1^i$ = sabittir ve $t \in [1,2]$ için $v_2(t) = w_2^j$ = sabit değer alırlar.

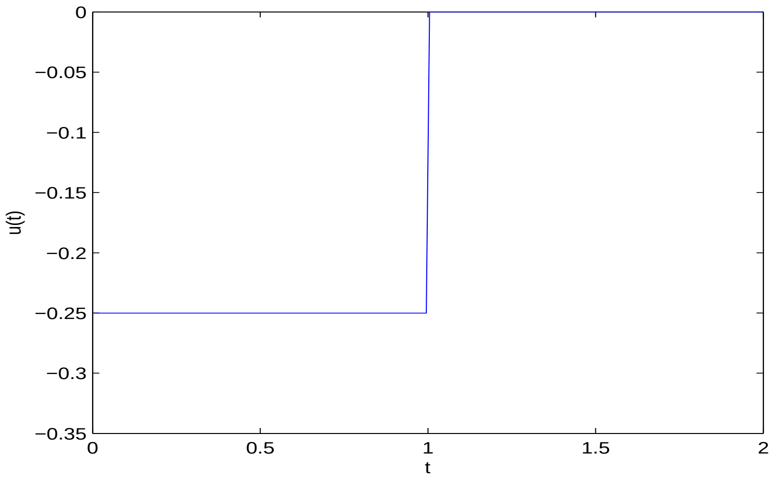
Son olarak, Gradyan Projeksiyon Metodu kullanılarak optimal kontrol girdisi ve durum eğrileri ile optimal maliyet eğrisi mümerik olarak ayrı ayrı grafikler üzerinde gösterildi. Gradyan algoritma uygulamasında nominal değer $t_1 = 1.0$ alınarak ve 160 iterasyon sonucu optimal anahtarlama zamanı $t_1^* = 0.0653$ ve optimal maliyet (cost) $J^* = 0.9958$ olarak bulunmuştur. Nümerik hesaplamalarda C Sharp (Programlama dili) Intel (R) Core (TM) i7-3720QM 2.60 GHz , 8GB RAM, PC (kişisel bilgisayar) kullanılmış ve hesaplama zamanı 0.7387 saniye olarak kaydedilmiştir.

2.5 Sonuçlar

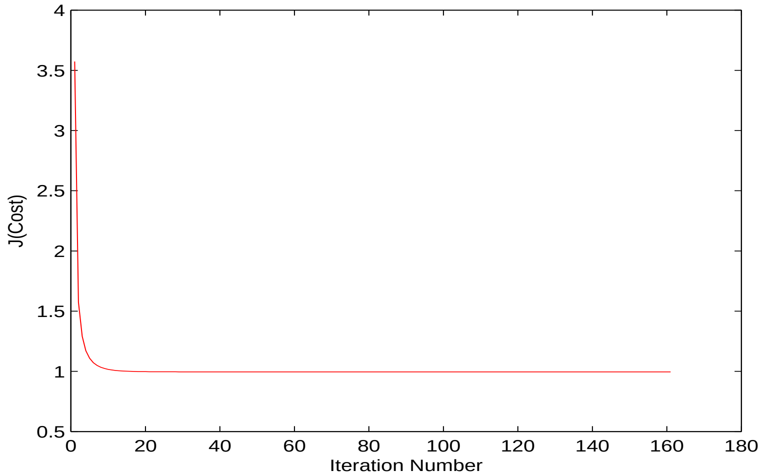
Bu bölümde ele alınan; anahtarlamalı sistemler için lineer kuadratik optimal kontrol problemi, bilinmeyen anahtarlama parametreli ve sabit aralıkta bilinmeyen sınır değerlerine sahip integrale dönüştürülerek, sonlu boyutlu optimizasyon problemine indirgenmiştir. Bu problemin çözümü için Gradyan Projeksiyon Metodu kullanılmış ve optimal anahtarlama anı (t_1^*), optimal yörünge eğrileri $x^*(t)$, optimal kontrol fonksiyonu $u^*(t)$ ve optimal maliyet değeri J^* hesaplanarak ayrı ayrı grafikler üzerinde gösterilmiştir. Eğer n sayıda anahtarlama noktası içeren bir problem olsaydı, bu durumda n+1 alt sisteme indirgenebilen durum denklemleri üzerinden aynı metot kullanılarak benzer prosedür takip edilirdi.



Şekil 2.1: Optimal Yörüngeler



Şekil 2.2: Optimal Kontrol Girdisi



Şekil 2.3: Optimal Maliyet Eğrisi

3. ORTA-ALAN STOKASTİK SİSTEMLERİN STOKASTİK OPTİMAL BİLEŞİK KONTROLÜNÜN GENEL KARAKTERİSTİĞİ VE UYGULAMASI

Bu bölümde, sıçrama-sistemli orta-alan stokastik diferansiyel denklemler (MF-SDEJs) için optimal stokastik bileşik kontrolün genel bir karakterizasyonu, maksimum prensip yaklaşımı ile karma konveks-spike perturbasyon yöntemi uygulanarak oluşturulmaya çalışılacaktır. Stokastik diferansiyel denklemin (SDE) yapısında yer alan difüzyon katsayısı, süreklililiğe sahip bir kontrol değişkenine bağlıdır ve ayrıca kontrolün tanım kümesinin konveks olması gerekmemektedir. SDE' nin katsayıları ve performans fonksiyoneli sadece durum (state) prosesine değil, aynı zamanda durum prosesinin beklenen değeri üzerinden marjinal kaideye (marginal law) de bağlıdır. Bileşik orta-alan kontrol probleminde, durum prosesleri için iki sıçrama sınıfı; Poisson martingale ölçüsünün neden olduğu erişilemez sıçramalar ve kontrol değişkeninin singülerliğinden kaynaklanan tahmin edilebilir olanlar, tartışılacaktır.

Ulaşılan teorik sonuçları bir uygulama üzerinde göstermek amacıyla, Markowitz' in ortalama-varyans portfolyö seçim problemi müdahale konrolü ile birlikte ele alınarak incelenecektir.

3.1 MF-SDEJs Kontrol Probleminin Formülasyonu

Bu çalışmada ele alınan, Brown hareketi ve Poisson martingale ölçümleri ile ifade edilen stokastik sıçrama-sistemleri için lineer olmayan orta-alan stokastik diferansiyel denklemler ile idare olunan bileşik kontrol problemi aşağıdaki formdadır:

$$
\begin{cases} dX^{u,\eta}(t) = f(t, X^{u,\eta}(t), E(X^{u,\eta}(t)), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \sigma(t, X^{u,\eta}(t), E(X^{u,\eta}(t)), u(t))dB(t) \\ \qquad\qquad + \int_{\Theta} g(t, X^{u,\eta}(t_-), u(t), z)N\left(dz, dt\right) + G(t)d\eta(t), \\ X^{u,\eta}(0) = X_0. \end{cases} \tag{3.1.1}
$$

Burada, f, σ, g ve $G\left(\cdot\right)$ verilen deterministik fonksiyonlardır. $B(\cdot)$; standart Brown hareketi olmak üzere, $N\left(\cdot,\cdot\right)$; Poisson martingal ölçümü, $\eta(\cdot)$; kontrolun singüler bileşenidir. Kontrol değişkeni; sürekli stokastik kontrol $u(\cdot)$ ve singüler kontrol $\eta(\cdot)$' nın bileşiminden oluşur.

Beklenen maliyet (expected cost), $[0, T]$ zaman aralığında aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$
\begin{aligned} J_0\left(X_0, u(\cdot), \eta(\cdot)\right) &= E\Big\{ \int_0^T \ell(t, X^{u,\eta}(t), E(X^{u,\eta}(t)), u(t))dt \\ &+ h(X^{u,\eta}(T), E(X^{u,\eta}(T))) + \int_{[0,T]} \mathcal{M}(t)d\eta(t) \Big\} \end{aligned} \tag{3.1.2}
$$

Burada, ℓ, h ve $\mathcal{M}(\cdot)$ verilen dönüşümler ve $\int_{[0,T]} \mathcal{M}(t)d\eta(t)$ müdahale maliyeti (intervention cost) olarak adlandırılır.
Kabul edilebilir (admissible) kontrol çifti $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$,

$$
J_0\left(X_0, u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)\right) = \inf_{(u(\cdot),\eta(\cdot))\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2([0,T])} J_0\left(X_0, u(\cdot), \eta(\cdot)\right) \tag{3.1.3}
$$

eşitliğini sağlıyorsa optimaldir.

3.2 Kavramlar ve Tanımlar

- $\Omega \neq \varnothing, \quad \mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$,
- σ-cebri (field): $\mathcal{F}$

  i) $\Omega \in \mathcal{F}$

  ii) A, B $\in \mathcal{F} \Rightarrow$ B-A $\in \mathcal{F}$

iii) $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

- Ölçülebilir uzay: $(\Omega, \mathcal{F})$

- Olasılık uzayı: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

  $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, $\quad (\Omega, \mathcal{F})$ üzerinde olasılık uzayı olabilmesi için:

  i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$

  ii) $A_i \in \mathcal{F}, \quad A_i \bigcap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$

  iii) $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ = $\Sigma_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

- $\mathbb{P}-$ null kümesi: $A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}(A) = 0.$

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Tam (Complete): $\mathbb{P}-$ null kümesi $A \in \mathcal{F}, \quad B \in \mathcal{F}, \quad B \subseteq A$

- Ölçülebilir fonksiyon:

  $(\Omega, \mathcal{F})$ ve $(\Omega', \mathcal{F}')$ ölçülebilir uzaylar,

  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$, ise f, $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-ölçülebilirdir.

  $f^{-1}(\mathcal{F}') \subseteq \mathcal{F}$ ise f ölçülebilir fonksiyondur.

- Borel σ-cebri: $\mathbf{B}(\Omega)$

  Ω nın tüm açık kümelerini içeren en küçük σ-cebrine Borel σ-cebri denir.

- Rastgele Değişken (Random Variable):

  $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ ise X'e $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-rastgele değişkeni denir.

  $\sigma(X) = X^{-1}(\mathcal{F}')$ X ile üretilmiş σ-cebri.

- Stokastik Proses:

  Rastgele değişkenlerin toplamı (collection) $\{X_t : t \geq 0\}$ olarak ifade edilir.

  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı, $\{X(t), t \in I\}$ rastgele değişkenler ailesi,

  $X(t) : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}^m$ stokastik prosestir.

  Sample path : $\{X(t, \omega)\} : t \geq 0\}, \;\; t \rightarrow X(t, \omega), \;\; \omega \in \Omega.$

- Stokastik Süreklilik:

  s$\in [0, T], \quad \epsilon > 0,$

  $\lim_{t \rightarrow s} P\{\omega \in \Omega : |X(t, \omega) - X(s, \omega)| > \epsilon\} = 0$

- Sağdan-Soldan Süreklilik (Allen E., 2007) :

  $\mathcal{F}_{t^+} \triangleq \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \quad t \in [0, T]$

  $\mathcal{F}_{t^-} \triangleq \bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s, \quad t \in [0, T]$

  $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ ya da $\mathcal{F}_{t^-} = \mathcal{F}_t$

- Filtrasyon:

  $(\Omega, \mathcal{F})$ ölçülebilir uzay, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$

  $\mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$, monoton, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$

  Bu tür $\mathcal{F}_t$ ailesine filtrasyon denir.

- Filtrelenmiş Ölçülebilir Uzay: $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$

- Filtrelenmiş Olasılık Uzay: $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$

- Prosesin Ölçülebilirliği:

  Eğer $(t, \omega) \to X(t, \omega)$ dönüşümü $(\mathbf{B}[0, T] \times \mathcal{F})/\mathbf{B}(U)$-ölçümlü ise X(t) prosesi ölçülebilirdir.

- Prosesin Uyarlanmış (Adapted) Olması:

  Eğer tüm t $\in [0, T]$ için $\omega \to X(t, \omega)$ dönüşümü $\mathcal{F}_t/\mathbf{B}(U)$-ölçümlü ise X(t) prosesi $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-uyarlanmış prosestir (Yong J. and Zhou X. Y., 1999).

3.2.1 Beklenen Değer (Expectation)

- X rastgele değişkeni (Ω, F) üzerinde ve P olasılığı ise F üzerinde tanımlı olsun. X in beklenen değeri ya da ortalama değeri:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X dx. \\ f_X &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}, \;\; x \in R. \end{aligned}$$

- X rastgele değişkeninin varyansı:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu X)^2 f_X dx.$$

- Reel değerli bir g fonksiyonu için g(X) in beklenen değeri:

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X dx.$$

- (Lineerlik) Eğer X ve Y integrallenebilir, α ve β reel sabitler olmak üzere;

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

- Eğer rastgele değişken $X \geq 0$ iken $EX = 0$ durumu ancak ve ancak eğer $P(X = 0) = 1$ ise mümkündür.

- Y=y verildiğinde, X in koşullu dağılım fonksiyonu:

$$P(x \leq X \mid Y = y) = \frac{P(x \leq X, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

- Y=y verildiğinde, X in koşullu yoğunluk fonksiyonu:

$$\begin{aligned} f(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx, \\ f(x,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\sigma^2)}} exp\{-\frac{(x^2 - 2\rho xy + y^2)}{2(1-\sigma^2)}\}. \end{aligned}$$

- Y= y verildiğinde, X in koşullu beklenen değeri:

$$\begin{aligned} E(X \mid Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid y) dx, \\ E(X|Y) &= g(Y). \end{aligned}$$

- Eğer $G = \{\emptyset, \Omega\}$ trivial cebir ise $E(X|G) = EX$.

- Eğer X, G-ölçülü ise $E(X|G) = X$.

- Eğer X, G-ölçülü ise $E(XY|G) = XE(Y|G)$.

- Eğer X ile G bağımsız ise $E(X|G) = E(X)$.

- Eğer $G_1 \subset G_2$ ise $E(E(X \mid G_2) \mid G_1) = E(X \mid G_1)$. Eğer G_1 özel olarak trivial cebir seçilirse; $E(E(X \mid G)) = E(X)$ olur.

- Eğer $\sigma(X)$ ve G bağımsız ise $E(X|G) = EX$.

- Eğer $\sigma(X)$ ve G bağımsız, F ve G de ayrıca bağımsız olmak üzere ve $\sigma(F, G)$ her ikisini içeren en küçük σ-cebri ise $E(X|\sigma(F, G)) = E(X|F)$.

- Koşullu olasılık $P(A|G)$, G- ölçülü rastgele değişkendir ve indikatör fonksiyonun koşullu beklenen değeri olarak tanımlanabilir (Mikosh T., 1998):
  $P(A|G) = E(I_A|G)$, P-a.s.

- Bir G σ-cebri verildiğinde, X in koşullu beklenen değeri, $E(X|G)$ bir G-ölçülü rastgele değişken olmak üzere herhangi sınırlı G-ölçülü ξ için:
  $E(\xi E(X|G)) = E(\xi X)$

- Fubini Teoremi: İntegral ya da toplam sembolü ile beklenen değerin yer değiştirilebileceğini ifade eder: X(t) stokastik proses, $0 \leq t \leq T$ (tüm t ler için X(t) rastgele değişken) ve düzgün örnek yol (regular samle path) ile herhang bir t noktasındaki tüm ω lar için X(t) sol ve sağ limitlere sahip ise:

  $$\int_0^T E|X(t)|dt = E(\int_0^T |X(t)|dt).$$

  Eğer bu nicelik sonlu ise aşağıdaki eşitlik geçerlidir (Evans L. C., 2014):

  $$E(\int_0^T X(t)dt) = \int_0^T E(X(t))dt.$$

3.2.2 Brown Hareketi (Brownian Motion)

$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ Filtrelenmiş Olasılık Uzayı olsun, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-adapte, $\mathbb{R}^m$-değerli B(t) prosesi $B = (B_t, t \in [0,\infty))$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa Brown hareketi ya da Wiener proses olarak adlandırılır:

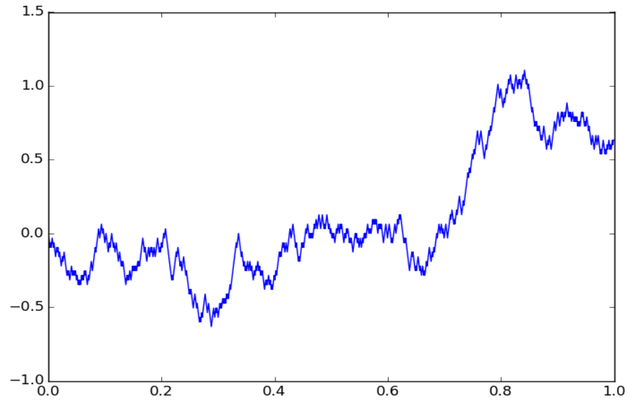
- (Bağımsız Artışlar-Independent Increments)
  $B_t - B_s$ tüm $0 \leq s < t < \infty$ için F_s den bağımsızdır. Yani, $B_u, 0 \leq u \leq s$ olmak üzere, σ-cebri $B(u)$ ile üretilmiştir, $u \leq s$.
- (Durağan Artımlar-Stationary Increments)
  $B_t - B_s = B_{t-s}, \ \ 0 \leq s < t < \infty.$
- (Normal Artımlar-Normal Increments)
  $B_t - B_s$, ortalaması 0 ve varyansı $t - s$ olan bir Normal Dağılıma sahiptir.
  $B_t - B_s =$ Normal$(0, t-s)$, $\ 0 \leq s < t < \infty.$
- Eğer $B_0 \equiv 0$ ise B standart Brown hareketidir.
- $B(t), \ 0 \leq t \leq T$ sample paths (örnek yollar) olmak üzere, t' nin sürekli fonksiyonlarıdır. Hiç bir aralıkta monoton değildir ve hiç bir nokta için diferansiyellenemez:
  $P(\forall t \geq 0 : \limsup_{h\to 0} | \dfrac{B(t+h) - B(t)}{h} | = \infty) = 1.$
- Herhangi bir aralık için sonsuz varyasyona (infinite variation) sahiptir:
  $V(B; [a,b], \delta_n) = \lim \sum_{i=1}^{n} (B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)) \to \infty,$
  $\delta_n = \max(t_i^n - t_{i-1}^n), \ 1 \leq i \leq n, \ \| \delta_n \| \to 0,$ a.s.
  Hemen hemen tüm Brownian yolları tüm zaman aralıkları için sınırsız (unbounded) varyasyona sahiptir.
- Brown hareketinin $[0,t]$ aralığındaki kuadratik varyasyonu t dir:
  $Q[B](t) = \lim \sum_{i=1}^{n} (B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n))^2 = t,$
  $\delta_n = \max(t_i^n - t_{i-1}^n), \ 1 \leq i \leq n, \ \ \| \delta_n \| \to 0,$ a.s.
- Brown Hareketi için Itô formülü:
  $f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B(s))ds.$

- Geometrik Brown Hareketi:

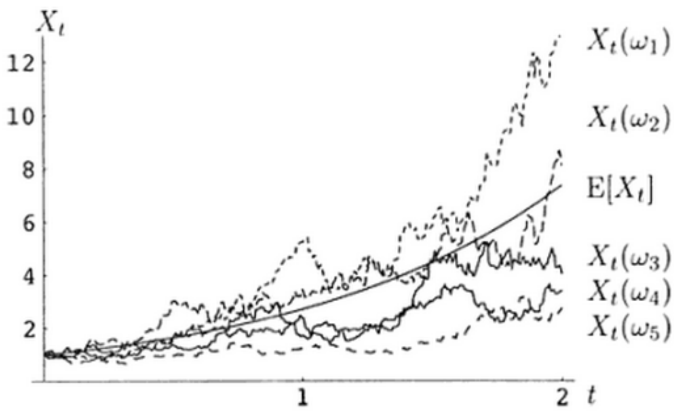
  X_t stokastik prosesi aşağıdaki SDE' yi sağlıyorsa, bu denklemin çözümü Geometrik Brown Hareketi ya da Üstel Brown Hareketi olarak adlandırılır (Øksendal B., 2014):

  $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,\ X_t(0) = X_0.$

  $X_t = X_0 exp[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t].$



Şekil 3.1: Brown Hareketi Simülasyonu



Şekil 3.2: Brown Hareketi ve Beklenen Değeri

3.2.3 Poisson Prosesi

Bir adapted (uyarlanmış) proses $N = \{N_t, t \geq 0\}$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa Poisson proses olarak adlandırılır:

- $N(0) = 0$.
- $N(t)$ bir sayma (counting) prosesidir.
  Eğer ilk iki olay $t = 2$ ve $t = 3$ te gerçekleşiyorsa, $N(2) = 1$, $N(3) = 2$ olarak kaydedilir. $t \in (2, 3)$ için $N(t) = 1$ ve $t < 2$ için $N(t) = 0$ yazılır. Böylece, $N_t - N_s$ artımı $(s, t]$ aralığındaki olayların sayısını ifade eder.
- $N(t)$ her bir t için negatif olmayan bir tam sayıdır ve azalmayan (nondecreasing) prosestir.
- (Bağımsız Artışlar-Independent Increments)
  $N_t - N_s$ tüm $0 \leq s < t < \infty$ için F_s den bağımsızdır.
  Eğer $(s_1, t_1] \cap (s_2, t_2] = \emptyset$ ise $N(t_1) - N(s_1)$ ve $N(t_2) - N(s_2)$ birbirinden bağımsızdır.
- (Durağan Artımlar-Stationary Increments)
  $N_t - N_s = N_{t-s}, \;\; 0 \leq s < t < \infty.$
- Poisson proses ile Poisson Dağılımı arasındaki ilişki:

$$\begin{aligned} P[N_t = n] &= Poisson(\lambda t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \;\; n = 0, 1, 2, ... \\ E(N_t) &= \lambda t, \\ Var(N_t) &= \lambda t. \end{aligned}$$

- $N(t)$ olasılık anlamında süreklidir.

$$\begin{aligned} P[|N_t - N_s| > \varepsilon] &= P[N_{t-s} > \varepsilon] = 1 - P[N_{t-s} = 0] \\ &= 1 - e^{-\lambda(t-s)} \to 0, \;\; s \to t \end{aligned}$$

- (Rastele Ölçüm-Random Measure)

  (Ω, F) ölçülebilir uzay ve (Ω, F, P) olasılık uzayı olsun. (Ω, F) üzerinde bir rastgele ölçüm M, $(M(B), B \in F)$ olacak şekilde rastgele değişkenlerin bir toplamı (collection) dır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

  1. $M(\emptyset) = 0,$
  2. F deki karşılıklı ayrık kümelerin herhangi bir dizisi $(A_n, n \in N)$ olmak üzere,
     $M(\bigcup_{n\in N} A_n) = \sum_{n\in N} M(A_n)$ a.s.,
  3. F deki her bir ayrık aile $(B_1, ..., B_n)$ için rastgele değişkenler $M(B_1), ..., M(B_n)$ bağımsızdır.

- (Poisson Rastgele Ölçümü-Poisson Random Measure)

  Eğer her bir $M(B)$ rastgele değişkeninin $M(B) < \infty$ olacak şekilde bir Poisson Dağılımı var ise Poisson rastgele ölçümü elde edilir. Aşağıdaki özellikleri sağlar (Protter P. E., 2005):

  1. Her bir $t > 0$, $\omega \in \Omega$ için $N(t, .)(\omega)$ prosesi $B(R^d - \{0\})$ üzerinde bir sayma prosesidir.
  2. Alttan sınırlı her bir A kümesi için $(N(t, A), t \geq 0))$ prosesi $\mu(A) = E(N(I, A))$ yoğunluklu (intensity) bir poisson prosestir.
  3. $(\tilde{N}(t, A), t \geq 0)$ bir martingal-değerli ölçümdür ve aşağıdaki eşitlik geçerlidir:
     $\tilde{N}(t, A) = N(t, A) - t\mu(A).$

  Ayrıca, birçok durumda, (Ω, F) üzerinde tüm $A \in F$ ler için $\lambda(A) = E(M(A))$ olacak şekilde bir λ, σ-sonlu ölçümü vardır.

- (Poisson İntegrali)

  Bir f fonksiyonu, R^d den R^d ye tanımlı Borel ölçümlü bir fonksiyon olsun. A alttan sınırlı bir küme olmak üzere her bir $t > 0$, $\omega \in \Omega$ için f nin Poisson integrali bir rastgele sonlu toplam şekilde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\int_A f(x)N(t, dx)(\omega) = \sum_{x\in A} f(x)(N(t, \{x\})(\omega)$$

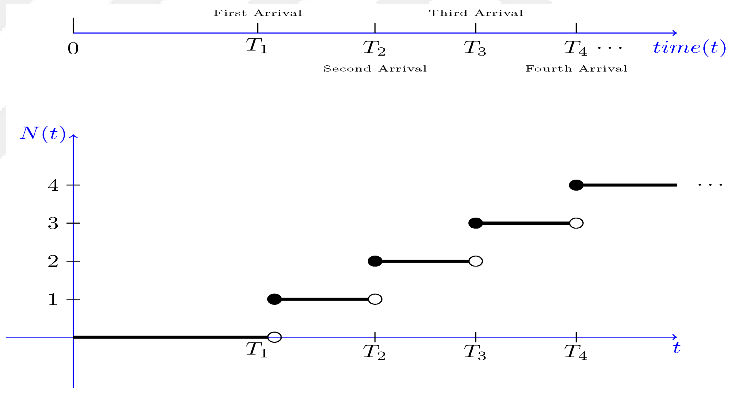
Burada, her bir $\int_A f(x)N(t,dx)$, R^d-değerli rastgele değişkendir ve t değiştikçe *cádlág* stokastik prosesine dönüşür.

Ayrıca, $(N(t,\{x\}) \neq 0 \Leftrightarrow \Delta X(s) = x$ olduğundan en az bir $0 \leq s \leq t$ aralığı için aşağıdaki ifade yazılabilir:

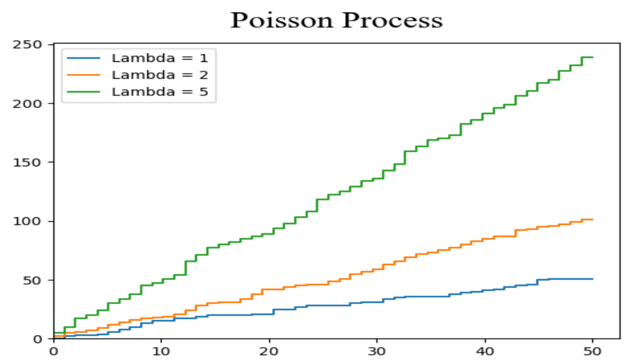
$$\int_A f(x)N(t,dx)(\omega) = \sum_{0 \leq s \leq t} f(\Delta X(s))\chi_A(\Delta X(s)).$$

Bu durumda, $(\int_A f(x)N(t,dx),\ \ t \geq 0)$ bir compound poisson prosesidir ve her bir $f \in L^1(A, \mu(A),\ t \geq 0)$ için compensated poisson integrali aşağıdaki gibi tanımlanır (Applebaum D., 2009):

$$\int_A f(x)\tilde{N}(t,dx) = \int_A f(x)N(t,dx) - t\int_A f(x)\mu(dx).$$



Şekil 3.3: Sayma prosesindeki örnek yol (sample path)



Şekil 3.4: Poisson Prosesi

- μ : Homojen $\mathcal{F}_t$-Poisson nokta prosesi.

- $\widetilde{N}(dz, dt)$: μ' ye bağlı rastgele sayma ölçümü. $\widetilde{N} \in (\Theta \times \mathbb{R}_+)$, $\Theta \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{B}\left(\Theta\right)$

- $m\left(dz\right)$: μ'nün yerel karakteristik ölçümü. $(\Theta, \mathcal{B}(\Theta))$ üzerinde σ-sonlu ölçümü olmak üzere, $m(\ \Theta) < +\infty$.

- $\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$: $\{f(\cdot)$, $[0,T]$ üzerinde $\mathcal{F}_t-$ adapte reel değerli ölçülebilir proses olmak üzere, $E\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty\}$.

- $\mathbb{M}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\mathbb{R})$: $\{f(\cdot,\cdot)$, $([0,T] \times \Theta)$ üzerinde $\mathcal{F}_t-$ adapte reel değerli ölçülebilir proses olmak üzere, $E\int_0^T \int_\Theta |f(t,z)|^2 m(dz)dt < \infty\}$.

- $N(\cdot,\cdot)$: Poisson martingal ölçümü ve $N \in (\mathcal{B}(\Theta) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ yerel karakteristikleri $m(dz)dt$ olmak üzere, $N(dz,dt) = \widetilde{N}(dz,dt) - m(dz)dt$.

- I_A : İndikatör fonksiyonu.

- $X^{u,\eta}(t_-) = \lim\limits_{s\to t, s<t} X^{u,\eta}(s)$, $t \in [0,T]$.

- $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$: $(\mathcal{F}_t^{(W,N)})_{t\in[0,T]}$ natürel filtrasyonunun $P-$artımı,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t^{(W,N)} &= \sigma\left\{W(s) : 0 \leq s \leq t\right\} \\ &\vee \ \sigma\left\{\int_0^s \int_U N(dz,dr) : 0 \leq s \leq t,\ U \in \mathcal{B}\left(\Theta\right)\right\} \vee \mathcal{F}_0, \end{aligned}$$

- $\mathcal{F}_0$: $\mathbb{P}-$ null kümelerinin toplamı.

- $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$: $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. ile üretilmiş σ-cebri.

- $\mathbb{A}_1$: $\mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi, $\mathbb{A}_2$: $\mathbb{R}^+$.

- $(u(\cdot), \eta(\cdot))$: Kabul edilebilir (admissible) kontrol çifti, $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2-$değerli, $\mathcal{F}_t^W-$ adapte prosesleridir.

- $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2([0,T])$: Kabul edilebilir (admissible) kontroller kümesi.

- $\eta(\cdot)$: Sınırlı varyasyonun stokastik prosesi; azalmayan, sağdan sürekli ve soldan limitlidir. Müdahale kontrolü (intervention control) olarak adlandırılır. Ayrıca, $\eta(t_-) = \lim\limits_{s\to t, s<t} \eta(s)$, $t > 0$.

- $E[\sup_{t\in[0,T]} |u(t)|^2 + |\eta(T)|^2] < \infty.$

3.3 Önsel Değerlendirmeler ve Hipotezler

- Singüler kontrol $\eta(\cdot)$' nın herhangi t_j anındaki sıçramaları:
  $\Delta\eta(t_j) \triangleq \eta(t_j) - \eta(t_{j-})$.
- Singüler kontrolun sürekli parçası:
  $\eta^{(c)}(t) = \eta(t) - \sum_{0\leq t_j\leq t} \Delta\eta(t_j)$.
- Herhangi t sıçrama anında, $\eta(\cdot)$ singüler kontrolü ile elde edilen sıçramalar arasındaki fark: $\Delta_\eta X^{u,\eta}(t) = G(t)\Delta\eta(t) = G(t)(\eta(t) - \eta(t_-))$.
- $\widetilde{N}(z,t)$ Poisson martingal ölçümü ile elde edilen $X^{u,\eta}(t)$ sıçramaları:

$$\begin{aligned}\Delta_N X^{u,\eta}(t) &= \int_\Theta g(t, X^{u,\eta}(t_-), u(t_-), z)\widetilde{N}(dz,\{t\}) \\ &= \begin{cases} g\left(t, X^{u,\eta}(t_-), u(t), z\right), & \eta\text{' nın t de z sıçraması var ise} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}\end{aligned}$$

- $\widetilde{N}(dz,\{t\})$: t anında Poisson rastgele ölçümünde oluşan sıçrama.
- Herhangi bir t sıçrama anında durum (state) prosesinin genel sıçraması:

$$\Delta X^{u,\eta}(t) = X^{u,\eta}(t) - X^{u,\eta}(t_-) = \Delta_\eta X^{u,\eta}(t) + \Delta_N X^{u,\eta}(t).$$

Kolaylık olması açısından, bu bölümdeki notasyonlar aşağıdaki gibi gösterilmiştir: $\varphi = f, \sigma, \ell$: olmak üzere;

$$\begin{cases} \varphi_x(t) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(t, X^*(t), E(X^*(t)), u^*(t)), \\ \delta\varphi(t) = \varphi(t, X^*(t), E(X^*(t)), u(t)) - \varphi(t, X^*(t), E(X^*(t)), u^*(t)), \\ g_x\left(t,z\right) = g_x\left(t, x(t_-), u(t), z\right), \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
g_{xx}(t,z) &= g_{xx}(t,x(t_-),u(t),z)\,, \\
\varphi_{xx}(t) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,X^*(t),E(X^*(t)),u^*(t)), \\
\mathbb{W}_t(\varphi,y) &= \frac{1}{2}\varphi_{xx}(t,X^*(t),E(X^*(t)),u^*(t))y^2, \\
\mathbb{W}_{t,z}(g,y) &= \frac{1}{2}g_{xx}(t,X^*(t),u^*(t),z)y^2.
\end{aligned}
$$

Ayrıca, aşağıdaki ifadeler kullanılmıştır:

$$
\begin{aligned}
\delta H(t) &= \Psi^*(t)\delta f(t) + K^*(t)\delta\sigma(t) + \int_\Theta \delta g(t,z)\,\gamma^*(t,z)m(dz) - \delta\ell(t), \\
H_x(t) &= f_x(t)\,\Psi^*(t) + \sigma_x(t)\,K^*(t) + \int_\Theta g_x(t,z)\,\gamma^*(t,z)m(dz) - \ell_x(t)\,, \\
H_{xx}(t) &= f_{xx}(t)\,\Psi^*(t) + \sigma_{xx}(t)\,K^*(t) + \int_\Theta g_{xx}(t,z)\,\gamma^*(t,z)m(dz) - \ell_{xx}(t)\,.
\end{aligned}
$$

İleride ifade edilecek teorem ve lemmalarda kullanılmak üzere aşağıdaki hipotezler verilmiştir:

Hipotez (H1) Değişkenleri (x,y)' ye göre iki kez sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar ve $y = E(x)$;

$$
\begin{aligned}
f &: [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{A}_1 \to \mathbb{R}, \\
\sigma &: [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{A}_1 \to \mathbb{R}, \\
\ell &: [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{A}_1 \to \mathbb{R}, \\
h &: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

olmak üzere, bu fonksiyonların (x,y)' ye göre ikinci-mertebeye kadar türevleri (x,y,u)' da sürekli ve sınırlıdır.

Hipotez (H2) Değişkeni x' e göre iki kez sürekli diferansiyellenebilen fonksiyon;

$$
g : [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{A}_1\times\Theta \to \mathbb{R}
$$

olmak üzere, bu fonksiyon için g_x süreklidir ve $\sup\limits_{z\in\Theta}|g_x(t,z)|<+\infty$ dur. Ayrıca,

$$\sup_{z\in\Theta}|g(t,x,u,z)-g(t,x',u,z)|+\sup_{z\in\Theta}|g_x(t,x,u,z)-g_x(t,x',u,z)|\leq C|x-x'|, \tag{3.3.1}$$

$$\sup_{z\in\Theta}|g\left(t,x,u,z\right)|\leq C\left(1+|x|\right), \tag{3.3.2}$$

eşitliklerini sağlayan ve $C>0$ olacak şekilde, bir C sabiti vardır.

Hipotez (H3) Sürekli ve sınırlı fonksiyonlar;

$$G\left(\cdot\right):[0,T]\rightarrow\mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \mathcal{M}\left(\cdot\right):[0,T]\rightarrow\mathbb{R}^{+}$$

olmak üzere, (H1)-(H3) hipotezleri altında (3.1.1) denkleminin tek çözümü $x^{u,\eta}\left(\cdot\right)$ aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} X^{u,\eta}(t) &= X_0+\int_0^t f(s,X^{u,\eta}(s),E(X^{u,\eta}(s)),u(s))ds \\ &+ \int_0^t \sigma(s,X^{u,\eta}(s),E(X^{u,\eta}(s)),u(s))dB(s) \\ &+ \int_0^t\int_\Theta g(s,X^{u,\eta}(s_-),u(s),z)N\left(dz,ds\right)+\int_{[0,t]}G(s)d\eta(s). \end{aligned}$$

Burada, $E\left[\sup\limits_{t\in[0,T]}|X^{u,\eta}(t)|^n\right]<C_n$ olacak şekilde, C_n sadece n' ye bağlı bir sabittir ve $J(X_0,\cdot,\cdot)$ fonksiyoneli iyi tanımlıdır.

3.4 Ek Denklemler

Bu bölümde ele alınan orta-alan kontrol problemi için stokastik maksimum prensibinin ispatında kullanılacak ek denklemler (adjoint equations) üretilecektir. Singüler kontrolden bağımsız ek denklemler aşağıdaki gibidir:

(1) Birinci mertebeden ek denklem:

$$\begin{cases} d\Psi(t) = -\left\{ f_x\left(t\right)\Psi(t) + E\left(f_y(t)\Psi(t)\right) \right. \\ \qquad + \sigma_x\left(t\right)K(t) + E\left(\sigma_y(t)K(t)\right) + \ell_x\left(t\right) + E\left(\ell_y(t)\right) \\ \qquad \left. + \int_\Theta g_x\left(t,z\right)\gamma(t,z)m(dz) \right\} dt + K(t)dB(t) \\ \qquad + \int_\Theta \gamma(t,z)N(dt,dz) \\ \Psi(T) = -\left(h_x\left(X(T),E(X(T)\right) + E\left(h_y\left(X(T),E(X(T)\right)\right)\right). \end{cases} \tag{3.4.1}$$

(2) İkinci mertebeden ek denklem: Klasik lineer geri-SDEJs (Hafayed et al., 2013; Tang et al., 1994)

$$\begin{cases} dQ(t) = -\left\{ 2f_x\left(t\right)Q(t) + \sigma_x^2\left(t\right)Q(t) + 2\sigma_x\left(t\right)R(t) \right. \\ \qquad + \int_\Theta \left(\psi(t,z) + Q(t)\right)\left(g_x\left(t,z\right)\right)^2 m(dz) \\ \qquad + 2\int_\Theta \psi(t,z)g_x\left(t,z\right)m(dz) \\ \qquad \left. + H_{xx}(t)) \right\} dt + R(t)dB(t) + \int_\Theta \psi(t,z)N(dz,dt) \\ Q(T) = -h_{xx}\left(x(T),E(x(T))\right). \end{cases} \tag{3.4.2}$$

(H1) ve (H2) koşulları altında, birinci mertebeden ek denklem (3.4.1)' in bir ve yalnız bir $\mathcal{F}_t-$adapte çözüm çifti;

$$(\Psi(\cdot),K(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}\right) \times \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}\right) \times \mathbb{M}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}\right), \tag{3.4.3}$$

ve ikinci mertebeden ek denklem (3.4.2)' nin bir ve yalnız bir $\mathcal{F}_t-$adapte çözüm çifti;

$$(Q(\cdot),R(\cdot),\psi(\cdot,\cdot)) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}\right) \times \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}\right) \times \mathbb{M}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T];\mathbb{R}\right), \tag{3.4.4}$$

belirtilen kümeler üzerinde ifade edilebilir (Buckdahn et al., 2011; Hafayed et al., 2013).

Orta-alan stokastik kontrol problemi (3.1.1)-(3.1.2) için klasik Hamilton denklemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
&H\left(t, X, Y, u, \Psi(t), K(t), \gamma(t, z)\right) \\
&\triangleq \Psi(t) f\left(t, X, Y, u\right)+K(t) \sigma\left(t, X, Y, u\right) \\
&+\int_{\Theta} \gamma(t, z) g\left(t, X(t), u(t), z\right) m(dz)-\ell\left(t, X, Y, u\right).
\end{aligned} \tag{3.4.5}
$$

Burada, $(t, X, u) \in[0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{A}_1$ ve $(\Psi(t), K(t), \gamma(t, z)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dir.

3.5 Teorem ve Lemmalar

Bu alt bölümde, sıçramalı-sistemlerde (MF-SDEJs) optimal sürekli-singüler kontrol için, orta-alan tipinde gereklilik koşulları belirlenecektir. Elde edilen koşulların ispatında kontrolün sürekli parçası için *spike varyasyon metodu*, singüler parçası için ise *konveks pertürbasyon metodu* kullanılacaktır. Aşağıdaki teorem bu bölümün ana katkısını oluşturmaktadır.

Teorem 3.5.1. *Verilen (H1), (H2) ve (H3) hipotezleri sağlansın. Ayrıca, iki* $\mathcal{F}_t-$ *adapte proses üçlüsü* $(\Psi^*(\cdot), K^*(\cdot), \gamma^*(\cdot,\cdot))$ *ve* $(Q^*(\cdot), R^*(\cdot), \psi^*(\cdot,\cdot))$ *sırasıyla* (3.4.1) ve (3.4.2) *ek denklemlerini sağlasın. Tüm* $(u, \eta) \in \mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ *için*

$$
\begin{cases}
H(t, X^*(t), E(X^*(t)), u, \Psi^*(t), K^*(t), \gamma^*(t, z)) \\
-H(t, X^*(t), E(X^*(t)), u^*(t), \Psi^*(t), K^*(t), \gamma^*(t, z)) \\
+\frac{1}{2}[\sigma\left(t, X^*(t), E(X^*(t)), u\right)-\sigma\left(t, X^*(t), E(X^*(t)), u^*(t)\right)]^2 Q^*(t) \\
+\frac{1}{2} \int_{\Theta}(g\left(t, X^*(t), u, z\right)-g\left(t, X^*(t), u^*(t), z\right))^2 \times\left(Q^*(t)+\psi^*(t, z)\right) m(dz) \\
\leq 0, \quad \mathbb{P}-a.s., \ a.e., \quad t \in[0, T]
\end{cases}
$$

ve

$$
E \int_{[0, T]}(\mathcal{M}(t)+G(t) \Psi^*(t)) d\eta^*(t) \leq E \int_{[0, T]}(\mathcal{M}(t)+G(t) \Psi^*(t)) d\eta(t), \tag{3.5.1}
$$

eşitsizlikleri vardır.

İspat. Ele alınan (3.1.1)-(3.1.2) orta-alan kontrol probleminde, kontrolün tanım kümesinin konveks olması gerekmediği için, maksimum prensibi genel formuyla ifade edilmelidir. Kontrol probleminin optimal çözümü $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot), X^*(\cdot))$ olsun. Daha açık olarak, $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ çifti optimal kontrol ve $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ ikilisi $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$ kümesinde değerli $\mathcal{F}_t-$ölçümlü rastgele değişkenin keyfi bir elemanı olmak üzere, kabul edilebilir (admissible) kontrol aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(u^\varepsilon(t), \eta^\varepsilon(t)) = \begin{cases} (u, \eta^*(t) + \varepsilon(\eta(t) - \eta^*(t))) : s \leq t \leq s + \varepsilon, \\ (u^*(t), \eta^*(t) + \varepsilon(\eta(t) - \eta^*(t))) : \text{diğer durumda}, \end{cases} \tag{3.5.2}$$

Burada, ε yeteri kadar küçük pozitif bir reel sayı ve $s \in [0, T]$ dir. Böylece, aşağıdaki eşitsizlik dikkate alındığında (3.5.1) ve (3.5.1) nin farklı varyasyonel denklemleri elde edilir.

$$J_0(X_0, u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)) \leq J_0(X_0, u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)). \tag{3.5.3}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned} J_1 &= J_0(X_0, u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)) - J_0(X_0, u^\varepsilon(\cdot), \eta^*(\cdot)), \\ J_2 &= J_0(X_0, u^\varepsilon(\cdot), \eta^*(\cdot)) - J_0(X_0, u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)), \end{aligned}$$

olmak üzere, orta-alan tipindeki kontrol probleminin yeni varyasyonel denklemleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

Birinci mertebeden varyasyonel denklem:

$x_1^\varepsilon(t) \equiv x_1^{u^\varepsilon, \eta^\varepsilon}(t)$ ve $\mathcal{D}_\varepsilon = [s, s+\varepsilon]$

$$\begin{cases} dx_1^\varepsilon(t) = \{f_x(t)x_1^\varepsilon(t) + f_y(t)E(x_1^\varepsilon(t)) + \delta f(t) I_{\mathcal{D}_\varepsilon}(t)\} dt \\ \qquad + \{\sigma_x(t)x_1^\varepsilon(t) + \sigma_y(t)E(x_1^\varepsilon(t)) + \delta\sigma(t) I_{\mathcal{D}_\varepsilon}(t)\} dB(t) \\ \qquad + \int_\Theta \{g_x(t_-, z)x_1^\varepsilon(t) + \delta g(t_-, z) I_{\mathcal{D}_\varepsilon}(t)\} N(dz, dt) \\ \qquad + G(t)d(\eta^\varepsilon - \eta^*)(t), \\ x_1^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5.4}$$

İkinci mertebeden varyasyonel denklem:

$$\begin{cases} dx_2^\varepsilon(t) = \{f_x(t)x_2^\varepsilon(t) + f_y(t)E\left(x_2^\varepsilon(t)\right) + \mathbb{W}_t(f, x_1^\varepsilon) + \delta f_x(t)I_{\mathcal{D}_\varepsilon}(t)\}dt \\ \qquad + \{\sigma_x(t)x_2^\varepsilon(t) + \sigma_y(t)E\left(x_2^\varepsilon(t)\right) + \mathbb{W}_t(\sigma, x_1^\varepsilon) + \delta\sigma_x(t)I_{\mathcal{D}_\varepsilon}(t)\}dB(t) \\ \qquad + \int_\Theta\{g_x\left(t_-, z\right)x_2^\varepsilon(t) + \mathbb{W}_{t,e}(g, x_1^\varepsilon) + \delta g_x(t_-, z)I_{\mathcal{D}_\varepsilon}(t)\}N\left(dz, dt\right), \\ x_2^\varepsilon(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

Burada, $J_2 = J_0\left(X_0, u^\varepsilon(\cdot), \eta^*(\cdot)\right) - J_0\left(X_0, u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)\right)$ singüler bileşenden bağımsız olduğu için teorem (3.5.1) in ispatı (Hafayed and Abbas, 2013)-Theorem 3.1 dekine benzer olarak yapılır. □

Teoremin ikinci varyasyonel eşitsizliğini (3.5.1) ispatlayabilmek için aşağıdaki lemmalar kullanılacaktır:

Lemma 3.5.1 *Orta-alan* (3.5.4) *denkleminin* $(u^\varepsilon(\cdot), \eta^*(\cdot))$ *ikilisine karşılık gelen çözümü* $x_1^{u^\varepsilon,\eta^*}(\cdot)$ *olsun. Buna göre;*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\frac{X^{u^\varepsilon,\eta^*}(t) - X^*(t)}{\varepsilon} - x_1^{u^\varepsilon,\eta^*}(t)\right|^2\right] = 0$$

yaklaşımı sağlanır.

İspat. $t \in [0, T]$ olsun,

$$\beta^\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[X^{u^\varepsilon,\eta^*}(t) - X^*(t)\right] - x_1^{u^\varepsilon,\eta^*}(t), \text{ olmak üzere;} \tag{3.5.6}$$

Taylor formülü kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&\frac{X^{u^{\varepsilon},\eta^*}(t) - X^*(t)}{\varepsilon} \\
&= \int_0^t \int_0^1 f_x(r, X^*(r) + \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r)), E(X^*(r) \\
&+ \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))), u^{\varepsilon}(r))(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))d\lambda dr \\
&+ \int_0^t \int_0^1 f_y(r, X^*(r) + \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r)), E(X^*(r) \\
&+ \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))), u^{\varepsilon}(r))E(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))d\lambda dr \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \sigma_x(r, X^*(r) + \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r)), E(X^*(r) \\
&+ \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))), u^{\varepsilon}(r))(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))d\lambda dr \\
&+ \int_0^t \int_0^1 \sigma_y(r, X^*(r) + \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r)), E(X^*(r) \\
&+ \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))), u^{\varepsilon}(r))E(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))d\lambda dr \\
&+ \int_0^t \int_{\Theta} \int_0^1 g_x(r, X^*(r) + \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r)), E(X^*(r) \\
&+ \lambda\varepsilon(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))), u^{\varepsilon}(r), z)(\beta^{\varepsilon}(r) + x_1^{u^{\varepsilon},\eta^*}(r))d\lambda m(dz)dr,
\end{aligned}
$$

elde edilir. Üstteki denklem ve (3.5.6) göz önünde tutulduğunda, $\beta^{\varepsilon}(t)$ singüler bileşenden bağımsız oluğundan, (Li, 2012)' de geliştirilen metot kullanılarak ispatın geri kalan kısmı tamamlanır. □

Lemma 3.5.2 *Orta-alan* (3.5.4) *denkleminin* $(u^{\varepsilon}(\cdot), \eta^*(\cdot))$ *ikilisine karşılık gelen çözümü* $x_1^*(t)$ *olsun. Buna göre;*

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad E[h_x(X^*(T), E(X^*(T)))x_1^*(t) + h_y(X^*(T), E(X^*(T)))E(x_1^*(t))] \\
&+ \quad E\int_0^T [\ell_x(t, X^*(T), E(X^*(T)), u^*(t))x_1^*(t) \\
&+ \quad \ell_y(t, X^*(t), E(X^*(t)), u^*(t))E(x_1^*(t))]dt + E\int_{[0,T]} \mathcal{M}(t)d\left(\eta - \eta^*\right)(t)
\end{aligned}
$$

eşitsizliği vardır.

İspat. $J_1 = J_0\left(X_0, u^{\varepsilon}(\cdot), \eta^{\varepsilon}(\cdot)\right) - J_0\left(X_0, u^{\varepsilon}(\cdot), \eta^*(\cdot)\right)$ olsun.

Basit hesaplamalarla, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
\frac{J_1}{\varepsilon} &= \frac{1}{\varepsilon}[J(X_0, u^\varepsilon(\cdot), \eta^\varepsilon(\cdot)) - J(X_0, u^\varepsilon(\cdot), \eta^*(\cdot))] \\
&= \frac{1}{\varepsilon}E[[h(X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(T), E(X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(T))) \\
&- h(X^{u^\varepsilon,\eta^*}(T), E(X^{u^\varepsilon,\eta^*}(T)))] \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}E\int_0^T [\ell(t, X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(t), E(X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(t)), u^\varepsilon(t)) \\
&- \ell(t, X^{u^\varepsilon,\eta^*}(t), E(X^{u^\varepsilon,\eta^*}(t)), u^\varepsilon(t))]dt \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}E\int_{[0,T]} \mathcal{M}(t)d(\eta^\varepsilon - \eta^*)(t).
\end{aligned}
$$

Tylor formülü kullanılır ve $\dfrac{\eta^\varepsilon(t) - \eta^*(t)}{\varepsilon} = (\eta(t) - \eta^*(t))$ olduğu dikkate alınırsa, Herhangi $\eta(\cdot) \in \mathcal{A}_2([0,T])$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{J_1}{\varepsilon} &= E\int_0^1 h_x(X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(T) + \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(T) + x_1^\varepsilon(T)), E[X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(T) \\
&+ \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(T) + x_1^\varepsilon(T))]) \left(\gamma^\varepsilon(T) + x_1^\varepsilon(T)\right) d\lambda \\
&+ E\int_0^1 h_y(X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(T) + \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(T) + x_1^\varepsilon(T)), E[X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(T) \\
&+ \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(T) + x_1^\varepsilon(T))])E\left(\gamma^\varepsilon(T) + x_1^\varepsilon(T)\right) d\lambda \\
&+ E\int_0^T\int_0^1 \ell_x(t, X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(t) + \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(t) + x_1^\varepsilon(t)), E[X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(t) \\
&+ \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(t) + x_1^\varepsilon(t))]) \left(\gamma^\varepsilon(t) + x_1^\varepsilon(t)\right) d\lambda dt \\
&+ E\int_0^T\int_0^1 \ell_y(t, X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(t) + \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(t) + x_1^\varepsilon(t)), E[X^{u^\varepsilon,\eta^\varepsilon}(t) \\
&+ \lambda\varepsilon(\gamma^\varepsilon(t) + x_1^\varepsilon(t))])E(\gamma^\varepsilon(t) + x_1^\varepsilon(t)) \\
&+ E\int_{[0,T]} \mathcal{M}(t)d(\eta - \eta^*)(t)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

Sonuç olarak, h_x, h_y, ℓ_x ve ℓ_y türevleri sınırlı olduğundan ayrıca, *Lemma 3.5.1* göz önünde tutularak ε sıfıra gittiğinde *Lemma 3.5.2* ispatlanmış olur. □

İspat. Üstte yer alan lemmalar ışığında, *Teorem 3.5.1* de ifade edilen (3.5.1) in ispatı için *Lemma 3.5.2* den elde edilen sonuç ve (Hafayed and Abbas, 2014) te geliştirilen argümanlara benzer uygulamalar kullanılarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J_1}{\varepsilon} = E \int_{[0,T]} \left(\mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t) \right) d\left(\eta - \eta^*\right)(t) \geq 0.$$

Böylelikle ispat tamamlanmış olur. □

3.6 Uygulama: Markowitz Ortalama-Varyans Problemi

Bu alt bölümde, Markowitz' in ortalama-varyans portfolyö seçim problemine, elde edilen genel maksimum prensibi uygulanacak ve optimal portfolyö seçim stratejisi geri bildirim formunda açık ifadesiyle gösterilecektir. Değerleri stokastik prosesler olan bono ve hisse senetlerinden oluşmuş sanal bir menkul kıymetler marketi olduğu farzedilsin. Bu stokastik prosesler, $\mathbb{S}_i : i = 0, 1$ olmak üzere $t \in [0, T]$ için aşağıdaki denklemlerle ifade edilir:

$$\begin{cases} d\mathbb{S}_0(t) = \mathbb{S}_0(t)\,\mu_0(t)dt, \quad \mathbb{S}_0(0) > 0, \\ d\mathbb{S}_1(t) = \mathbb{S}_1(t)\,\mu_1(t)dt + \sigma_t \mathbb{S}_1(t)\,dB(t) \\ +\mathbb{S}_1(t) \int_\Theta A_t(z)\,N(dz, dt), \quad \mathbb{S}_1(0) > 0. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

Burada; $\mu_1(t)$, hisse senedinin değer artışı prosesi, $\mu_0(t)$ faiz oranı prosesi, σ_t ve $A_t(z)$ sınırlı deterministik fonksiyonlar ve $\mu_1(t) \neq 0$, $\sigma_t \neq 0$, $\mu_1(t) > \mu_0(t)$ dır. $\mathbb{S}_1(t) > 0$ koşulunu sağlamak için herhangi $z \in \Theta$ ve t yerel sınırlı fonksiyonu $t \to \int_\Theta A_t^2(z)\,m(dz)$ olmak üzere, $A_t(z) > -1$ olduğu farzedilsin. Ayrıca, $u(t)$ hisse senedine yatırılan miktardır. Bu tanımlamalar altında, varlık dinamikleri aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{cases} dX^{u,\eta}(t) = \left[\mu_0(t)X^{u,\eta}(t) + (\mu_1(t) - \mu_0(t))u(t)\right]dt \\ \qquad + \sigma_t u(t)dB(t) + \int_\Theta A_{t_-}(z)\,u(t)N(dz, dt) + G(t)d\eta(t), \\ X^{u,\eta}(0) = X_0. \end{cases} \tag{3.6.2}$$

Üstteki (3.6.2) denklemiyle verilen $X^{u,\eta}(\cdot)$ varlık prosesi karesi integrallenebilir ise $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ kontrol değişkeni "tame" olarak adlandırılır. Burada, $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2$' de değerli $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2\left([0,T]\right)$ kümesi kabul edilebilir (admissible) portfolyö kümesidir. Sistem (3.6.2)' in kontrol edildiği cost (maliyet) fonksiyoneli aşağıdaki gibidir:

$$J_0(X_0, u(\cdot), \eta(\cdot)) = E\left[(X^{u,\eta}(T) - E(X^{u,\eta}(T)))^2\right] + \int_{[0,T]} \mathcal{M}(t)d\eta(t). \quad (3.6.3)$$

Burada, $\mathcal{M}(\cdot)$ fonksiyonu singüler kontrol $\eta(\cdot)$' nın maliyet oranı olarak yorumlanabilir. Kabul edilebilir portfolyö $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ ikilisi maliyet fonksiyonelini (3.6.3) minimize edecek kontrol değişkenidir.

Hamilton H fonksiyoneli aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} H(t, X, E(X), u(t), \Psi(t), K(t), \gamma_t(e)) &= -\Psi(t)\mu_0(t)X(t) \\ -u(t)[\Psi(t)(\mu_1(t) - \mu_0(t)) + K(t)\sigma_t &+ \int_\Theta \gamma_t(z)A_t(z)m(dz)]. \end{aligned}$$

Bu denklem $u(\cdot)$' ya göre lineer olduğu için supremum $u^*(t)$ de aşağıdaki eşitlikle elde edilir:

$$\Psi^*(t)(\mu_1(t) + \mu_0(t)) + K^*(t)\sigma_t + \int_\Theta \gamma_t^*\left(z\right)A_t\left(z\right)m(dz) = 0. \quad (3.6.4)$$

Birinci mertebeden ek denklem (3.4.1), $u^*(t)$ göz önüne alındığında;

$$\begin{cases} d\Psi^*(t) = -\mu_0(t)\Psi^*(t)dt + K^*(t)dB(t) + \int_\Theta \gamma_t^*(z)N(dt, dz) \\ \Psi^*(T) = 2\left(X^*(T) - E(X^*(T)\right), \end{cases} \quad (3.6.5)$$

ve ikinci mertebeden ek denklem (3.4.2), benzer biçimde;

$$\begin{cases} dQ^*(t) = -2\mu_0(t)Q^*(t)dt + R^*(t)dB(t) + \int_\Theta \psi_t^*(z)N(dz, dt) \\ Q^*(T) = 2, \end{cases} \quad (3.6.6)$$

eşitliklerine dönüşür.

Üstteki klasik geri-SDE (3.6.6)' in tek çözümü:

$$
\begin{aligned}
Q^*(t) &= 2\exp[2\int_t^T \mu_0(r)dr], \\
R^*(t) &= 0, \ \forall\, t \in [0,T], \\
\psi_t^*(z) &= 0, \ \forall\, z \in \Theta.
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki (3.6.5) denkleminin çözülebilmesi ve optimal portfolyö stratejisinin $(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$ bulunabilmesi için $\Psi^*(\cdot)$ aşağıdaki formda yazılabilir:

$$
\Psi^*(t) = \varphi_1(t)X^*(t) + \varphi_2(t)E\left(X^*(t)\right) + \varphi_3(t). \tag{3.6.7}
$$

Burada, $\varphi_1(\cdot), \varphi_2(\cdot)$ ve $\varphi_3(\cdot)$ deterministik fonksiyonlardır. SDE-(3.6.2) göz önünde tutularak, Itô formulü (3.6.7)' e uygulanırsa aşağıdaki denklemlere ulaşılır:

$$
\begin{gathered}
-\mu_0(t)\Psi^*(t) = X^*(t)\varphi_1(t) + \varphi_1(t)\left[\mu_0(t)X^*(t) + (\mu_1(t) - \mu_0(t))u^*(t)\right] \\
+\varphi_2(t)\left[\mu_0(t)E(X^*(t)) + (\mu_1(t) - \mu_0(t))u^*(t)\right] + \varphi_2(t)E\left(X^*(t)\right) + \varphi_3(t),
\end{gathered} \tag{3.6.8}
$$

$$
\begin{aligned}
K^*(t) &= \varphi_1(t)\sigma_t u^*(t), \\
\gamma_t^*(z) &= \varphi_1(t)u^*(t)A_t(z),
\end{aligned} \tag{3.6.9}
$$

ve

$$
\varphi_1(T) = 2, \quad \varphi_2(T) = -2, \quad \varphi_3(T) = 0. \tag{3.6.10}
$$

(3.6.9) ve (3.6.10) denklemleri (3.6.4) ile birleştirilirse, aşağıdaki kontrol bileşeni bulunur:

$$
u^*(t) = \frac{-(\mu_1(t) - \mu_0(t))\Psi^*(t)}{\varphi_1(t)\left[\sigma_t^2 + \int_\Theta A_t^2(z)\, m(dz)\right]}. \tag{3.6.11}
$$

Maliyet oranı $M(t)$;

$$
M(t) = \int_\Theta A_t^2(z)\, m(dz) + \sigma_t^2, \tag{3.6.12}
$$

olarak ifade edilebilir. Daha sonra, (3.6.4) eşitliği (3.6.11) ve (3.6.12) ile birlikte kullanılarak aşağıdaki ifadelere ulaşılır:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_3(t) = 0, \quad t \in [0, T], \\
&u^*(t) = (\mu_0(t) - \mu_1(t)) \left(M(t)\varphi_1(t)\right)^{-1} \times (\varphi_1(t) X^*(t) + \varphi_2(t) E\left(X^*(t)\right)) \\
&\qquad = \left\{(\mu_0(t) - \mu_1(t)) \left(M(t)\right)^{-1}\right\} X^*(t) \\
&\qquad + \left\{(\mu_0(t) - \mu_1(t)) \left(M(t)\right)^{-1} \varphi_2(t) \left(\varphi_1(t)\right)^{-1}\right\} E\left(X^*(t)\right).
\end{aligned}
\tag{3.6.13}
$$

Üstteki (3.6.8) ile (3.6.7) denklemlerinin birleştirilmesiyle,

$$
\begin{aligned}
&u^*(t) \left(\varphi_1(t) + \varphi_2(t)\right) \left(\mu_0(t) - \mu_1(t)\right) = \left[2\mu_0(t)\varphi_1(t) + \varphi_1(t)\right] X^*(t) \\
&+ \left[2\mu_0(t)\varphi_2(t) + \varphi_2(t)\right] E(X^*(t)).
\end{aligned}
\tag{3.6.14}
$$

eşitliği elde edilir.

Böylece, (3.6.13) ve (3.6.14) denlemleri arasında $X^*(t)$ ve $E\left(X^*(t)\right)$ içeren terimlerin karşılaştırılmasıyla, aşağıdaki iki adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&\left[(\mu_0(t) - \mu_1(t))^2 \left(M(t)\right)^{-1} - 2\mu_0(t)\right] \varphi_1(t) (\mu_0(t) - \mu_1(t))^2 \left(M(t)\right)^{-1} \varphi_2(t) = \dot{\varphi}_1(t), \\
&\left[(\mu_0(t) - \mu_1(t))^2 \left(M(t)\right)^{-1} - 2\mu_0(t)\right] \varphi_2(t) (\mu_0(t) - \mu_1(t))^2 \left(M(t)\right)^{-1} \frac{\varphi_2^2(t)}{\varphi_1(t)} = \dot{\varphi}_2(t).
\end{aligned}
\tag{3.6.15}
$$

$\varphi_1(t)$ ve $\varphi_2(t)$ fonksiyonlarının açık çözümlerinin elde edilmesi için; $\varphi_1(T) = 2, \quad \varphi_2(T) = -2$ verileri altında (3.6.10), (3.6.15) deki ilk denklem $\varphi_1(t)$ ile, ikinci denklem $\varphi_2(t)$ ile bölünürse:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = 2 \exp\left[\int_t^T \mu_0(s) ds\right], \quad \varphi_1(T) = 2, \\
&\varphi_2(t) = -2 \exp\left[\int_t^T \mu_0(s) ds\right], \quad \varphi_2(T) = -2,
\end{aligned}
\tag{3.6.16}
$$

katsayı fonksiyonları bulunur. Bu fonksiyonlar yoluyla $u^*(t)$ aşağıdaki forma indirgenir:

$$
u^*(t) = \left[(\mu_0(t) - \mu_1(t)) \left(M(t)\right)^{-1}\right] X^*(t) - \left[(\mu_0(t) - \mu_1(t)) \left(M(t)\right)^{-1}\right] E\left(X^*(t)\right).
\tag{3.6.17}
$$

Birinci mertebeden ek prosesler;

$$\Psi^*(t) = \varphi_1(t)X^*(t) + \varphi_2(t)E\left(X^*(t)\right),$$

$$K^*(t) = \sigma_t\varphi_1(t)u^*(t),$$

$$\gamma_t^*(z) = \varphi_1(t)u^*(t)A_t\left(z\right),$$

ve ikinci mertebeden ek prosesler;

$$Q^*(t) = 2\exp[2\int_t^T \mu_0(r)dr],$$

$$R^*(t) = 0,$$

$$\psi_t^*(z) = 0,$$

olmak üzere, bu prosesler ek denklem (3.4.1)' i sağlarlar.

$\eta(\cdot) \in \mathcal{A}_2\left([0,T]\right)$ olsun, bu durumda aşağıdaki koşullu durumlar yazılabilir:

$$d\eta(t) = \begin{cases} 0,\ \text{eğer}\ \ t \in \{(w,t) \in \Omega \times [0,T]\}: \quad \mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t) \geq 0, \\ d\eta^*(t),\ \text{eğer}\ \ t \in \{(w,t) \in \Omega \times [0,T]\}: \quad \mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t) < 0. \end{cases} \tag{3.6.18}$$

Basit hesaplamalarla, aşağıdaki ilişkiler kolaylıkla görülebilir:

$$0 \leq E\int_{[0,T]}(\mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t))d\left(\eta - \eta^*\right)(t)$$

$$\begin{aligned} &= E\int_{[0,T]}(\mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t))d\eta(t) - E\int_{[0,T]}(\mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t))d\eta^*(t) \\ &= E\int_{[0,T]}(\mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t)) \times I_{\{(w,t)\in\Omega\times[0,T]:\mathcal{M}(t)+G(t)\Psi^*(t)\geq 0\}}d\left(-\eta^*\right)(t) \\ &= -E\int_{[0,T]}(\mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t)) \times I_{\{(w,t)\in\Omega\times[0,T]:\mathcal{M}(t)+G(t)\Psi^*(t)\geq 0\}}d\eta^*(t), \end{aligned}$$

Bu şu anlama gelir; $\eta^*(t)$ herhangi $t \in [0,T]$ için aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$E\int_{[0,T]}(\mathcal{M}(t) + G(t)\Psi^*(t)) \times I_{\{(w,t)\in\Omega\times[0,T]:\mathcal{M}(t)+G(t)\Psi^*(t)\geq 0\}}d\eta^*(t) = 0. \tag{3.6.19}$$

Sonuç olarak, (3.6.18) ve (3.6.19) birlikte değerlendirilirse, singüler kontrol bileşeni aşağıdaki formda olur:

$$\begin{aligned}\eta^*(t) &= \int_0^t I_{\{(w,s)\in\Omega\times[0,T]:\mathcal{M}(s)+G(s)\Psi^*(s)\geq 0\}^c}(w,s)ds+\eta(t),\\ &= \int_0^t I_{\{(w,s)\in\Omega\times[0,T]:\mathcal{M}(s)+G(s)\Psi^*(s)<0\}}(w,s)ds+\eta(t).\end{aligned} \tag{3.6.20}$$

3.7 Sonuçlar

Bu bölümde, orta-alan sıçrama difüzyonları için optimal sürekli-singüler kontrolün genel gereklilik koşulları elde edildi. Bileşik kontrol probleminin çözümünde karma konveks-spike perturbasyon metodu kullanıldı ve ulaşılan teorik sonuçlar Markowitz' in ortalama-varyans portfolyö seçim problemine uygulandı.

Ele alınan (3.1.1)-(3.1.2) probleminde $G(\cdot) \equiv \mathcal{M}(\cdot) \equiv 0$ kabul edilirse; (bağımsız singüler kontrol içermeyen durum), Teorem 3.1 (Hafayed and Abbas, 2013)' te ifade edilen maksimum prensibine dönüşür . Eğer $g \equiv 0$ kabul edilirse, (Poisson sıçramaları içermeyen durum) bu durumda Teorem 3.1 (Hafayed and Abbas 2014)' te ifade edilen Teorem 6.1 'e indirgenir.

Üzerinde çalışılan kontrol problemi, orta-alan sıçrama sistemleri için sürekli-singüler optimal kontrol problemi olarak; katsayıları $G(\cdot)$ ve $\mathcal{M}(\cdot)$ olan singüler parçalar için durum ve sürekli kontrol proseslerini içeren $\int_{[0,t]} G(t, X^{u,\eta}(t), u(t))d\eta(t)$ ve $\int_{[0,t]} \mathcal{M}(t, X^{u,\eta}(t), u(t)))d\eta(t)$ terimlerine sahip, yeni bir kontrol problemi altında incelenebilir.

4. ORTOGONAL TEUGELS MARTİNGALLERE DAYALI ORTA-ALAN LÉVY-İLERİ-GERİ SİSTEMİN STOKASTİK SİNGÜLER KONTROLÜ İÇİN VARYASYONEL PRENSİBİ VE UYGULAMASI

Kısmi enformasyon veya tamamlanmamış enformasyon, kontrolör için mevcut bilginin muhtemelen tüm enformasyondan daha az olduğu anlamına gelir. Yani herhangi kabul edilebilir kontrol $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$' nin bir alt filtrasyonu olan $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$' ye adaptedir. Potansiyel uygulamaları olan bu tür problemler, matematiksel finans ve matematik ekonomisinde doğal olarak ortaya çıkar. Çünkü gerçek yaşam uygulamalarında tam enformasyona sahip kabul edilebilir kontrol bulmak oldukça zordur.

Bu bölümde, orta-alan ileri-geri stokastik diferansiyel denklemler (MF-FBSDEs) için maksimum prensip formundaki optimalliğin gereklilik ve yeterlilik koşulları kısmi enformasyon altında, konveks varyasyon metodu ve dualite tekniği kullanılarak belirlenecektir. Ulaşılan teorik sonuçlar, bir Lévy prosesi olan Gama prosesine bağlı ve Teugels martingalleri ile ifade edilen ortalama-varyans portfolyö seçim problemine uygulanacaktır.

4.1 MF-FBSDEs Kontrol Probleminin Formülasyonu

Bu çalışmada ele alınan, Teugels martingaller tarafından yönlendirilen tüm mertebelerin momentlerini içeren bazı Lévy prosesleri ile bağlantılı orta-alan ileri-geri stokastik diferansiyel denklemleri (FBSDEs) için orta-alan tipi kısmi enformasyon stokastik singüler optimal kontrol problemi bağımsız Brown hareketi ile birlikte aşağıdaki formda ifade edilir:

$$\begin{cases} dx^{u,\xi}(t) = b(t, x^{u,\xi}(t), E(x^{u,\xi}(t)), u(t))dt \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{d} \sigma^j(t, x^{u,\xi}(t), E(x^{u,\xi}(t)))dW^j(t) \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{\infty} g^j(t, x^{u,\xi}(t_-), E(x^{u,\xi}(t_-)), u(t))dH^j(t) + \mathcal{C}(t)d\xi(t) \\ \\ dy^{x,\xi}(t) = -f(t, x^{u,\xi}(t), E(x^{u,\xi}(t)), y^{u,\xi}(t), E(y^{u,\xi}(t)), z^{u,\xi}(t), E(z^{u,\xi}(t)) \\ \qquad\qquad , q^{u,\xi}(t), E(q^{u,\xi}(t)), u(t))dt + \sum_{j=1}^{d} z^{u,\xi,j}(t)dW^j(t) \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{\infty} q^{u,\xi,j}(t_-)dH^j(t) - \mathcal{D}(t)d\xi(t) \\ \\ x^{u,\xi}(0) = x_0,\ y^{u,\xi}(T) = h(x^{u,\xi}(T), E(x^{u,\xi}(T))). \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Burada, $W(\cdot)$ standart d-boyutlu Brown hareketi, $H(t) = (H^j(t))_{j\geq 1}$ tüm mertebelerin momentlerini içeren bazı Lévy prosesleri ile bağlantılı ortonormal Teugels martingalleri ve $b, f, \sigma, g, \mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer dönüşümdür. Teugels martingaller, karesi integrallenebilir martingallerin Hilbert uzayını üreten, tüm mertebelerin momentlerini içeren Lévy proseslerinin natürel filtrasyonuna sahip martingallerdir.

Lévy proseslerine bağlı orta-alan FBSDEs' ler (4.1.1) ile finansal optimizasyon problemlerinin olasılık analizinde karşılaşılmaktadır. Ayrıca, üstte ifade olunan matematiksel orta-alan yaklaşımları ekonominin, finansın, fiziğin, kimyanın ve oyun teorisinin farklı alanlarında önemli bir role sahiptir.

Beklenen maliyet fonksiyoneli (expected cost) $[0, T]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
& J\left(u(\cdot),\xi(\cdot)\right) \\
& = E\left\{\int_0^T \ell(t,x^{u,\xi}(t),E(x^{u,\xi}(t)),y^{u,\xi}(t),E(y^{u,\xi}(t)),z^{u,\xi}(t)\right. \\
& , E(z^{u,\xi}(t)),q^{u,\xi}(t),E(q^{u,\xi}(t)),u(t))dt \\
& \left.+\phi(x^{u,\xi}(T),E(x^{u,\xi}(T)))+\varphi(y^{u,\xi}(0),E(y^{u,\xi}(0)))+\int_{[0,T]} M(t)d\xi(t)\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

Burada, ℓ, Φ, φ ve M uygun stokastik fonksiyonlardır. Belirtilen fonksiyonel orta-alan tipinde, yani ℓ, Φ ve φ fonksiyonları; durum prosesleri ve beklenen değerleri ile birlikte marjinal kaide gözetilerek ele alınmıştır.

Kabul edilebilir kontrol $u^*(\cdot)$ optimal ise aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$
J\left(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot)\right) \triangleq \inf_{(u(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2([0,T])} J\left(u(\cdot),\xi(\cdot)\right). \tag{4.1.3}
$$

Orta-alan sistemi (4.1.1)' in çözümüne karşılık gelen durum prosesleri dörtlüsü;

$$
(x^*(\cdot),y^*(\cdot),z^*(\cdot),q^*(\cdot)) = (x^{u^*,\xi^*}(\cdot),y^{u^*,\xi^*}(\cdot),z^{u^*,\xi^*}(\cdot),q^{u^*,\xi^*}(\cdot))
$$

olarak ifade edilir.

4.2 Kavramlar, Tanımlar ve Hipotezler

- $W(\cdot) \triangleq (W(t))_{t\in[0,T]}$: $d-$ boyutlu Brown Hareketi,
- $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]},P)$: $d-$ boyutlu Brown hareketi üzerinde $P-$ tamlı sağ sürekli filtrasyonla donatılmış sabit filtreli olasılık uzayı,
- $L(\cdot) \triangleq (L(t))_{t\in[0,T]}$: Reel değerli Lévy prosesi
- $L(t) = bt + \lambda(t)$, Brown hareketinden bağımsız Lévy prosesi, $\lambda(t)$: sıçrama prosesi,
- $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$: $(\mathcal{F}_t^{(W,L)})_{t\in[0,T]}$ natürel filtrasyonunun $P-$artımı,
- $\mathcal{F}_t^W \triangleq \sigma\{W(s) : 0\le s\le t\}$,

- $\mathcal{F}_t^{(W,L)} \triangleq \mathcal{F}_t^W \vee \sigma\{L(s) : 0 \le s \le t\} \vee \mathcal{F}_0,\ \ \mathcal{F}_0 : P-$null kümelerinin tümü,
- $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 : \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ ile üretilen σ-cebri,
- $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0} : (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ filtrasyonunun alt filtrasyonu,
- $\mathbb{A}_1 : I\!R^{k}$' nın boştan farklı konveks bir alt kümesi, $\mathbb{A}_2 \triangleq ([0,\infty[)^m$.

4.2.1 Martingaller

Bir stokastik proses $X = (X_t, t \geq 0)$ olmak üzere, örnek uzay Ω ve mevcut s zamanındaki F_s bilgisi verilsin. Acaba, mevcut s zamanındaki F_s bilgisi, X prosesinin gelecekteki davranışı hakkındaki bilgilerimizi nasıl etkiler?

Eğer F_s ve X bağımlıysa, bu bilgilerin gelecekteki bir t zamanında X değerleri hakkındaki belirsizliği azaltmasını bekleyebiliriz. Böylece; X, F_s bilgisiyle kendisi olmadan daha iyi tahmin edilebilir. Bu bilgi kazanımını tanımlamak için kullanılan matematiksel bir araç; F_s verildiğinde X in koşullu beklenen değeridir:

$$E(X_t|F_s) \quad 0 \le s \le t.$$

Bu ifade F_s bilgisi verildiğinde X_t nin en iyi tahmini anlamına gelir. Bir stokastik proses $M = (M_t, t \geq 0)$ verilen $(F_t)_{t\geq 0}$ filtrasyonuna göre sürekli-zaman martingali olarak adlandırılır ve $(M, (F_t)_{t\geq 0})$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $E|M_t| < \infty, \quad t \geq 0.$
2. M prosesi $(F_t)_{t\geq 0}$ ye adapte (adapted) dir.
3. $E(M_t|F_s) = M_s, \quad 0 \le s \le t.$

Bir stokastik proses $M = (M_n, n = 0, 1, ...)$ verilen $(F_n, n = 0, 1, ...)$ filtrasyonuna göre ayrık-zaman martingali olarak adlandırılır ve $(M, (F_n))$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $E|M_n| < \infty, \quad n = 0, 1, 2, ...$

2. M prosesi (F_n) e adapte (adapted) dir.

3. $E(M_{n+1}|F_n) = M_n, \quad n = 0, 1, 2, ...$

Bir şans oyununda, $X_t - X_s$ yi $(s, t]$ zaman aralığında birim hisse başına düşen net kazançlar olarak düşünelim: O zaman,

$$E(X_t - X_s|F_s) = E(X_t|F_t) - E(X_s|F_s)$$

eşitliği yazılabilir. Burada, eğer $(X_t, (F_t))$ bir martingale ise $E(X_t|F_t) = X_s$ olur ve eşitliğin sağ tarafı sıfırlanır. Bu şu anlama gelir: Birim hisse başına düşen gelecekteki net kazançların $(s, t]$ aralığı içindeki en iyi tahmini sıfırdır.

- (**Teugels Martingal**)
  X bir Lévy proses olmak üzere; $\displaystyle\int_{|x|\geq 1} |x|^i \mu(dx) < \infty, \forall i \geq 2.$
  Her bir $i \geq 2, \;\; t \geq 0$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} X^i(t) &= \sum_{0\leq s\leq t} [\Delta X(s)]^i, \\ Y^i(t) &= X^i(t) - E(X^i(t)). \end{aligned}$$

  Burada, her bir $(Y^i(t), t \geq 0)$ bir martingaldir. Bu tür martingallere Teugels martingal denir.

4.2.2 Lévy Prosesi

Bir reel değerli, cádlág, adapte (adapted) stokastik proses $X = \{X_t\}_{0\leq t\leq T}$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa Lévy proses ya da Lévy sıçrama-difüzyon prosesi (Lévy jump-diffusion process) olarak adlandırılır:

- $X(0) = 0 \ (a.s.)$

- (Bağımsız Artışlar-Independent Increments)

  Her bir $n \in N$ ve $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_{n+1} < \infty$ için $(X(t_{i+1}) - X(t_i))$, $1 \leq i \leq n$ bağımsızdır.

- (Durağan Artımlar-Stationary Increments)

  $X_{t+s} - X_t = X_s, \ \ 0 \leq s < t \leq T.$

  $(X_{t+s} - X_t)$ nin dağılımı (distribution) t ye bağlı değildir.

- X stokastik olarak (olasılık anlamında) süreklidir.

  $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall s \geq 0$ için $\lim_{t \to s} P(|X_t - X_s| > \varepsilon) = 0.$

- Lévy prosesi ile bağlantılı sıçrama prosesi $\Delta L = (\Delta L(t))_{0 \leq t \leq T}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

  $\Delta L(t) = L(t) - L(t-), \ \ L(t-) = \lim_{s \uparrow t} L(s).$

  $\sum_{s \leq t} |\Delta L(s)| = \infty$ a.s., $\sum_{s \leq t} |\Delta L(s)|^2 < \infty$ a.s.

- Lévy Ölçüsü (Lévy Measure)

  Borel kümelerinin ailesi $\mathbf{B}_0$ olmak üzere, $U \subset R$, ve $U \in \mathbf{B}_0$ için

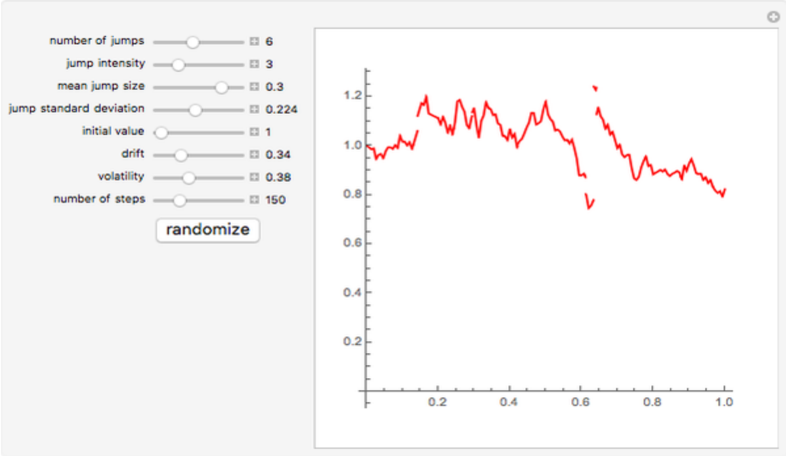
  $N(t, U) = N(t, U, \omega) = \sum_{s; 0 \leq s \leq t} \chi_U(\Delta L(s))$

  $N(t, U)$: t zamanında uzunluğu (size) $\Delta L(s)$ olan sıçramaların sayısını ölçen Poisson rastgele ölçüsü ya da sıçrama ölçüsüdür. Bu ölçünün diferansiyel formu $N(dt, dz)$ dir.

  - Bir küme fonksiyonu $U \to N(t, U, \omega)$ her bir sabit t, ω için $\mathbf{B}_0$ üzerinde bir $\sigma-$sonlu ölçüsüdür.

  - Bir küme fonksiyonu $\nu(U) = E[N(1, U)] = E[\sum_{s; 0 \leq s \leq 1} \chi_U(\Delta L(s))]$ olmak üzere, $\mathbf{B}_0$ üzerinde bir $\sigma-$sonlu ölçüdür. Bu ölçüye L nin Lévy ölçüsü (measure) adı verilir.

- Brown hareketi ve Poisson proses birer Lévy prosestir.



Şekil 4.1: Lévy Prosesi

4.2.3 Lineer BSDEs İçin Adapte Çözüm

$B(t)$, bir boyutlu Brown hareketi, $\xi \in L^2_{F_T}(\Omega; R)$ ($R-$değerli F_T-ölçülü rastgele değişkenler kümesi) ve $E|X^2| < \infty$ olmak üzere, aşağıdaki terminal değerli SDE problemi verilsin:

$$\begin{cases} dX(t) = 0, & t \in [0,T], \\ X(T) = \xi. \end{cases}$$

Burada, $\{F_t\}_{t\geq 0}-$adapte olan $X(.)$ çözümü bulunmak istensin. Ancak, problemin tek çözümü $X(t) = \xi$, $\forall t \in [0,T]$ için $\{F_t\}_{t\geq 0}-$adapte olmadığından dolayı bu mümkün değildir. (Sadece ξ, F_0-ölçülü ise yani ξ bir sabit ise mümkün olabilir.) Bu durumda; $X(t) = E(\xi \mid F_t)$ olacak şekilde yeni bir proses tanımlansın. $X(.)$ çözümü $\{F_t\}_{t\geq 0}-$adaptedir ve terminal şartı sağlar. ($X(T) = \xi$, çünkü ξ F_t-ölçülü). Ancak, SDE denklemini sağlamadığı görülür. Bu yüzden problemin tekrar ele alınması gerekir: $X(t) = E(\xi \mid F_t)$, karesi integrallenebilen $\{F_t\}_{t\geq 0}-$ martingaldir. Martingal representation teoremine göre $\{F_t\}_{t\geq 0}-$adapte proses $Y(.) \in L^2_{F_T}(\Omega; R)$ için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t Y(s)dB(s), \quad \forall t \in [0,T] \quad P - a.s.$$

$$\xi = X(T) = X(0) + \int_0^t Y(s)dB(s),$$

$$X(t) = \xi - \int_t^T Y(s)dB(s)$$

elde edilir. Bu ifadenin diferansiyel formu:

$$\begin{cases} dX(t) = Y(t)dB(t), & t \in [0,T], \\ X(T) = \xi. \end{cases}$$

Böylece, $\{F_t\}_{t\geq 0}-$adapte prosesleri olan $(X(.), Y(.))$ üstteki SDE denklemini sağlayan adapte çözüm çiftidir.

Bu bölümün amacı orta-alan sistemler için optimal singüler-sürekli stokastik kontrolün araştırılması olduğundan, kabul edilebilir kontrolün singüler bileşeni hakkında ayrıntılı tanımlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 4.2.1 Kabul edilebilir kontrol çifti $(u(\cdot), \xi(\cdot))$, $\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2-$değerli ölçülebilir, $\mathcal{F}_t^W-$uyarlanmış prosesleri olmak üzere; $\xi(\cdot)$, azalmayan sağdan sürekli soldan limitli sınırlı varyasyona sahip singüler kontroldür ve $\xi(0_-) = 0$ dır. Ayrıca, $\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |u(t)|^2 + |\xi(T)|^2) < \infty$.

Singüler kontrol $\xi(\cdot)$' nin herhangi bir t sıçrama anındaki sıçrama ölçüsü (büyüklüğü):

$$\Delta\xi(t) \triangleq \xi(t) - \xi(t_-)$$

ile ifade edilir. Burada, $\xi(t_-) = \lim\limits_{s\to t, s<t} \xi(s), t > 0.$

Singüler kontrolün sürekli bileşeni aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\xi^{(c)}(t) \triangleq \xi(t) - \sum_{0\leq\tau_j\leq t} \Delta\xi(\tau_j).$$

Burada proses, $\xi(t)$ sıçramalarının kaldırılmasıyla elde edilir. $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1 \times \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2\left([0,T]\right)$, tüm kabul edilebilir kontroller kümesidir. $d\xi(t)$ Lebesgue ölçümü dt' ye göre singüler olabileceği için $\xi(\cdot)$ kontrolün singüler bileşeni ve $u(\cdot)$ da mutlak sürekli bileşeni olarak adlandırılır.

Singüler $\xi(\cdot)$' nin herhangi bir t sıçrama anında aktive ettiği $x^{u,\xi}(t)$ ve $y^{u,\xi}(t)$ sıçramaları arasındaki fark aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\Delta_{\xi} x^{u,\xi}(t) &\triangleq \mathcal{C}(t)\Delta\xi(t) = \mathcal{C}(t)(\xi(t) - \xi(t_-)),\\ \Delta_{\xi} y^{u,\xi}(t) &\triangleq \mathcal{D}(t)\Delta\xi(t) = \mathcal{D}(t)(\xi(t) - \xi(t_-)).\end{aligned}$$

Lévy martingallerinin neden olduğu $x^{u,\xi}(t)$ sıçramaları, kuvvet (power) sıçrama prosesleri olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{cases} L_{(k)}(t) \triangleq \sum_{0<\tau\leq t} \left(\Delta L(\tau)\right)_k : k > 1 \\ L_{(1)}(t) \triangleq L(t). \end{cases}$$

Burada, $\Delta L(t) = L(t) - L(t_-)$ ve $L(t_-) = \lim\limits_{s\to t, s<t} L(s), t > 0.$
Ayrıca, $L_{(k)}(t)$' nin sürekli parçası aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L^{(c)}_{(k)}(t) \triangleq L_{(k)}(t) - \sum_{0<\tau\leq t} \left(\Delta L(\tau)\right)_k : k > 1.$$

Burada, proses $L(t)$ sıçramalarının kaldırılmasıyla elde edilir. $\Delta_L x^{u,\xi}(t)$ Lévy martingallerinden kaynaklanan $x^{u,\xi}(t)$ ve $y^{u,\xi}(t)$ sıçramaları aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}\Delta_L x^{u,\xi}(t) &\triangleq g(t, x^{u,\xi}(t_-), E[x^{u,\xi}(t_-)], u(t))\Delta L(t),\\ \Delta_L y^{u,\xi}(t) &\triangleq \sum_{j=1}^{\infty} q^{u,\xi,j}(t_-)\Delta L^j(t).\end{aligned}$$

State (durum) prosesleri olan $x^{u,\xi}(\cdot)$ ve $y^{u,\xi}(\cdot)$' nin herhangi bir t sıçrama anındaki genel sıçraması:

$$\begin{aligned}\Delta x^{u,\xi}(t) &\triangleq x^{u,\xi}(t) - x^{u,\xi}(t_-) \triangleq \Delta_{\xi} x^{u,\xi}(t) + \Delta_{L} x^{u,\xi}(t),\\ \Delta y^{u,\xi}(t) &\triangleq y^{u,\xi}(t) - y^{u,\xi}(t_-) \triangleq \Delta_{\xi} y^{u,\xi}(t) + \Delta_{L} y^{u,\xi}(t),\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir. $(H^j(\cdot))_{j\geq 1}$ Teugels martingaller ailesi olmak üzere,
$H^j(t) = \sum_{1<k\leq j} \alpha_{jk} N_k(t)$ olarak tanımlanır. Burada α_{jk} katsayılardır ve

$$N_{(k)}(t) \triangleq L_{(k)}(t) - E\left\{L_{(k)}(t)\right\} : k \geq 1$$

eşitliği geçerlidir. Teugels martingaller $\left(H^j(\cdot)\right)_{j\geq 1}$ kuvvetli ortogonallerdir ve öngörülebilir (predictable) kuadratik varyasyon prosesleri $\langle H^i(t), H^j(t)\rangle = \delta_{ij}t$ olarak ifade edilir. Lévy prosesleri ve Teugels martingaller ile ilgili ayrıntılı bilgi ve pratik örnekler için (Nualart and Schoutens, 2000)' a bakılabilir. Bu yapının bir sonucu olarak, her rastgele değişken (random variable) $\mathbb{L}^2\left(\Omega, \mathcal{F}, P, I\!R^n\right)$ uzayında aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$X = E(X) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \phi^j(t) dH^j(t).$$

Burada, $\left(\phi^j(t)\right)_{j\geq 1}$ öngörülebilir proseslerdir.

1. f, diferansiyellenebilen bir fonksiyon ve $f_x(t)$ x'e göre gradyenini göstersin, $1_A(\cdot)$, A kümesi üzerindeki indikatör fonksiyondur.

2. l^2: Reel değerli dizilerin Hilbert uzayı $x = (x_n)_{n\geq 0}$ olmak üzere, $\|x\| \triangleq \left[\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right]^2 < \infty$

$l^2\left(I\!R^n\right)$: $I\!R^n$-değerli $(f_n)_{n\geq 1}$ fonksiyon dizilerinin uzayı olmak üzere,

$\|f\|_{l^2(\boldsymbol{R}^n)} \triangleq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2_{\boldsymbol{R}^n}\right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$

3. $\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T]\,; I\!R^n\right)$: $\mathcal{F}_t-$ predictable (öngörülebilir) proseslerin Banach uzayı olmak üzere,

$f = \{f_n(t,w) : (t,w) \in [0,T] \times \Omega,\ n = 1, ..., \infty\}$ ve

$\|f\|_{\mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\boldsymbol{R}^n)} \triangleq E\left(\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|^2_{\boldsymbol{R}^n} dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$

4. $\mathbb{M}^2_{\mathcal{F}}\left([0,T]\,; I\!R^n\right)$: $I\!R^n-$ değerli ve $\mathcal{F}_t-$ adapte prosesleri olmak üzere,

$f = \{f(t,w) : (t,w) \in [0,T] \times \Omega\}$ ve
$\|f\|_{\mathbb{M}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\boldsymbol{R}^n)} \triangleq E\left(\int_0^T \|f(t)\|^2_{\boldsymbol{R}^n} dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$

5. $\mathbb{S}^2_{\mathcal{F}}([0,T]\,;I\!R^n)$: $\mathcal{F}_t-$adapted ve *cadlag* prosesleri olmak üzere,

$f=\{f(t,w):(t,w)\in[0,T]\times\Omega\}$ ve
$\|f\|_{\mathbb{S}^2_{\mathcal{F}}([0,T];\boldsymbol{R}^n)}\triangleq E(\sup_{0\le t\le T}\|f\|_{\boldsymbol{R}^n})^{\frac{1}{2}}<\infty.$

6. $\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{F},P,I\!R^n)$: $I\!R^n$- değerli, $(\Omega,\mathcal{F},P)$ üzerinde karesi integrallenebilen (random variable) rastgele değişkenlerin Banach uzayı.

7. $\mathcal{M}^{n\times m}(I\!R)$: $n\times m$ boyutlu reel matrisler uzayı.

$\sigma\equiv(\sigma^j)_{j=1}^d$ ve $g\equiv(g^j)_{j=1}^\infty$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
b &: [0,T]\times I\!R^n\times I\!R^n\times\mathbb{A}_1\longrightarrow I\!R^n,\\
\sigma &: [0,T]\times I\!R^n\times I\!R^n\times\mathbb{A}_1\longrightarrow \mathcal{M}^{n\times d}(I\!R),\\
g &: [0,T]\times I\!R^n\times I\!R^n\times\mathbb{A}_1\longrightarrow l^2(I\!R^n),\\
f &: [0,T]\times I\!R^n\times I\!R^n\times I\!R^n\times I\!R^n\times I\!R^{n\times d}\times I\!R^{n\times d}\times l^2(I\!R^n)\times\mathbb{A}_1\longrightarrow I\!R^n,\\
\ell &: [0,T]\times I\!R^n\times I\!R^n\times I\!R^n\times I\!R^n\times I\!R^{n\times d}\times I\!R^{n\times d}\times l^2(I\!R^n)\times\mathbb{A}_1\longrightarrow I\!R,\\
h &: I\!R^n\times I\!R^n\longrightarrow I\!R,\\
\phi &: I\!R^n\times I\!R^n\longrightarrow I\!R,\\
\varphi &: I\!R^n\times I\!R^n\longrightarrow I\!R,\\
\mathcal{C} &: [0,T]\to\mathcal{M}^{n\times m}(I\!R),\\
\mathcal{D} &: [0,T]\to\mathcal{M}^{n\times m}(I\!R),\\
\mathcal{M} &: [0,T]\to([0,\infty))^m,
\end{aligned}
$$

dönüşümleri geçerlidir.

Hipotez (H1): $b,\sigma,g,f,\ell,h,\phi,\varphi$ fonksiyonları kendi değişkenleri $(x,\widetilde{x},y,\widetilde{y},z,\widetilde{z},q,\widetilde{q},u)$ ne göre diferansiyelleri süreklidir. Terminal değer

$y_T \in l^2_{\mathcal{F}}\left([0,T]\,; I\!R^n\right)$ ve

$$\begin{aligned}
|\ell| &\leq C(1+|x|^2+|\widetilde{x}|^2+|y|^2+|\widetilde{y}|^2+|z|^2+|\widetilde{z}|^2+|q|^2+|\widetilde{q}|^2+|u|^2),\\
|\phi| &\leq C(1+|x|^2+|\widetilde{x}|^2),\\
|\varphi| &\leq C(1+|y|^2+|\widetilde{y}|^2),
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Hipotez (H2):

1) b, σ, g ve f'nin $(x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z, \widetilde{z}, q, \widetilde{q}, u)$ değişkenlerine göre türevleri sürekli ve sınırlıdır.

2) $\varphi_y, \varphi_{\widetilde{y}}$ türevleri $C\left(1+|y|+|\widetilde{y}|\right)$ ile sınırlıdır. ϕ_x, $\phi_{\widetilde{x}}$, h_x ve $h_{\widetilde{x}}$ türevleri ise $C\left(1+|x|+|\widetilde{x}|\right)$ ile sınırlıdır ve

$$\begin{aligned}
&|\ell_x|+|\ell_{\widetilde{x}}|+|\ell_y|+|\ell_{\widetilde{y}}|+|\ell_z|+|\ell_{\widetilde{z}}|+|\ell_q|+|\ell_{\widetilde{q}}|\\
\leq\; & C(1+|x|+|\widetilde{x}|+|y|+|\widetilde{y}|+|z|+|\widetilde{z}|+|q|+|\widetilde{q}|+|u|)
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

Hipotez (H3): $\mathcal{C} : [0,T] \to I\!R$, $\mathcal{D} : [0,T] \to I\!R$ and $\mathcal{M} : [0,T] \to I\!R^+$ fonksiyonları sürekli ve sınırlıdır.

(H1)∼(H3) hipotezleri altında, (4.1.1)' in tek kuvvetli çözümü (unique strong solution) $\left(x^{u,\xi}\left(\cdot\right), y^{u,\xi}\left(\cdot\right), z^{u,\xi}\left(\cdot\right), q^{u,\xi}(\cdot)\right) \in I\!R^n \times I\!R^n \times \mathcal{M}^{n\times d}(I\!R) \times l^2\left(I\!R^n\right)$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
x^{u,\xi}(t) &= x_0 + \int_0^t b(s, x^{u,\xi}(s), E(x^{u,\xi}(s)), u(s))ds \\
&+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma^j(s, x^{u,\xi}(s), E(x^{u,\xi}(s)))dW^j(s) \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t g^j(t, x^{u,\xi}(s_-), E(x^{u,\xi}(s_-)), u(t))dH^j(s) \\
&+ \int_{[0,t]} \mathcal{C}(s)d\xi(s),
\end{aligned}$$

ve $t \in [0,T]$ için;

$$\begin{aligned}
y^{u,\xi}(t) &= y_T - \int_t^T f(s, x^{u,\xi}(s), E(x^{u,\xi}(s)), y^{u,\xi}(s), E(y^{u,\xi}(s)), z^{u,\xi}(s) \\
& , E(z^{u,\xi}(s)), q^{u,\xi}(t), u(s))ds \\
&+ \sum_{j=1}^{d} \int_t^T z^{u,\xi,j}(s)dW^j(s) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_t^T q^{u,\xi,j}(s)dH^j(s) - \int_{[t,T]} \mathcal{D}(s)d\xi(s)
\end{aligned}$$

olduğu, (Meng and Tang, 2009)' da *Lemma 2.1* ile ve (Tang and Zhang, 2012)' de *Lemma 2.3* ile gösterilmiştir.

4.3 Ek Denklemler

Bu bölümde ele alınan kontrol problemi için stokastik maksimum prensibi yapısında yer alacak ek denklemler (adjoint equations) üretilecektir. Notasyonda sadeliğe gidilebilmesi için $f_x(t) \triangleq f_x(t, x^{u,\xi}(\cdot), \mu^{x,u,\xi}(\cdot), u(\cdot))$ gösterimi kullanılmıştır. Kabul edilebilir (admissible) kontrol çifti $(u(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1 \times \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])$ ve ilgili state (durum) değişkenleri $(x^{u,\xi}(\cdot), y^{u,\xi}(\cdot), z^{u,\xi}(\cdot), q^{u,\xi}(\cdot)) \triangleq (x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), q(\cdot))$ olarak kullanılacaktır.

Singüler kontroldan bağımsız ek denklemler aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{cases}
-d\Psi^u(t) = \{b_x(t)\Psi^u(t) + E[b_{\widetilde{x}}(t)\Psi^u(t)] \\
\qquad\qquad + \sum_{j=1}^{d} \sigma_x^j(t)Q^{u,j}(t) + E[\sum_{j=1}^{d} \sigma_{\widetilde{x}}^j(t)Q^{u,j}(t)] \\
\qquad\qquad + \sum_{j=1}^{\infty} g_x^j(t)G^{u,j}(t) + E[\sum_{j=1}^{\infty} g_{\widetilde{x}}^j(t)G^{u,j}(t)] \\
\qquad\qquad - f_x(t)K^u(t) - E[f_{\widetilde{x}}(t)K^u(t)] + \ell_x(t) + E[\ell_{\widetilde{x}}(t)]\}dt \\
\qquad\qquad - \sum_{j=1}^{d} Q^{u,j}(t)dW^j(t) - \sum_{j=1}^{\infty} G^{u,j}(t)dH^j(t), \\
dK^u(t) = [f_y(t)K^u(t) + E[f_{\widetilde{y}}(t)K^u(t)] - \ell_y(t) - E[\ell_{\widetilde{y}}(t)]]\, dt \\
\qquad\qquad + \sum_{j=1}^{d} [f_{z^j}(t)K^u(t) + E[f_{\widetilde{z}^j}(t)K^u(t)] - \ell_{z^j}(t) - E[\ell_{\widetilde{z}^j}(t)]]\, dW^j(t) \\
\qquad\qquad + \sum_{j=1}^{\infty} \left[f_{q^j}(t)K^u(t) + E[f_{\widetilde{q}^j}(t)K^u(t)] - \ell_{q^j}(t) - E[\ell_{\widetilde{q}^j}(t)]\right] dH^j(t) \\
\Psi^u(T) = -\left[h_x(T)K^u(T) + E(h_{\widetilde{x}}(T)K^u(T))\right] + \phi_x(x(T)) + E\left[\phi_{\widetilde{x}}(x(T))\right], \\
K^u(0) = -\left\{\varphi_y(y(0), E[y(0)]) + E\left[\varphi_{\widetilde{y}}(y(0), \mathbb{E}[y(0)])\right]\right\}.
\end{cases}
\tag{4.3.1}
$$

4.4 Hamilton Fonksiyonu

Hamilton fonksiyonu:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H} \quad &: \quad [0,T] \times I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^{n\times m} \times I\!R^{n\times m} \times l^2(I\!R^n) \\
&\times \quad l^2(I\!R^n) \times \mathbb{A}_1 \times I\!R^n \times I\!R^n \times I\!R^{n\times d} \times l^2(I\!R^n) \to I\!R
\end{aligned}
\tag{4.4.1}
$$

olmak üzere, stokastik kontrol problemi (4.1.1)-(4.1.2) ile ilişkili olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{H}\left(t, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z, \widetilde{z}, q, \widetilde{q}, u, \Psi(\cdot), Q(\cdot), G(\cdot), K(\cdot)\right) := \Psi(t) b\left(t, x, \widetilde{x}, u\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{d} Q^j(t)\sigma^j(t, x, \widetilde{x}, u) + \sum_{j=1}^{\infty} G^j(t) g^j(t, x, \widetilde{x}, u) \\
&-K(t) f(t, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, q, \tilde{q}, z, \tilde{z}, u) + \ell(t, x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, q, \tilde{q}, z, \tilde{z}, u).
\end{aligned}
\tag{4.4.2}
$$

4.5 Hamiltona Bağlı Ek Denklemler

$\mathbb{H}(t) := H\left(t, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z, \widetilde{z}, q, \widetilde{q}, u, \Psi(\cdot), Q(\cdot), G(\cdot), K(\cdot)\right)$ olmak üzere, ek denklem (4.3.1) stokastik Hamilton sistemine göre aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\begin{cases} -d\Psi^u(t) &= [\mathbb{H}_x(t) + E[\mathbb{H}_{\widetilde{x}}(t)]]\,dt - \sum_{j=1}^{d} Q^{u,j}(t)dW^j(t) \\ &- \sum_{j=1}^{\infty} G^{u,j}(t)dH^j(t), \\ dK^u(t) &= -(\mathbb{H}_y(t) + E[\mathbb{H}_{\widetilde{y}}(t)])dt - \sum_{j=1}^{d}(\mathbb{H}^j_{z^j}(t) + E[\mathbb{H}^j_{\widetilde{z}^j}(t)])dW^j(t) \\ &- \sum_{j=1}^{\infty}(\mathbb{H}^j_{q^j}(t) + E[\mathbb{H}^j_{\widetilde{q}^j}(t)])dH^j(t), \\ \Psi^u(T) &= -\left[h_x(T)K^u(T) + E(h_{\widetilde{x}}(T)K(T))\right] + \phi_x(T) + E\left[\phi_{\widetilde{x}}(T)\right], \\ K^u(0) &= -\varphi_y(y(0), E[y(0)]) + E\left[\varphi_{\widetilde{y}}(y(0), \mathbb{E}[y(0)])\right]. \end{cases} \tag{4.5.1}$$

Burada, $\mathbb{H}^j(t) \triangleq H\left(t, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z^j, \widetilde{z}^j, q^j, \widetilde{q}^j, u, \Psi(\cdot), Q(\cdot), G(\cdot), K(\cdot)\right)$ olarak tanımlanmıştır.

(H1) ve (H2) varsayımlarından da bilindiği üzere, ek denklemler (4.3.1) ya da (4.5.1)' in tek çözümü $(\Psi(t), Q(t), G(t), K(t))$ dörtlüsü olarak

$\Psi(t) \in S^2_{\mathcal{F}}([0,T]; I\!R^n), \quad Q(t) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T]; I\!R^{n\times d})$
$G(t) \in l^2_{\mathcal{F}}([0,T]\,; I\!R^n), \quad K(t) \in S^2_{\mathcal{F}}([0,T]\,; I\!R^n)$ üzerinde tanımlıdır.

4.6 Orta-Alan Lévy-FBSDEs İçin Gereklilik Koşulları

Bu alt bölümde, tüm mertebelerin momentlerini içeren bazı Lévy prosesleri ile bağlantılı ortogonal Teugels martingallere dayalı orta-alan FBSDEs idareli sistem için optimal singüler kontrolün maksimum prensibi, yani optimumluk için gereklilik şartları elde edilecektir. Bu doğrultuda, alt bölüm 2' deki varsayımlara ek olarak aşağıdaki varsayımlar kullanılacaktır:

Hipotez (H4)

(1) $0 \leq t \leq t+r \leq T$ olmak üzere, tüm t, r için $i = 1,...,k$ ve tüm sınırlı $\mathcal{G}_t-$ ölçümlü $\alpha = \alpha(w)$, kontrol $\beta(t) = (0,...,0,\beta_i(t),0,...,0) \in \mathbb{A}_1$, ile $\beta_i(s) = \alpha_i I_{[t,t+r]}(s)$, $s \in [0,T], \mathcal{U}^1_{\mathcal{G}}([0,T])$ kümesine aittir.

(2) Tüm $u(\cdot), \beta(\cdot) \in \mathcal{U}^1_{\mathcal{G}}([0,T])$ ile sınırlı $\beta(\cdot)$ için, $u(\cdot) + \epsilon\beta \in \mathcal{U}^1_{\mathcal{G}}([0,T])$ olacak şekilde, tüm $\epsilon \in [0,\delta_1]$ için $\delta_1 > 0$ vardır.

(3) $\xi(\cdot) \in \mathcal{U}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$ için, sonlu varyasyonun $\mathcal{G}_t-$ adapte prosesleri ζ' nın kümesi, $\mathcal{V}(\xi)$ olsun ve tüm $\epsilon \in [0,\delta_2]$ için $\xi(\cdot) + \epsilon\zeta \in \mathcal{U}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$ olacak biçimde, $\delta_2 = \delta_2(\xi) > 0$ vardır.

Tüm $\epsilon \in [0,\delta]$ için $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$ olsun ve verilen $u(\cdot)$, $\beta \in \mathcal{U}^1_{\mathcal{G}}([0,T])$ ve $\xi(\cdot) \in \mathcal{U}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$ sınırlı β ile $\zeta \in \mathcal{V}(\xi)$ için aşağıdaki varyasyonlar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= X_1^{u^*,\xi^*,\beta,\zeta}(t) \triangleq \frac{d}{d\epsilon} x^{u^*+\epsilon\beta,\xi^*+\epsilon\zeta}(t)\mid_{\epsilon=0}, \\
Y_1(t) &= Y_1^{u^*,\xi^*,\beta,\zeta}(t) \triangleq \frac{d}{d\epsilon} y^{u^*+\epsilon\beta,\xi^*+\epsilon\zeta}(t)\mid_{\epsilon=0}, \\
Z_1(t) &= Z_1^{u^*,\xi^*,\beta,\zeta}(t) \triangleq \frac{d}{d\epsilon} z^{u^*+\epsilon\beta,\xi^*+\epsilon\zeta}(t)\mid_{\epsilon=0}, \\
Q_1(t) &= Q_1^{u^*,\xi^*,\beta,\zeta}(t) \triangleq \frac{d}{d\epsilon} q^{u^*+\epsilon\beta,\xi^*+\epsilon\zeta}(t)\mid_{\epsilon=0}.
\end{aligned} \tag{4.6.1}$$

Burada, $(X_1(\cdot), Y_1(\cdot), Z_1(\cdot), Q_1(\cdot))$ prosesleri aşağıdaki lineer orta-alan FBSDEs denklemlerini, yani; hem Brown hareketi hem de Teugels martingalleri içeren varyasyonel denklemleri sağlar:

$$
\begin{aligned}
dX_1(t) &= [b_x(t)X_1(t) + b_{\widetilde{x}}(t)E(X_1(t)) + b_u(t)\beta(t)]\, dt \\
&+ \sum_{j=1}^{d} \left[\sigma_x^j(t)X_1(t) + \sigma_{\widetilde{x}}^j(t)E(X_1(t)) + \sigma_u^j(t)\beta(t)\right] dW^j(t) \\
&+ \sum_{j=1}^{\infty} \left[g_x^j(t)X_1(t) + g_{\widetilde{x}}^j(t)E(X_1(t)) + g_u^j(t)\beta(t)\right] dH^j(t) \\
&+ \mathcal{C}(t)d\zeta(t), \\
dY_1(t) &= [f_x(t)Y_1(t) + f_{\widetilde{x}}(t)E(Y_1(t)) + f_u(t)\beta(t)]dt \\
&+ \sum_{j=1}^{d} Z_1^{;j}(t)dW(t) + \sum_{j=1}^{\infty} Q_1^{;j}(t)dH(t) + \mathcal{D}(t)d\zeta(t), \\
X_1(0) &= 0, \\
Y_1(T) &= [h_x(x(T), E(x(T))) + E(h_{\widetilde{x}}(x(T), E(x(T)))]\, X_1(T).
\end{aligned}
$$

$(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$ optimal kontrol çifti, $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1 \times \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])$ üzerinde J fonksiyoneli için yerel minimum olsun. Bir diğer anlamda, tüm sınırlı β ve tüm $\zeta \in \mathcal{V}(\xi^*)$ için $(u^*(\cdot) + \epsilon\beta, \xi^*(\cdot) + \epsilon\zeta) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1 \times \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])$ olacak şekilde, tüm $\epsilon \in [0,\delta]$ için $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ vardır ve φ fonksiyonu,

$$
\varphi(\epsilon) \triangleq J(u^*(\cdot) + \epsilon\beta, \xi^*(\cdot) + \epsilon\zeta),
$$

olmak üzere, $\epsilon = 0$ noktasında minimuma sahiptir. Böylece,

$$
\frac{d}{d\epsilon}\varphi(\epsilon) \mid_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon}J(u^*(\cdot) + \epsilon\beta, \xi^*(\cdot) + \epsilon\zeta) \mid_{\epsilon=0} = 0 \tag{4.6.2}
$$

sonucuna varılabilir. Orta-alan SDEs-(4.1.1)' in optimal kontrol çifti $(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$' e karşılık gelen çözümü $(x^*(\cdot), y^*(t), z^*(t), q^*(t))$ olsun.

Teorem 4.6.1' in ispatı için, $\Psi^*(t)X_1(t)$ ile $K^*(t)Y_1(t)$ arasındaki dualite ilişkisini gösteren aşağıdaki Lemma kullanılacaktır.

Lemma 4.6.1 Itô formülü $\Psi^*(t)X_1(t)$ ve $K^*(t)Y_1(t)$ çarpımlarına uygulanır ve beklenen değer (Expectation) hesaplanırsa;

$$
\begin{aligned}
&E\left(\Psi^*(T)X_1(T)\right)+E\left(K^*(T)Y_1(T)\right)\\
&=-E\left\{\left[\varphi_y(0)+E\left(\varphi_{\widetilde{y}}(0)\right)\right]Y_1(0)\right\}\\
&-E\int_0^T\left\{X_1(t)[\ell_x(t)+E(\ell_{\widetilde{x}}(t)]+Y_1(t)[\ell_y(t)+E(\ell_{\widetilde{y}}(t)]\right.\\
&+\left.Z_1(t)[\ell_z(t)+E(\ell_{\widetilde{z}}(t)]+Q_1(t)[\ell_q(t)+E(\ell_{\widetilde{q}}(t)]+\ell_u(t)\beta(t)\right\}dt \qquad (4.6.3)\\
&+E\int_0^T H_u(t)\beta(t)dt+E\int_{[0,T]}\left[\Psi^*(t)\mathcal{C}(t)+K^*(t)\mathcal{D}(t)\right]d\zeta(t)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

İspat: Itô formülü $\Psi^*(t)X_1(t)$ çarpımına uygulanır ve beklenen değeri alınırsa;

$$
\begin{aligned}
&E(\Psi^*(T)X_1(T))=E\int_0^T\Psi^*(t)dX_1(t)+E\int_0^T X_1(t)d\Psi^*(t)\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^d Q^{j*}(t)[\sigma_x^j(t)X_1(t)+\sigma_{\widetilde{x}}^j(t)E\left(X_1(t)\right)+\sigma_u^j(t)\beta(t)]dt\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^\infty G^{j*}(t)[g_x^j(t)X_1(t)+g_{\widetilde{x}}^j(t)E\left(X_1(t)\right)+g_u^j(t)\beta(t)]dt\\
&=I_1+I_2+I_3+I_4
\end{aligned}
\qquad (4.6.4)
$$

olacak şekilde Itô argümanları elde edilir.

Burada;

$$
\begin{aligned}
I_1 &= E\int_0^T\Psi^*(t)dX_1(t)\\
&= E\int_0^T\Psi^*(t)\left[b_x(t)X_1(t)+b_{\widetilde{x}}(t)E(X_1(t))+b_u(t)\beta(t)\right]dt\\
&+ E\int_{[0,T]}\Psi^*(t)\mathcal{C}(t)d\zeta(t) \qquad (4.6.5)\\
&= E\int_0^T\Psi^*(t)b_x(t)X_1(t)+E\int_0^T\Psi^*(t)b_{\widetilde{x}}(t)E(X_1(t))\\
&+ E\int_0^T\Psi^*(t)b_u(t)\beta(t))dt+E\int_{[0,T]}\Psi^*(t)\mathcal{C}(t)d\zeta(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E\int_0^T X_1(t)d\Psi^*(t) \\
&= -E\int_0^T X_1(t)\{b_x(t)\Psi^*(t) + E(b_{\widetilde{x}}(t)\Psi^*(t)) \\
&+ \sum_{j=1}^{d}(\sigma_x^j(t)Q^{j*}(t) + E(\sigma_{\widetilde{x}}^j\,(t)\,Q^{j*}(t))) \qquad (4.6.6) \\
&= E\int_0^T \Psi^*(t)b_x\,(t)\,X_1(t) + \sum_{j=1}^{\infty}(g_x^j\,(t)\,G^{j*}(t) + E[g_{\widetilde{x}}^j\,(t)\,G^{j*}(t)]) \\
&+ E\int_0^T \Psi^*(t)b_u(t)\beta(t))dt + E\int_{[0,T]} \Psi^*(t)\mathcal{C}(t)d\zeta(t) \\
&- f_x(t)K^u(t) - E(f_{\widetilde{x}}(t)K^u(t)) + \ell_x(t) + E[\ell_{\widetilde{x}}(t),]\}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} Q^{j*}(t)[\sigma_x^j(t)X_1(t) + \sigma_{\widetilde{x}}^j(t)E(X_1(t)) + \sigma_u^j(t)\beta(t)]dt \\
&= E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} Q^{j*}(t)\sigma_x^j(t)X_1(t)dt + E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} Q^{j*}(t)\sigma_{\widetilde{x}}^j(t)E(X_1(t))dt \\
&+ E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} Q^{j*}(t)\sigma_u^j(t)\beta(t)dt, \qquad (4.6.7)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_4 &= E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} G^{j*}(t)[g_x^j(t)X_1(t) + g_{\widetilde{x}}^j(t)E(X_1(t)) + g_u^j(t)\beta(t)]dt \\
&= E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} G^{j*}(t)g_x^j(t)X_1(t)dt + E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} G^{j*}(t)g_{\widetilde{x}}^j(t)Et(X_1(t))dt \\
&+ E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} G^{j*}(t)g_u^j(t)\beta(t)dt \qquad (4.6.8)
\end{aligned}
$$

beklenen değerleri bulunur. Bulunan sonuçlar (4.6.4)∼(4.6.8)' in birleştirilmesiyle aşağıdaki eşitliğe ulaşır:

$$\begin{aligned} E(\Psi^*(T)X_1(T)) &= E\int_0^T \Psi^*(t)b_u(t)\beta(t))dt + E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} Q^{j*}(t)\sigma_u^j(t)\beta(t)dt \\ &+ E\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} G^{j*}(t)g_u^j(t)\beta(t)dt \\ &- E\int_0^T X_1(t)(\ell_x(t) + E(\ell_{\widetilde{x}}(t)))dt \\ &- E\int_0^T X_1(t)[f_x(t)K(t))dt - E(f_x(t)K(t))]dt \\ &+ E\int_{[0,T]} \Psi^*(t)\mathcal{C}(t)d\zeta(t). \end{aligned} \tag{4.6.9}$$

Benzer biçimde, $K^*(t)Y_1(t)$ çarpımına Itô formülü tekrar uygulanarak;

$$\begin{aligned} &E(K^*(T)Y_1(T)) = -E\{[\varphi_y(y(0),E(y(0))) + E(\varphi_{\widetilde{y}}(y(0),E(y(0))))]Y_1(0)\} \\ &+E\int_0^T \{K^*(t)f_x(t)X_1(t) + K^*(t)f_{\widetilde{x}}(t)E(X_1(t)) \\ &+K^*(t)f_u(t)\beta(t)) - Y_1(t)[\ell_y(t) + E(\ell_{\widetilde{y}}(t))] \\ &-Z_1(t)[\ell_z(t) + E(\ell_{\widetilde{z}}(t))] - Q_1(t)[\ell_q(t) + E(\ell_{\widetilde{q}}(t)]\}dt \\ &+E\int_{[0,T]} K^*(t)\mathcal{D}(t)d\xi(t), \end{aligned} \tag{4.6.10}$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen (4.6.10) ve (4.6.9) eşitlikleri birleştirilirse istenen sonuç (4.6.3)' e ulaşılır.

Böylelikle, *Lemma 4.6.1*' in ispatı tamamlanır. □

Teorem 4.6.1 *(H1)-(H4) hipotezleri sağlansın.* $(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot))$ *çiftine karşılık gelen (adjoint equation) ek denklem (4.3.1)' in bir tek uyarlanmış (adapted) proses dörtlüsü* $(\Psi^*(\cdot),Q^*(\cdot),G^*(\cdot),K^*(\cdot))$ *vardır, öyle ki;* $(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot))$ *hemen hemen tüm* $t\in[0,T]$ *anlamında bir kritik noktadır ve*

$$\begin{aligned} &E[\mathbb{H}_u(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t)) \mid \mathcal{G}_t] \\ &+E\left[\int_{[0,T]} (M(t) + \mathcal{C}(t)\Psi^*(t) + \mathcal{D}(t)K^*(t))\,d\xi^*(t) \mid \mathcal{G}_t\right] \\ &= 0,\ a.e.,\ t\in[0,T], \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

elde edilir. Burada,

$$
\begin{aligned}
&(\psi^*(t), E(\psi^*(t))) \\
&\triangleq (x^*(t), E(x^*(t)), y^*(t), E(y^*(t)), z^*(t), E(z^*(t)), q^*(t), E(q^*(t))).
\end{aligned}
$$

İspat. Minimumlaştırma denklemi (4.6.2) kullanılarak,

$$
\begin{cases}
\frac{d}{d\epsilon} J(u^*(t) + \epsilon\beta(t), \xi^*(t) + \epsilon\zeta(t)) \mid_{\epsilon=0} \\
= E\left[\int_0^T \ell_x(t)X_1(t) + \ell_{\widetilde{x}}(t)E(X_1(t)) + \ell_y(t)Y_1(t) + \ell_{\widetilde{y}}(t)E(Y_1(t))\right. \\
\left. +\ell_z(t)Z_1(t) + \ell_{\widetilde{z}}(t)E(Z_1(t)) + \ell_q(t)Q_1(t) + \ell_{\widetilde{q}}(t)E(Q_1(t)) + \int_0^T \ell_u(t)\beta(t)\right] dt \\
+E\left[\phi_x(x^*(T), E(x^*(T)))X_1(T) + \phi_{\widetilde{x}}(x^*(T), E(x^*(T)))E(X_1(T))\right] \\
+E\left[\varphi_y(y^*(0), E(y^*(0)))Y_1(0) + \varphi_{\widetilde{y}}(y^*(0), E(y^*(0)))E(Y_1(0))\right] \\
+E\int_{[0,T]} M(t)d\zeta(t) = 0.
\end{cases}
\tag{4.6.12}
$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 4.6.1 ve (4.6.12) dikkate alındığında,

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^T [\Psi^*(t)b_u(t) + \textstyle\sum_{j=1}^d Q^{j*}(t)\sigma_u^j(t) + \sum_{j=1}^\infty G^{j*}(t)g_u^j(t) \\
&+K(t)f_u(t) + \ell_u(t)]\beta(t)dt \\
&+E\left[\int_{[0,T]} \left(M(t) + \mathcal{C}(t)\Psi^*(t) + \mathcal{D}(t)K^*(t)\right) d\zeta(t)\right] = 0
\end{aligned}
\tag{4.6.13}
$$

ifadesine ulaşılır.

Stokastik Hamilton fonksiyonunun u' ya göre diferansiyeli:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{H}_u\left(t, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z, \widetilde{z}, q, \widetilde{q}, u, \Psi(\cdot), Q(\cdot), G(\cdot), K(\cdot)\right) \\
&= \Psi(t)b_u\left(t, x, \widetilde{x}, u\right) + \textstyle\sum_{j=1}^d Q^j(t)\sigma_u^j\left(t, x, \widetilde{x}, u\right) \\
&+ \textstyle\sum_{j=1}^\infty G^j(t)g_u^j\left(t, x, \widetilde{x}, u\right) + K(t)f_u\left(t, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z, \widetilde{z}, q, \widetilde{q}, u\right) \\
&+\ell_u\left(t, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z, \widetilde{z}, q, \widetilde{q}, u\right),
\end{aligned}
\tag{4.6.14}
$$

şeklinde ifade edilebildiği için,

$$E\int_0^T \mathbb{H}_u\left(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t)\right)\beta(t)dt \\ +E\left[\int_{[0,T]}\left(M(t)+\mathcal{C}(t)\Psi^*(t)+\mathcal{D}(t)K^*(t)\right)d\zeta(t)\right]=0 \tag{4.6.15}$$

eşitliği yazılabilir.

$$\begin{cases} \beta(s)=(0,...,\beta_i(s),...,0) \\ \beta_i(s)=\alpha_i l_{[t,t+r]}(s), \;\; s\in[0,T], \;\; t+r\leq T \\ \alpha_i=\alpha_i(w) \text{ sınırlı ve } \mathcal{G}_t-\text{ölçümlü} \end{cases} \tag{4.6.16}$$

olmak üzere, (4.6.16)' daki ifadeler $t\in[0,T]$ için (4.6.15)' e uygulanırsa, aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$E\int_t^{t+r} \mathbb{H}_{u_i}\left(s,\psi^*(s),E(\psi^*(s)),u^*(s),\Psi^*(s),Q^*(s),G^*(s),K^*(s)\right)\alpha_i(w)ds \\ +E\left[\int_{[0,T]}\left(M(t)+\mathcal{C}(t)\Psi^*(t)+\mathcal{D}(t)K^*(t)\right)d\zeta(t)\right]=0. \tag{4.6.17}$$

Ayrıca, (4.6.17)' de ifade edilen eşitlik, r' ye göre $r=0$ noktasında diferansiyelenirse,

$$E\left[\mathbb{H}_{u_i}\left(s,\psi^*(s),E(\psi^*(s)),u^*(s),\Psi^*(s),Q^*(s),G^*(s),K^*(s)\right)\alpha_i\right] \\ +E\left[\int_{[0,T]}\left(M(t)+\mathcal{C}(t)\Psi^*(t)+\mathcal{D}(t)K^*(t)\right)d\zeta(t)\right]=0 \tag{4.6.18}$$

ifadesi elde edilir. Son olarak, (4.6.18) tüm sınırlı $\mathcal{G}_t-$ölçümlü α_i ve tüm $\zeta\in\mathcal{V}(\xi^*)$ için sağlandığından aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$E\left[\mathbb{H}_u(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t)) \mid \mathcal{G}_t\right] \\ +E\left[\int_{[0,T]}\left(M(t)+\mathcal{C}(t)\Psi^*(t)+\mathcal{D}(t)K^*(t)\right)d\xi^*(t)\mid\mathcal{G}_t\right] \\ =0, \; a.e., \; t\in[0,T]\,. \tag{4.6.19}$$

Böylelikle, *Teorem 4.6.1* ispatlanmış olur. □

4.7 Orta-Alan Lévy-FBSDEs İçin Yeterlilik Koşulları

Bu alt bölümün amacı, tüm mertebelerin momentlerini içeren bazı Lévy prosesleri ve bağımsız Brown hareketi ile bağlantılı Teugels martingallere dayalı orta-alan FBSDEs-(4.1.1) idareli sistemi için kısmi enformasyon yeterlilik koşullarının elde edilmesidir. Bu kapsamda, bazı ek hipotezler altında gereklilik koşulu (4.6.11)'İn optimumluk için yeterlilik koşulu olduğu gösterilecektir.

Hipotez (H5):

1) $\mathbb{H}(t,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(\cdot))$, Hamilton fonksiyoneli, $(x,\widetilde{x},y,\widetilde{y},z,\widetilde{z},q,\widetilde{q},u)$ değişkenlerine göre konvekstir. $a.e.\ t\in[0,T]\,,\ P-a.s.$

2) $\phi(\cdot,\cdot)$ ve $\varphi(\cdot,\cdot)$ dönüşümleri $(x,\widetilde{x})$' ya göre konveks, $h(\cdot,\cdot)$ ise $(x,\widetilde{x})$' ya göre konkavdır.

Şimdi de bölümün ikinci ana sonucu olan yeterlilik teoremi, kontrol problemi (4.1.1)$-$(4.1.2)' nin optimumluk için yeterlilik koşullarının belirlenmesi yönünde ifade edilecektir.

$(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot))\ \in\ \mathcal{U}^1_{\mathcal{G}}\times\mathcal{U}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$ olmak üzere, $(x^*(\cdot),y^*(\cdot),z^*(\cdot),q^*(\cdot))$ optimal çözüm takımı ve $(\Psi^*(\cdot),Q^*(\cdot),G^*(\cdot),K^*(\cdot))$ optimal ek çözüm dörtlüsü, sırasıyla (4.1.1) ve (4.3.1) denklemlerinin $(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot))$ ikilisine göre çözümleri olsun.

İleride yeterlilik maksimum prensibi teoreminde kullanılacağından dolayı, öncelikle $\Psi^*(t)$, $[x(t)-x^*(t)]$ arasındaki ve $K^*(t)$, $[y(t)-y^*(t)]$ arasındaki dualite ilişkisini açıklayan Lemma aşağıda ifade edilmiştir:

Lemma 4.7.1 Orta-alan FBSDEs-(4.1.1)'in herhangi bir $(u(\cdot),\xi(\cdot))$ kabul edilebilir kontrolüne göre çözümü $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), q(\cdot))$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&E\left[\Psi^*(T)\left(x(T)-x^*(T)\right)\right]=E\int_0^T \Psi^*(t)\left[b(t,x(t),E(x(t)),u(t))\right.\\
&\quad \left.-\,b(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t))\right]dt\\
&\quad +E\int_0^T \mathbb{H}_x^*(t)\left(x(t)-x^*(t)\right)dt+E\int_0^T E[\mathbb{H}_{\widetilde{x}}^*(t)]\left(E(x(t))-E(x^*(t))\right)dt\\
&\quad +E\int_0^T \sum_{j=1}^d Q^{j*}(t)\left[\sigma^j(t,x(t),E(x(t)),u(t))\right.\\
&\quad \left.-\,\sigma^j(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t))\right]dt\\
&\quad +E\int_0^T \sum_{j=1}^\infty G^{j*}(t)\left[g^j(t,x(t),E(x(t)),u(t))\right.\\
&\quad \left.-\,g^j(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t))\right]dt\\
&\quad +E\int_{[0,T]} \Psi^*(t)\mathcal{C}(t)d(\xi-\xi^*)dt,
\end{aligned}
\tag{4.7.1}
$$

benzer biçimde,

$$
\begin{aligned}
&E\left[K^*(T)\left(y(T)-y^*(T)\right)\right]=-E\left(\varphi_y\left(y(0),E\left(y(0)\right)\right)\left(y^*(0)-y(0)\right)\right)\\
&\quad -E\left(\varphi_{\widetilde{y}}\left(y(0),E\left(y(0)\right)\right)\right)\left(E\left(y^*(0)\right)-E\left(y(0)\right)\right)\\
&\quad +E\int_0^T K^*(t)\left\{f(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t))-f(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t))\right\}dt\\
&\quad +E\int_0^T \mathbb{H}_y^*(t)\left(y(t)-y^*(t)\right)dt+E\int_0^T E(\mathbb{H}_{\widetilde{y}}^*(t))\left(E(y(t))-E(y^*(t))\right))dt\\
&\quad +E\int_0^T \sum_{j=1}^d \mathbb{H}_{z^j}^{j*}(t)\left(z^j(t)-z^{j*}(t)\right)dt\\
&\quad +E\int_0^T \sum_{j=1}^d E(\mathbb{H}_{\widetilde{z}^j}^{j*}(t))\left(E(z^j(t))-E(z^{j*}(t))\right)dt\\
&\quad +E\int_0^T \sum_{j=1}^\infty \mathbb{H}_{q^j}^{j*}(t)\left(q^j(t)-q^{j*}(t)\right)dt\\
&\quad +E\int_0^T \sum_{j=1}^\infty E(\mathbb{H}_{\widetilde{q}^j}^{j*}(t))\left(E(q^j(t))-E(q^{j*}(t))\right)dt\\
&\quad +E\int_{[0,T]} K^*(t)\mathcal{D}(t)d(\xi-\xi^*)(t),
\end{aligned}
\tag{4.7.2}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&E\left[\Psi^*(T)\left(x(T)-x^*(T)\right)\right]+E\left[K^*(T)\left(y(T)-y^*(T)\right)\right]\\
&+E\left(\varphi_y\left(y(0),E\left(y(0)\right)\right)\left(y^*(0)-y(0)\right)\right)\\
&+E[\varphi_{\widetilde{y}}\left(y(0),E\left(y(0)\right)\right)]\left(E\left(y^*(0)\right)-E\left(y(0)\right)\right)\\
&=E\int_0^T\Psi^*(t)(b(t,x(t),E(x(t)),u(t)-b(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t)))dt\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^d Q^{*,j}(t)[\sigma^j(t,x(t),E(x(t)),u(t))-\sigma^j(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t))]dt\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^\infty G^{*,j}(t)\left[g^j(t,x(t),E(x(t)),u(t))-g^j(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t))\right]dt\\
&+E\int_0^T K^*(t)[f(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t)))-f(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t))]dt\\
&+E\int_0^T\mathbb{H}_x^*(t)\left(x(t)-x^*(t)\right)dt+E\int_0^T E\left[\mathbb{H}_{\widetilde{x}}^*(t)\right]\left(E(x(t))-E(x^*(t))\right)dt\\
&+E\int_0^T\mathbb{H}_y^*(t)\left(y(t)-y^*(t)\right)dt+E\int_0^T E(\mathbb{H}_{\widetilde{y}}^*(t))\left(E(y(t))-E(y^*(t))\right))dt\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^d\mathbb{H}_{z^j}^{j*}(t)\left(z^j(t)-z^{j*}(t)\right)dt\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^d E(\mathbb{H}_{\widetilde{z}^j}^{j*}(t))\left(E(z^j(t))-E(z^{j,*}(t))\right)dt\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^\infty\mathbb{H}_{q^j}^{j*}(t)\left(q^j(t)-q^{j*}(t)\right)dt\\
&+E\int_0^T\sum_{j=1}^\infty E(\mathbb{H}_{\widetilde{q}^j}^{j*}(t))\left(E(q^j(t))-E(q^{j*}(t))\right)dt\\
&+E\int_{[0,T]}\left[\Psi^*(t)\mathcal{C}(t)+K^*(t)\mathcal{D}(t)\right]d(\xi-\xi^*)(t)
\end{aligned}
\tag{4.7.3}
$$

expectation (beklenen değer) eşitlikleri vardır.

İspat. Basit hesaplamalarla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$
\begin{aligned}
d\left(x(t)-x^*(t)\right)=&\left[b(t,x(t),E(x(t)),u(t))-b(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t))\right]dt\\
&+\left[\sum_{j=1}^d\sigma^j(t,x(t),E(x(t)),u(t))-\sigma^j(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t)\right]dW^j(t)\\
&+\left[\sum_{j=1}^\infty g^j(t,x(t),E(x(t)),u(t))-g^j(t,x^*(t),E(x^*(t)),u^*(t)\right]dH^j(t)\\
&+\mathcal{C}(t)d(\xi-\xi^*)(t),
\end{aligned}
\tag{4.7.4}
$$

$$
\begin{aligned}
d\left(y(t)-y^*(t)\right)=&[f(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t))-f(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t))]dt\\
&+\sum_{j=1}^d\left(z^j(t)-z^{j*}(t)\right)dW^j(t)+\sum_{j=1}^\infty\left(q^j(t)-q^{j*}(t)\right)dH^j(t)\\
&+\mathcal{D}(t)d(\xi-\xi^*)(t).
\end{aligned}
\tag{4.7.5}
$$

Kısmi integrasyon kuralı $\Psi^*(t)\left(x(t)-x^*(t)\right)$ çarpımına uygulanarak ve

$x(0) - x^*(0) = 0$ olduğu göz önünde tutularak,

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\Psi^*(T)\left(x(T) - x^*(T)\right)\right\} \\
&= E\int_0^T \Psi^*(t) d\left(x(t) - x^*(t)\right) + E\int_0^T \left(x(t) - x^*(t)\right) d\Psi^*(t) \\
&+ E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} Q^{j*}(t)[\sigma^j(t, x(t), E(x(t)), u(t)) - \sigma^j(t, x^*(t), E(x^*(t)), u^*(t))]dt \\
&+ E\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} G^{j*}(t)[g^j(t, x(t), E(x(t)), u(t)) - g^j(t, x^*(t), E(x^*(t)), u^*(t))]dt \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}
\tag{4.7.6}
$$

denklemine ulaşılır. Böylece, (4.7.4) eşitliğinden,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= E\int_0^T \Psi^*(t) d\left(x(t) - x^*(t)\right) \\
&= E\int_0^T \Psi^*(t)[b(t, x(t), E(x(t)), u(t)) - b(t, x^*(t), E(x^*(t)), u^*(t))]dt \\
&+ E\int_0^T \Psi^*(t)\mathcal{C}(t) d(\xi - \xi^*)(t),
\end{aligned}
\tag{4.7.7}
$$

elde edilir.

Benzer biçimde, ikinci terim Hamiltona bağlı ek denklemler (4.5.1)' e uygulanarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E\int_0^T \left(x(t) - x^*(t)\right) d\Psi^*(t) \\
&= E\int_0^T \left(x(t) - x^*(t)\right)[\mathbb{H}_x^*(t) + E(\mathbb{H}_{\widetilde{x}}^*(t))]dt \\
&= E\int_0^T \mathbb{H}_x^*(t)\left(x(t) - x^*(t)\right) dt + \int_0^T E(\mathbb{H}_{\widetilde{x}}^*(t))\left(E(x(t)) - E(x^*(t))\right)dt.
\end{aligned}
\tag{4.7.8}
$$

Standart argümanlar olarak,

$$
I_3 = E\int_0^T \sum_{j=1}^{d} Q^{j*}(t)[\sigma^j(t, x(t), E(x(t)), u(t)) - \sigma^j(t, x^*(t), E(x^*(t)), u^*(t))]dt, \tag{4.7.9}
$$

$$
I_4 = E\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} G^{j*}(t)[g^j(t, x(t), E(x(t)), u(t)) - g^j(t, x^*(t), E(x^*(t)), u^*(t))]dt, \tag{4.7.10}
$$

denklemeleri belirlenir.

Dualite ilişkisi (4.7.1) , ifade edilen (4.7.6) ve (4.7.7)∼(4.7.10) denklemlerinin birleşiminden elde edilir.

İkinci dualite ilişkisi (4.7.2) için, $K^*(t)\left[y^*(t) - y(t)\right]$ çarpımına kısmi integrasyon uygulanırsa, aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\begin{aligned}
&E\left(K^*(T)\left(y^*(T) - y(T)\right)\right) = E\left\{K^*(0)\left(y^*(0) - y(0)\right)\right\} \\
&\quad + E\int_0^T K^*(t)d\left(y(t) - y^*(t)\right) + E\int_0^T \left(y(t) - y^*(t)\right)dK^*(t) \\
&\quad + E\int_0^T \sum_{j=1}^d \left(z^j(t) - z^{j*}(t)\right)[\mathbb{H}_{z^j}^{j*}(t) + E(\mathbb{H}_{\widetilde{z}^j}^{j*}(t))]dt \\
&\quad + E\int_0^T \sum_{j=1}^\infty \left(q^j(t) - q^{j*}(t)\right)[\mathbb{H}_{q^j}^{j*}(t) + E(\mathbb{H}_{\widetilde{q}^j}^{j*}(t))]dt \\
&\quad = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_3 + \mathfrak{I}_4 + \mathfrak{I}_5.
\end{aligned} \tag{4.7.11}$$

Ek denklemler (4.3.1) dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_1 &= E\left\{K^*(0)\left(y^*(0) - y(0)\right)\right\} \\
&= -E\Big\{\left[\varphi_y\left(y(0), E\left(y(0)\right)\right) + E(\varphi_{\widetilde{y}}(y(0), E\left(y(0)\right)))\right]\left(y^*(0) - y(0)\right)\Big\},
\end{aligned} \tag{4.7.12}$$

ikinci terim $\mathfrak{I}_2$ için, (4.7.5) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_2 &= E\int_0^T K^*(t)d\left(y(t) - y^*(t)\right) \\
&= E\int_0^T K^*(t)[f(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t)) - f(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t))]dt \\
&\quad + E\int_{[0,T]} K^*(t)\mathcal{D}(t)d(\xi - \xi^*)(t),
\end{aligned} \tag{4.7.13}$$

eşitliği elde edilir.

Hamiltona bağlı ek denklemler (4.5.1) göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_3 &= E\int_0^T \left(y(t) - y^*(t)\right)dK^*(t) \\
&= E\int_0^T \left(y(t) - y^*(t)\right)(\mathbb{H}_y^*(t) + E(\mathbb{H}_{\widetilde{y}}^*(t)))dt,
\end{aligned} \tag{4.7.14}$$

$$\mathfrak{I}_4 = E\int_0^T \sum_{j=1}^d \left(z^j(t) - z^{j,*}(t)\right)[\mathbb{H}_{z^j}^{j*}(t) + E(\mathbb{H}_{\widetilde{z}^j}^{j*}(t))]dt, \tag{4.7.15}$$

$$\Im_5 = E\int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \left(q^j(t) - q^{j,*}(t)\right) [\mathbb{H}_{q^j}^{j*}(t) + E(\mathbb{H}_{\widetilde{q}^j}^{j*}(t))]dt, \tag{4.7.16}$$

denklemleri yazılır.

Dualite ilişkisi (4.7.2) , ifade edilen (4.7.11) ve (4.7.12)∼(4.7.16) denklemlerinin birleşiminden elde edilir. Sonuç olarak, (4.7.3) eşitliği, (4.7.1) ve (4.7.2) eşitliklerinin birleşiminden oluşur. □

Teorem 4.7.1 *(H1)-(H5) hipotezleri sağlansın. Eğer herhangi* $(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1 \times \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])$ *için aşağıdaki maksimallik ilişkisi sağlanırsa:*

$$\begin{aligned}
&E\left[\mathbb{H}_u(t, \psi^*(t), E(\psi^*(t)), u^*, \Psi^*(\cdot), Q^*(\cdot), G^*(\cdot), K^*(\cdot)) \mid \mathcal{G}_t\right] \\
&+E\left[\int_{[0,T]} (M(t) + \mathcal{C}(t)\Psi^*(t) + \mathcal{D}(t)K^*(t))d\xi^*(t) \mid \mathcal{G}_t\right] \\
&= 0,\ a.e.,\ t \in [0,T],
\end{aligned} \tag{4.7.17}$$

söylenebilir ki;

$$J(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) = \inf_{(u(\cdot),\xi(\cdot)) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1 \times \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])} J(u(\cdot), \xi(\cdot)), \tag{4.7.18}$$

eşitliği vardır. Bir başka değişle, kabul edilebilir kontrol $(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$ *(4.1.1)-(4.1.2) problemi için bir optimal kontroldür.*

İspat. $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), q(\cdot))$ çözüm takımı (4.1.1)' in çözümü ve $(\Psi(\cdot), Q(\cdot), G(\cdot), K(\cdot))$ dörtlüsü (4.3.1)' in $(u(\cdot), \xi(\cdot)) \in \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1 \times \mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])$ kontrol çiftine göre çözümleri olsun.

$$\begin{aligned}
&J(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot)) - J(u(\cdot), \xi(\cdot)) \\
&= E\Big\{ \textstyle\int_0^T [\ell(t, \psi^*(t), E(\psi^*(t)), u^*(t)) - \ell(t, \psi(t), E(\psi(t)), u(t))]dt \\
&+ [\phi(x^*(T), E(x^*(T))) - \phi(x(T), E(x(T)))] \\
&+ [\varphi(y^*(0), E(y^*(0))) - \varphi(y(0), E(y(0)))] \\
&+ \textstyle\int_{[0,T]} M(t)d(\xi^* - \xi)(t) \Big\}.
\end{aligned} \tag{4.7.19}$$

Hipotez (H5) doğrultusunda $\phi(\cdot,\cdot)$ ve $\varphi(\cdot,\cdot)$ üzerindeki konvekslik koşulu ile aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
&J(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot)) - J(u(\cdot),\xi(\cdot)) \leq E[(\phi_x(x^*(T),E(x^*(T))) \\
&+E(\phi_{\widetilde{x}}(x^*(T),E(x^*(T))))\,(x^*(T)-x(T))] \\
&+E\left[(\varphi_y\left(y^*(0),E\left(y^*(0)\right)\right)+\varphi_{\widetilde{y}}\left(y(0),E\left(y(0)\right)\right))\left(y^*(0)-y(0)\right)\right] \\
&= E\Big\{\int_0^T[\ell(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t))-\ell(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t))]dt \\
&+\int_{[0,T]} M(t)d\left(\xi^*-\xi\right)(t)\Big\}.
\end{aligned} \tag{4.7.20}$$

Lemma 4.7.1' in uygulanması ile,

$$\begin{aligned}
&J\left(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot)\right)-J\left(u(\cdot),\xi(\cdot)\right) \\
&\leq E\Big\{\int_0^T(\mathbb{H}(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t) \\
&-\mathbb{H}(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t)))\Big\}dt \\
&-E\int_0^T(\mathbb{H}_x^*(t)+E(\mathbb{H}_{\widetilde{x}}^*(t)))(x(t)-x^*(t))dt \\
&-E\int_0^T(\mathbb{H}_y^*(t)+E(\mathbb{H}_{\widetilde{y}}^*(t)))(y(t)-y^*(t))dt \\
&-E\int_0^T\sum_{j=1}^d(\mathbb{H}_{z^j}^{j*}(t)+E(\mathbb{H}_{\widetilde{z}^j}^{j*}(t)))(z^j(t)-z^{j*}(t)))dt \\
&-E\int_0^T\sum_{j=1}^d(\mathbb{H}_{q^j}^{j*}(t)+E(\mathbb{H}_{\widetilde{q}^j}^{j*}(t)))(q^j(t)-q^{j*}(t)))dt \\
&-E\int_0^T\mathbb{H}_u^*(t)(u(t)-u^*(t))dt \\
&+E\int_{[0,T]}\left[\Psi^*(t)\mathcal{C}(t)+K^*(t)\mathcal{D}(t)\right]d(\xi^*-\xi)(t)
\end{aligned} \tag{4.7.21}$$

eşitsiliğine ulaşılır.

Hipotez (H5) bilgisiyle, $\mathbb{H}(t,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(\cdot))$ Hamilton fonksiyelinin konveksliği ile birlikte, Clarke' ın genelleştirilmiş gradyanı anlamında aşağıdaki eşitsizlik sağlanır. Ayrıca, $(x,\widetilde{x},y,\widetilde{y},z,\widetilde{z},q,\widetilde{q},u)$ argümanlarına göre $\mathbb{H}(t,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))$ fonksiyelinin konkavlığı dikkate alındığında aynı eşitsizliğin sağlandığı görülür:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))\\
&-\mathbb{H}(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))\\
&\geq \mathbb{H}^*_x(t)(x(t)-x^*(t))+E(\mathbb{H}^*_{\widetilde{x}}(t))(E(x(t)-x^*(t)))+\mathbb{H}^*_y(t)(y(t)-y^*(t))\\
&+E(\mathbb{H}^*_{\widetilde{y}}(t))(E(y(t)-y^*(t)))+\textstyle\sum_{j=1}^d \mathbb{H}^{j*}_{z^j}(t)(z^j(t)-z^{j*}(t)))\\
&+\textstyle\sum_{j=1}^d E(\mathbb{H}^{j*}_{\widetilde{z}^j}(t))(E(z^j(t)-z^{*,j}(t)))+\sum_{j=1}^\infty \mathbb{H}^{j*}_{q^j}(t)(q^j(t)-q^{j*}(t)))\\
&+\textstyle\sum_{j=1}^\infty E(\mathbb{H}^{j*}_{\widetilde{q}^j}(t))(E(q^j(t)-q^{j*}(t)))+\mathbb{H}^*_u(t)(u(t)-u^*(t)).
\end{aligned}$$

Bu eşitsizlik t ye göre integrallenir ve beklenen değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}
&E\textstyle\int_0^T[\mathbb{H}(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))\\
&-\mathbb{H}(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))]dt\\
&\geq E\textstyle\int_0^T\Big\{\mathbb{H}^*_x(t)(x(t)-x^*(t))+E(\mathbb{H}^*_{\widetilde{x}}(t))(E(x(t)-x^*(t)))+\mathbb{H}^*_y(t)(y(t)-y^*(t))\\
&+E(\mathbb{H}^*_{\widetilde{y}}(t))(E(y(t)-y^*(t)))+\textstyle\sum_{j=1}^d \mathbb{H}^{*,j}_{z^j}(t)(z^j(t)-z^{j*}(t)))\\
&+\textstyle\sum_{j=1}^d E(\mathbb{H}^{j*}_{\widetilde{z}^j}(t))(E(z^j(t)-z^{*,j}(t)))+\sum_{j=1}^\infty \mathbb{H}^{j*}_{q^j}(t)(q^j(t)-q^{j*}(t)))\\
&+\textstyle\sum_{j=1}^\infty E(\mathbb{H}^{j*}_{\widetilde{q}^j}(t))(E(q^j(t)-q^{j*}(t)))+\mathbb{H}^*_u(t)(u(t)-u^*(t))\Big\}dt
\end{aligned} \tag{4.7.22}$$

eşitsizliği elde edilir. Koşullu beklenen değer (conditional expectation):

$$E\left[\mathbb{H}_u(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))\mid \mathcal{G}_t\right],$$

ve $u(\cdot)$ ile $u^*(\cdot)$ $\mathcal{G}_t-$ölçümlü olduğundan dolayı, aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
&E\left[\mathbb{H}_u(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))\mid \mathcal{G}_t\right](u(t)-u^*(t))\\
&=\left[\mathbb{H}_u(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))(u(t)-u^*(t))\mid \mathcal{G}_t\right].
\end{aligned} \tag{4.7.23}$$

(4.7.22) ve (4.7.23) de belirtilen koşullar kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^T [\mathbb{H}(t,\psi^*(t),E(\psi^*(t)),u^*(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))\\
&-\mathbb{H}(t,\psi(t),E(\psi(t)),u(t),\Psi^*(t),Q^*(t),G^*(t),K^*(t))]dt\\
&-E\int_0^T \Big\{[\mathbb{H}_x^*(t)+E(\mathbb{H}_{\widetilde{x}}^*(t))](x^*(t)-x(t))+[\mathbb{H}_y^*(t)+E(\mathbb{H}_{\widetilde{y}}^*(t))](y^*(t)-y(t))\\
&+\sum_{j=1}^d[\mathbb{H}_{z^j}^{j*}(t)+E(\mathbb{H}_{\widetilde{z}^j}^{j*}(t)))(z^{j*}(t)-z^j(t)))+\sum_{j=1}^\infty[\mathbb{H}_{q^j}^{j*}(t)\\
&+E(\mathbb{H}_{\widetilde{q}^j}^{j*}(t))](q^{j*}(t)-q^j(t)))+\mathbb{H}_u^*(t)(u^*(t)-u(t))\Big\}dt\leq 0,
\end{aligned}
\tag{4.7.24}
$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Böylelikle; (4.7.17), (4.7.21) ve (4.7.24) den sonra herhangi singüler kontrol $(u(\cdot),\xi(\cdot))\in\mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1\times\mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])$ için, aşağıdaki eşitsizlik kuvvetle elde edilir:

$$J\left(u^*(\cdot),\xi^*(\cdot)\right)-J(u(\cdot),\xi(\cdot))\leq 0.$$

Sonuç olarak, $(u(\cdot),\xi(\cdot))$ ikilisi $\mathcal{U}_{\mathcal{G}}^1\times\mathcal{U}_{\mathcal{G}}^2([0,T])$ kümesinin keyfi kabul edilebilir (admissible) kontrol çifti olduğundan arzu edilen sonuç (4.7.18) gerçekleşmiş olur. Bu sonuçla ispat tamamlanır. □

4.8 Uygulama: Ortalama-Varyans Portfolyo Seçim Problemi

Ortalama-varyans portfolyö seçim problemi (Markowitz, 1952) tarafından ileri sürülen zaman-tutarsız bir kontrol problemidir. Bu anlamda, Belmann' ın optimallik prensibini sağlamaz ve bu yüzden klasik dinamik programlama yaklaşımı ile çözülemez. Bu alt bölümde, singüler kontrol içeren Gamma prosesleriyle bağlantılı Teugels martingallere dayalı ortalama-varyans portfolyo seçim problemine; *Teorem 4.6.1* ve *Teorem 4.7.1* de elde edilen optimumluğun gereklilik ve yeterlilik maksimum prensibleri uygulanacaktır.

$\mathcal{G}_t$, $t\geq 0$ olmak üzere, $\mathcal{F}_t$ filtrasyonunun alt filtrasyonu olsun. Örneğin, $\mathcal{G}_t$ $\gamma-$erteleme enformasyonu $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_{(t-\gamma)^+}:t\geq 0,$ olarak tanımlanabilir. Burada, γ verilen bir erteleme sabitidir.

Farzedelim ki; iki yatırım imkanı içeren bir matematik marketi olsun:

(i) İlk yatırım aracı risksiz-menkul kıymet (*Bono*) olmak üzere, değeri $S_0(t)$ olup aşağıdaki adi diferansiyel denklemle ifade edilsin:

$$dS_0\left(t\right) = S_0\left(t\right)\rho(t)dt,\ t \in \left[0, T\right],\ S_0\left(0\right) > 0. \tag{4.8.1}$$

Burada, $\rho\left(\cdot\right) : [0, T] \to I\!R_+$ yerel sınırlı, sürekli bir deterministik fonksiyondur.

(ii) İkinci yatırım aracı riskli-menkul kıymet (*Hisse Senedi)* olmak üzere, t zamanındaki değeri $S_1\left(t\right)$ olup, aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemle ifade edilsin:

$$dS_1\left(t\right) = \tau(t)S_1\left(t\right)dt + \pi(t)S_1\left(t\right)dW(t) + \sum_{j=1}^{\infty} G^j(t)H^j(t),\ S_1\left(0\right) > 0, \tag{4.8.2}$$

Burada, $H^j(t)$, Lévy prosesleri gibi *Gamma prosesleri* ile bağlantılı ortogonal Teugels martingallerdir. Lévy ölçümü:

$$\mu(dx) = \frac{e^{-x}}{x} I_{\{x>0\}}dx$$

eşitliği ile verilir. $X^j(t) = \sum_{0\leq s\leq t}\left(\triangle X(s)\right)^j : j \geq 1$; X' in kuvvet sıçrama prosesleridir. (Bertoin, 1996)' da ispat edilen *eksponansiyel formülü*' ne uygulanarak,

$$E\left(\exp(i\theta X^j(t))\right) = \exp\left(t\int_0^{+\infty}(\exp(j\theta z) - 1)\frac{\exp(-z^{\frac{1}{j}})}{jz}dz\right),$$

şeklinde ifade edilmiştir. X^j nin Lévy ölçümü: $\frac{\exp(-z^{\frac{1}{j}})}{jz}dz$ olarak verilmiştir. Bununla beraber;

$$\begin{aligned} E\left(X^j(t)\right) &= E\left[\sum_{0\leq s\leq t}\left(\triangle X(s)\right)^j\right] = t\int_0^{+\infty} x^j\frac{e^{-x}}{x}dx : j \geq 1, \\ &= t\Gamma(j) = (j-1)!t : j \geq 1, \end{aligned} \tag{4.8.3}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca, $\widehat{X}^j(t) = X^j(t) - (j-1)!t : j \geq 1$ ifadesi, Gamma proseslerinin mertebesi j olan Teugels martingallerini gösterir. Martingallerin kümesi

$\left\{\widehat{X}^j(\cdot) : j \geq 1\right\}$ ortogonalleştirilirse, (Littlejohn, 1986) Teugels martingallerin ortogonal bir kümesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H^i(t) = \sum_{1 \leq j \leq i-1} a_{ij} \widehat{X}^j(t) : i \geq 1. \tag{4.8.4}$$

Varsayımlar:

Her $t \in [0,T]$ için $S_1(t) > 0$ şartının sağlanabilmesi için,

(1) $\tau(\cdot) : [0,T] \to I\!R$, $\pi(\cdot) : [0,T] \to I\!R$ fonksiyonları sınırlı sürekli deterministik dönüşümler olmak üzere, $\tau(t), \pi(t) \neq 0$ ve $\tau(t) - \rho(t) > 0,\ \forall t \in [0,T]$ şartlarını taşımalıdır.

(2) Herhangi t için, $t \in [0,T] : G(t) > 0.$

Başlangıç değeri $x^{u,\xi}(0) = a > 0$ ve $A \geq 0$ olsun. (4.8.1) ve (4.8.2) denklemlerinin birleştirilmesiyle aşağıdaki varlık dinamikleri elde edilir:

$$\begin{cases} dx^{u,\xi}(t) = \left[\rho(t)x^{u,\xi}(t) + (\tau(t) - \rho(t))u(t)\right] dt + \pi(t)u(t)dW(t) \\ \qquad\qquad + \sum_{j=1}^{\infty} g^j(t)H^j(t) + Ad\xi(t), \\ -dy^{u,\xi}(t) = \left[\rho(t)x^{u,\xi}(t) + (\tau(t) - \rho(t))u(t) - \alpha y^{u,\xi}(t)\right] dt - z^{u,\xi}(t)dW(t) \\ \qquad\qquad - \sum_{j=1}^{\infty} q^{u,\xi,j}(t)H^j(t) + \beta d\xi(t), \\ x^{u,\xi}(0) = a, \quad y^{u,\xi}(T) = x^{u,\xi}(T), \\ H^i(t) = \sum_{1 \leq j \leq i-1} a_{ij}(X^j(t) - (j-1)!t) : j \geq 1, i \geq 1. \end{cases} \tag{4.8.5}$$

Ayrıca, herhangi kabul edilebilir kontrol $(u(\cdot), \xi(\cdot))$ için fonksiyonel aşağıdaki gibidir:

$$J\left(u(\cdot), \xi(\cdot)\right) = \frac{\delta}{2} Var(x^{u,\xi}(T)) - E(x^{u,\xi}(T)) + y^{u,\xi}(0) + E\int_{[0,T]} M(t)d\xi(t). \tag{4.8.6}$$

Bu varyans gösterimi bir başka şekilde şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned} J\left(u(\cdot), \xi(\cdot)\right) &= E\left[\frac{\delta}{2}x^{u,\xi}(T)^2 - x^{u,\xi}(T)\right] - \frac{\delta}{2}\left[E(x^{u,\xi}(T))\right]^2 \\ &+ y^{u,\xi}(0) + E\int_{[0,T]} M(t)d\xi(t). \end{aligned} \tag{4.8.7}$$

Burada, singüler kontrolün kullanımı için $M(\cdot)$ fonksiyonu maliyet oranı olarak yorumlanabilir. $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ kümesi, $I\!R \times I\!R$' nin kompakt konveks bir alt kümesi olsun. $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ de değer alan kabul edilebilir $\mathcal{G}_t-$öngörülebilir portfolyo stratejileri $\left(u\left(\cdot\right), \xi(\cdot)\right)$' nin kümesi $\mathcal{U}^1_{\mathcal{G}} \times \mathcal{U}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$ olarak ifade edilsin.

Bu durumda, karma yapıya ve rekürsif bir fonksiyonele sahip ortalama-varyans portfolyö seçim probleminin zaman-tutarsız çözümleri; (4.8.5)-(4.8.7) denklemlerinin Hamilton ve ek prosesleri hazırlanarak araştırılır. İlk olarak Hamilton fonksiyoneli (4.4.2) aşağıdaki formda yazılır:

$$\begin{aligned} &\mathbb{H}\left(t, x, \widetilde{x}, y, \widetilde{y}, z, \widetilde{z}, q, \widetilde{q}, u, \Psi(\cdot), Q(\cdot), G(\cdot), K(\cdot)\right) \\ &= \left[\rho(t)x(t) + (\tau(t) - \rho(t))u(t)\right]\left(\Psi(t) + K(t)\right) \\ &+ \pi(t)u(t)Q(t) - \alpha K(t)y(t) + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} G^j(t)g^j\left(t\right) \end{aligned}$$

Maksimum koşulu ((4.7.17), *Teorem 4.7.1),* dikkate alınarak ve $(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$ optimal olduğundan,

$$E\left[(\tau(t) - \rho(t))\left(\Psi^*(t) + K^*(t)\right) + \pi(t)Q^*(t) \mid \mathcal{G}_t\right] = 0 \tag{4.8.8}$$

eşitliği hemen yazılabilir.

Ek denklemler (4.3.1) bu durumda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{cases} d\Psi^*(t) = -\rho(t)\left(K^*(t) + \Psi^*(t)\right)dt + Q^*(t)dW(t) + \sum_{j=1}^{\infty} G^{*,j}(t)dH^j(t), \\ \Psi^*(T) = \delta\left(x^*(T) + E(x^*(T))\right) - 1 - K^*(T), \\ dK^*(t) = -\alpha K^*(t)dt,\ K^*(0) = -1,\ t \in [0,T]\,. \end{cases} \tag{4.8.9}$$

Üstteki (4.8.9) sisteminin çözülebilmesi ve optimal portfolyö stratejisinin

$(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$ bulunabilmesi için $\Psi^*(\cdot)$ aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\Psi^*(t) = \mathcal{E}_1(t)x^*(t) + \mathcal{E}_2(t)E\left(x^*(t)\right) + \mathcal{E}_3(t),\ t \in [0, T]\,. \qquad (4.8.10)$$

Burada, $\mathcal{E}_1(\cdot), \mathcal{E}_2(\cdot)$ and $\mathcal{E}_3(\cdot)$ deterministik diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Kabul prosedürü için (Hafayed and Abbas, 2014; Li, 2012; Andersson and Djehiche, 2011) bakılabilir. (4.8.9) daki son denklemin (adi diferansiyel denklem) çözümü;

$$K^*(t) = -\exp\left(-\alpha t\right) \quad t \in [0, T] \qquad (4.8.11)$$

şeklinde yazılır. Varlık dinamikleri (4.8.5) göz önüne alındığında,

$$d(E(x^*(t)) = \left\{\rho(t)E(x^*(t)) + (\tau(t) - \rho(t))E(u^*(t))\right\}dt \qquad (4.8.12)$$

ifadesi kolaylıkla yazılabilir.

SDEs-(4.8.5) göz önünde tutularak, Itô formülü (4.8.10)' a uygulanırsa aşağıdaki denkleme ulaşılır:

$$\begin{aligned}
d\Psi^*(t) &= \mathcal{E}_1(t)[[\rho(t)x^*(t) + (\tau(t) - \rho(t))u^*(t)]dt \\
&+ \pi(t)u^*(t)dW(t) + \sum_{j=1}^{\infty} g^j(t)dH^j(t)] \\
&+ x^*(t)\mathcal{E}_1'(t)dt + \mathcal{E}_2(t)[\rho(t)E(x^*(t)) + (\tau(t) - \rho(t))E(u^*(t))]dt \\
&+ E(x^*(t))\mathcal{E}_2'(t)dt + \mathcal{E}_3'(t)dt.
\end{aligned}$$

Bu denklem daha açıkça ifade edilirse;

$$\begin{cases}
d\Psi^*(t) = \{\mathcal{E}_1(t)\left[\rho(t)x^*(t) + (\tau(t) - \rho(t))\,u^*(t)\right] + x^*(t)\mathcal{E}_1'(t) \\
\qquad + \mathcal{E}_2(t)\left[\rho(t)E(x^*(t)) + (\tau(t) - \rho(t))E(u^*(t))\right] \\
\qquad + \mathcal{E}_2'(t)E\left(x^*(t)\right) + \mathcal{E}_3'(t)\}\,dt \\
\qquad + \mathcal{E}_1(t)\pi(t)u^*(t)dW(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{E}_1(t)g^j(t)H^j(t), \\
\Psi^*(T) = \mathcal{E}_1(T)x^*(T) + \mathcal{E}_2(T)E\left(x^*(T)\right) + \mathcal{E}_3(T),
\end{cases} \qquad (4.8.13)$$

olarak yazılabilir. Burada, $\mathcal{E}_1'(t), \mathcal{E}_2'(t)$ ve $\mathcal{E}_3'(t)$ ifadeleri t' ye göre türevleri gösteren deterministik fonksiyonlardır.

(4.8.13) ve (4.8.9) denklemlerinin karşılaştırılmasıyla,

$$-\rho(t)\left(K^*(t)+\Psi^*(t)\right)=\mathcal{E}_1(t)\left[\rho(t)x^*(t)+(\tau(t)-\rho(t))u^*(t)\right]+x^*(t)\mathcal{E}_1'(t)$$
$$+\mathcal{E}_2(t)\left[\rho(t)E(x^*(t))+(\tau(t)-\rho(t))E(u^*(t))\right]+\mathcal{E}_2'(t)E\left(x^*(t)\right)+\mathcal{E}_3'(t), \tag{4.8.14}$$

$$Q^*(t) = \mathcal{E}_1(t)\pi(t)u^*(t) \tag{4.8.15}$$
$$G^*(t) = \mathcal{E}_1(t)g(t) \tag{4.8.16}$$

eşitlikleri bulunur.

Proses $\Psi^*(t)$' nin (4.8.13)' deki final koşuluna bakıldığında,

$$\mathcal{E}_1(T)=\delta,\ \mathcal{E}_2(T)=-\delta,\ \mathcal{E}_3(T)=-1-K^*(T) \tag{4.8.17}$$

fonksiyon değerleri yazılabilir. (4.8.14) ve (4.8.10) denklemlerinin birleşiminden $\mathcal{E}_1(\cdot),\mathcal{E}_2(\cdot)$ ve $\mathcal{E}_3(\cdot)$' ün aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağladıkları sonucu çıkarılabilir:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_1'(t)=-2\rho(t)\mathcal{E}_1(t),\ \ \mathcal{E}_1(T)=\delta, \\ \mathcal{E}_2'(t)=-2\rho(t)\mathcal{E}_2(t),\ \ \mathcal{E}_2(T)=-\delta, \\ \mathcal{E}_3'(t)+\rho(t)\mathcal{E}_3(t)=\rho(t)\exp\left\{-\alpha t\right\},\ \ \mathcal{E}_3(T)=\exp\left\{-\alpha T\right\}-1. \end{cases} \tag{4.8.18}$$

Üstteki (4.8.18) denklemlerinin ilk ikisinin çözümünden,

$$\mathcal{E}_1(t)=-\mathcal{E}_2(t)=\delta\exp\left\{2\int_t^T\rho(s)ds\right\} \tag{4.8.19}$$

fonksiyonları elde edilir. Daha sonra, üçüncü denkleme integral çarpan metodu uygulanarak,

$$\mathcal{E}_3(t)=\left(\chi(t)\right)^{-1}\left[\exp\left(-\alpha T\right)-1-\int_t^T\chi(s)\rho(s)\exp\left\{-\alpha s\right\}ds\right] \tag{4.8.20}$$

fonksiyonu elde edilir. Buradaki integral çarpanı; $\chi(t)=\exp(\int_t^T\rho(s)ds)$ olmak üzere, $\chi(T) = 1$ alınmıştır. (4.8.8), (4.8.11), (4.8.15) ve (4.8.16) denklemlerinin ortak çözümünden,

$$u^*(t) = (\rho(t) - \tau(t)) \frac{\mathcal{E}_1(t)\,(x^*(t) - E(x^*(t))) + \mathcal{E}_3(t) - \exp(-\alpha t)}{\mathcal{E}_1(t)\pi^2(t)} \tag{4.8.21}$$

ve beklenen değeri,

$$E(u^*(t)) = \frac{(\rho(t) - \tau(t))\,[\mathcal{E}_3(t) - \exp\{-\alpha t\}]}{\mathcal{E}_1(t)\pi^2(t)} \tag{4.8.22}$$

elde edilir. Singüler kontrol $\xi^*(\cdot)$, maksimum şartı (4.7.17)' yi sağlasın. Herhangi $\eta(\cdot) \in \mathcal{U}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$ için,

$$E\int_{[0,T]} (A\Psi^*(t) + \beta K^*(t) + M(t)) d(\eta - \xi^*)(t) \geq 0,$$

eşitsizliği vardır. Burada, $(\Psi^*(t), K^*(t))$ optimal control $u^*(\cdot)$' a göre ek proseslerdir. Aşağıdaki küme tanımlansın:

$$B = \{(w,t) \in \Omega \times [0,T] : A\Psi^*(t) + \beta K^*(t) + M(t) > 0\}, \tag{4.8.23}$$

ve $\eta(\cdot) \in \mathcal{U}^2_{\mathcal{G}}([0,T])$ olmak üzere,

$$d\eta(t) = \begin{cases} 0 : \text{if } A\Psi^*(t) + \beta K^*(t) + M(t) > 0, \\ d\xi^*(t) : \text{if } A\Psi^*(t) + \beta K^*(t) + M(t) \leq 0. \end{cases} \tag{4.8.24}$$

eşitsizlik koşulları yazılabilir. Açıktır ki;

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\int_{[0,T]} (A\Psi^*(t) + \beta K^*(t) + M(t)) d(\eta - \xi^*)(t) \\ &= -E\int_{[0,T]} (A\Psi^*(t) + \beta K^*(t) + M(t)) I_B(t,w) d\xi^*(t). \end{aligned}$$

Bu durumda, herhangi $t \in [0,T]$ için, $\xi^*(\cdot)$ aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$E\int_{[0,T]} (A\Psi^*(t) + \beta K^*(t) + M(t)) I_B(t,w) d\xi^*(t) = 0.$$

(4.8.23) ve (4.8.24) tanımlamalarından, optimal singüler kontrol $\xi^*(\cdot)$' ın açık formu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\xi^*(t) = \eta(t) + \int_0^t I_{\{(w,s)\in\Omega\times[0,T]:\, A\Psi^*(s)+\beta K^*(s)+M(s)\leq 0\}}(s,w)ds.$$

Böylelikle, optimal portfolyo seçim stratejesi $x^*(\cdot)$ ve $E(x^*(\cdot))$ verilerini içerecek biçimde geri bildirim formunda açıkça ifade edildi.

$\mathcal{F}_t$ filtrasyonunun alt filtrasyonu $\mathcal{G}_t$ olsun. Ortalama-varyans portfolyö seçim problemi (4.8.5)-(4.8.7)' nin kısmi enformasyon optimal portfolyö stratejileri $(u^*(\cdot), \xi^*(\cdot))$ olmak üzere, durum geri bildirim formları aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{cases} u^*(t,x^*,\widetilde{x}^*) = E\left[(\rho(t)-\tau(t))\frac{\mathcal{E}_1(t)(x^*(t)-E(x^*(t)))+\mathcal{E}_3(t)-\exp(-\alpha t)}{\mathcal{E}_1(t)\pi^2(t)} \mid \mathcal{G}_t\right], \\ \\ \xi^*(t) = \eta(t) + \int_0^t I_{\{(w,s)\in\Omega\times[0,T]:\, A\Psi^*(s)+\beta K^*(s)+M(s)\leq 0\}}(s,w)ds, \\ \\ E(u^*(t,x^*,\widetilde{x}^*)) = (\rho(t)-\tau(t))\frac{\mathcal{E}_3(t)-\exp\{-\alpha t\}}{\mathcal{E}_1(t)\pi^2(t)}. \end{cases}$$

4.9 Sonuçlar

Bu bölümde, Lévy proseslerine bağlı Teugels martingaller tarafından yönlendirilen orta-alan FBSDEs için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Sistemin gereklilik ve yeterlilik koşulları optimal singüler kontrol için Pontryagin maksimum prensibi formunda ifade edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçlar bir Lévy prosesi olan Gama prosesine bağlı Teugels martingalleri ile yönlendirilen ortalama-varyans portfolyö seçim problemine uygulanmıştır.

5. GENEL MCKEAN-VLASOV TİPİ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN OPTİMAL SİNGÜLER KONTROLÜ İÇİN GEREKLİLİK VE YETERLİLİK KOŞULLARI

Bu bölümde, genel kontrollü lineer olmayan McKean-Vlasov tipi stokastik diferansiyel denklemlerin (McV-SDEs) yönettiği sistemlerde genel optimal stokastik singüler kontrol problemi için gereklilik ve yeterlilik koşulları konveks perturbasyon metodu kullanılarak elde edilecektir. Stokastik diferansiyel denklemin yapısında yer alan katsayılar, durum prosesine ve bu prosesin marjinal kaidesi ile tanım kümesi konveks olan sürekli bir kontrol değişkenine bağlıdır. Ele alınan stokastik problemde kontrol değişkeni iki bileşenli olup birincisi kesinlikle sürekli (absolutely continuous), diğeri parçalı sürekli singüler kontroldür.

Bu çalışmayı önceki yayınlardan ayıran iki temel özelliği vardır. Birincisi; McKean-Vlasov sisteminde katsayılar durum prosesine ve bu prosese göre olasılık ölçümüne bağlıdır. Bu tip sistemler matematiksel finans için birçok uygulama alanı sunmaktadır. İkincisi ise gereklilik ve yeterlilik maksimum prensibinin ispatında türevlerin olasılık ölçümüne ve uygun Itô formülüne göre kullanılmasıdır.

Optimalliğin gereklilik ve yeterlilik maksimum prensibi koşullarını bir uygulama üzerinde göstermek amacıyla, Markowitz' in ortalama-varyans portfolyö seçim problemi ele alınacak ve geri bildirim formundaki optimal portfolyö seçim stratejisi açık ifadesiyle elde edilecektir.

5.1 McV-SDEs Kontrol Probleminin Formülasyonu

Bu çalışmada ele alınan, genel kontrollü lineer olmayan (McV-SDEs) için optimal singüler kontrol problemi aşağıdaki formda ifade edilir: $t \in [0, T]$

$$\begin{cases} dx^{u,\eta}(t) = f(t, x^{u,\eta}(t), \mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)}, u(t))dt \\ \qquad\qquad + \sigma(t, x^{u,\eta}(t), \mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)}, u(t))dW(t) + M(t)d\eta(t), \\ x^{u,\eta}(0) = x_0. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Burada, $W(\cdot)$ bir boyutlu Brown hareketi olup $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tam olasılık uzayı üzerinde tanımlıdır. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ rastgele değişken X' in olasılık kaidesi (probability law), $\eta(\cdot)$ sınırlı varyasyona sahip artan bir proses ve $\eta(0_-) = 0$ olmak üzere, sağdan sürekli ve soldan limitlidir. Aşağıdaki dönüşümlerin herbiri deterministik fonksiyonlardır:

$f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times Q_2\left(\mathbb{R}^d\right) \times \mathbb{U}_1 \to \mathbb{R},$
$\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \times Q_2\left(\mathbb{R}^d\right) \times \mathbb{U}_1 \to \mathbb{R},^{d\times m}$
$M(\cdot) : [0, T] \to \mathbb{R}.$

$Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$: $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ üzerinde tüm olasılık ölçümleri - μ nün uzayı olmak üzere, sonlu ikinci momentleri; $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2\mu(dx) < \infty$ ve $\mu, \nu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$ için aşağıdaki *2-Wasserstein metriği* ile donatılmıştır.

$$\mathbb{W}_2(\mu, \nu) = \inf\{[\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^2\rho(dx, dy)]^{\frac{1}{2}} : \rho \in Q_2(\mathbb{R}^{2d}), \rho(\cdot, \mathbb{R}^d) = \mu, \rho(\mathbb{R}^d, \cdot) = \nu\}. \tag{5.1.2}$$

McKean-Vlasov stokastik sisteminin (5.1.1) genel tipte olduğu göz önünde tutulursa, katsayıların $\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)}$ çözümü yasasına bağımlılığının, olasılık ölçütleri uzayının bir elemanı olarak gerçekten lineer olmayabileceğine dikkat edilmelidir.

Kabul edilebilir kontrollerin sınıfında yer alan ve minimalleştirilen beklenen maliyet (expected cost) McKean-Vlasov tipinde olup aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} J(u(\cdot),\eta(\cdot)) &= E[\int_0^T g(t,x^{u,\eta}(t),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)},u(t))dt \\ &+ \psi(x^{u,\eta}(T),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(T)})+\int_{[0,T]}\ell(t)d\eta(t)]. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Burada, $g:[0,T]\times\mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R})\times\mathbb{U}_1\to\mathbb{R}$, $\psi:\mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ ve $\ell(\cdot):[0,T]\to[0,\infty)$ deterministik fonksiyonlardır. Kontrolün amacı; uyarlanmış (adapted) prosesin performans fonksiyonelini (5.1.3) minimize edecek bir $(u^*(\cdot),\eta^*(\cdot))$ ikilisi elde etmektir. Herhangi kabul edilebilir kontrol çifti $(u^*(\cdot),\eta^*(\cdot))$ aşağıdaki eşitliği sağlarsa optimal kontrol olarak adlandırılır:

$$J(u^*(\cdot),\eta^*(\cdot))=\min_{(u(\cdot),\eta(\cdot))\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2} J(u(\cdot),\eta(\cdot)), \tag{5.1.4}$$

$\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^d)$: Hilbert uzayı, $x,y\in\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^d)$ olmak üzere; iç carpım $(x\cdot y)_2=E[x\cdot y]$ ve norm $\|x\|_2=[(x\cdot y)_2]^{\frac{1}{2}}$ olarak tanımlanır. İkili çarpım $\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^d)$ uzayında $\langle.\cdot.\rangle$ olarak gösterilir.

$\mathbb{L}^p_{\mathcal{F}}([0,T],\mathbb{R}^d)$: $[0,T]$ üzerinde $\mathbb{R}^d-$değerli, $\mathcal{F}-$uyarlı tüm $X(\cdot)$ proseslerinin kümesi olmak üzere; $\|X\|_p=E\left[\int_0^T|X(t)|^p\,dt\right]^{\frac{1}{p}}<\infty$.

Bölümün temel argümanı olasılık ölçümlerine göre diferansiyelenebilme olduğu için $\mu\in Q_2(\mathbb{R}^d)$ olacak şekilde rastgele değişken $Z\in\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^d)$ ile birlikte $\mu=\mathbb{P}_Z$ formunda bir dağılım tanımlanacaktır. Yani, her $\mu\in Q_2(\mathbb{R}^d)$ için yeterince zengin olasılık uzayı $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ üzerinde $\mu=\mathbb{P}_Z$ eşitliğini sağlayacak bir rastgele değişken $Z\in\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^d)$ vardır. (Örneğin, $([0,1],\mathbb{B}[0,1],dx)$ olasılık uzayı, dx *Borel ölçümü*, ile bu özelliği sağlar.)

McKean-Vlasov stokastik singüler kontrol problemi için aşağıdaki tanımlamalar geçerlidir:

$T>0$ pozitif reel sayısı için $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sabit olasılık uzayı $d-$ boyutlu Brown hareketi $W(t)=\{W(t):0\leq t\leq T\}$ ve $W(0)=0$ olmak üzere alışılmış koşulları (usual conditions) sağlar. Alt-$\sigma-$cebri $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}$ olmak üzere, $W(\cdot)$ Brown hareketi $\mathcal{F}_0$ dan bağımsızdır ve $\mathcal{F}_0$ yeteri kadar zengindir. Yani, $Q_2(\mathbb{R}^d)=\left\{\mathbb{P}_Z : Z\in\mathbb{L}^2(\mathcal{F}_0,\mathbb{R}^d)\right\}$.

$\mathcal{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ filtrasyonu $W(\cdot)$, ile üretimiş ve $\mathcal{F}_0$ ile arttırılmış ve tamlanmıştır.

Ayrıca, herhangi $f : Q_2\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\widetilde{f} : \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$ olacak şekilde bir

$$\widetilde{f}(Z) := f(\mathbb{P}_Z), \; Z \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d\right) \tag{5.1.5}$$

fonksiyonu tanımlıdır. Burada, $\widetilde{f}$ fonksiyonu f nin *lift* fonksiyonudur ve $Z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ nin olasılık yasasına bağlı olup Z nin seçiminden bağımsızdır (Buckdahn et al., 2016).

Tanım 5.1.1 Eğer $Z_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ var ise $f : Q_2\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu_0 \in Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ de $\mu_0 = \mathbb{P}_{Z_0}$ eşitliği ile diferansiyellenebilirdir. Bu fonksiyonun lift' i $\widetilde{f}$ olmak üzere, Z_0 noktasında *Fréchet* anlamında diferansiyellenebilirdir. Daha açık ifadeyle, $\mathbf{D}\widetilde{f}(Z_0) : \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ lineer ve sürekli fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(Z_0 + \xi) - \widetilde{f}(Z_0) &= \left\langle \mathbf{D}\widetilde{f}(Z_0) \cdot \xi \right\rangle + O\left(\|\xi\|_2\right) \\ &= \mathbf{D}_\xi f(\mu_0) + O\left(\|\xi\|_2\right). \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Burada, $\langle . \cdot . \rangle$ gösterimi $\mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ üzerindeki dual çarpımı ifade eder. Aynı zamanda $\mathbf{D}_\xi f(\mu_0)$ notasyonu f nin μ_0 da ξ yönündeki *Fréchet-türevi* anlamındadır. Bu durumda;

$$\mathbf{D}_\xi f(\mu_0) = \left\langle \mathbf{D}\widetilde{f}(Z_0) \cdot \xi \right\rangle = \frac{d}{dt}\widetilde{f}(Z_0 + t\xi)\bigg|_{t=0}, \;\; \mu_0 = \mathbb{P}_{Z_0}. \tag{5.1.7}$$

Riesz Teoremi uygulanarak, tek (unique) rastgele değişken $\Theta_0 \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ olmak üzere,

$$\left\langle \mathbf{D}\widetilde{f}(Z_0) \cdot \xi \right\rangle = (\Theta_0 \cdot \xi)_2 = E\left[(\Theta_0 \cdot \xi)_2\right] \tag{5.1.8}$$

eşitliği yazılabilir. Burada, $\xi \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$. Bir Borel fonksiyonu $h[\mu_0] : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, özel Z_0 gösteriminden farklı olarak sadece $\mu_0 = \mathbb{P}_{Z_0}$ olasılık yasasına bağlıdır (Buckdahn et al., 2016 ; Carnoma et al., 2013):

$$\Theta_0 = h[\mu_0](Z_0). \tag{5.1.9}$$

Böylece, (5.1.6) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f(\mathbb{P}_Z) - f(\mathbb{P}_{Z_0}) = (h[\mu_0](Z_0) \cdot Z - Z_0)_2 + O(\|Z - Z_0\|_2), \ \forall Z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d).$$

Ayrıca, aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir:

$$\begin{aligned} \partial_\mu f(\mathbb{P}_{Z_0}, x) &= h[\mu_0](x), \ x \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{D}\widetilde{f}(Z_0) &= \Theta_0 = h[\mu_0](Z_0) = \partial_\mu f(\mathbb{P}_{Z_0}, Z_0), \\ \mathbf{D}_\xi f(\mathbb{P}_{Z_0}) &= \langle \partial_\mu f(\mathbb{P}_{Z_0}, Z_0) \cdot \xi \rangle, \ \xi = Z - Z_0. \end{aligned}$$

Not 5.1.1 Herbir $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$ ve $\partial_\mu f(\mathbb{P}_Z, \cdot) = h[\mathbb{P}_Z]\ \mu = \mathbb{P}_Z(\cdot)$ olmak üzere, sadece $\mathbb{P}_Z(dx) - a.e$ içinde tanımlıdır.

Orta-alan teorisinde oldukça önemli olan olasılık ölçümlerine göre diferansiyellenebilirlik kavramı (Buckdahn et al., 2014; Carnoma et al., 2013) te sunulan yaklaşımlar göz önünde bulundurularak incelenecektir.

Tanım 5.1.2 (*Diferansiyellenebilen fonksiyonlar uzayı:* $Q_2(\mathbb{R}^d)$) Tüm $Z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ için $f \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^d))$ ise $\partial_\mu f : Q_2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ dönüşümü Lipchitz sürekli ve sınırlı olacak biçimde $\partial_\mu f(\mathbb{P}_Z, \cdot)$ nin $\mathbb{P}_Z -$ modifikasyonu vardır. Öyleki; bazı $C > 0$ için aşağıdaki eşitizlikler tanımlıdır:

- $|\partial_\mu f(\mu, x)| \leq C, \forall \mu \in Q_2(\mathbb{R}^d), \forall x \in \mathbb{R}^d.$
- $|\partial_\mu f(\mu_1, x_1) - \partial_\mu f(\mu_2, x_2)| \leq C(\mathbb{W}_2(\mu_1, \mu_2) + |x_1 - x_2|),$
  $\forall \mu_1, \mu_2 \in Q_2(\mathbb{R}^d), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d.$

Ayrıca Tanım 5.1.2 de belirtilen $\partial_\mu f(\mathbb{P}_Z, \cdot)$, $Z \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ gösteriminin tek türlü olduğu (Buckdahn R. et all., 2016)-Remark 2.2 de gösterilmiştir.

$\mathbb{U}_1$: $\mathbb{R}$' nin kapalı konveks bir alt kümesi ve $\mathcal{F}_t-$uyarlı proseslerin ölçülebilir bir sınıfı olmak üzere; $u(\cdot) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}_1$ dir.

$\mathbb{U}_2$: $[0, \infty)$ aralığında $\mathcal{F}_t-$ uyarlı proseslerin ölçülebilir bir sınıfı olmak üzere; $\eta(\cdot) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{U}_2$ dir.

Bu çalışmanın amacı optimal singüler stokastik kontrol probleminin incelenmesini içerdiğinden, aşağıda kabul edilebilir kontrolün singüler bileşeni hakkında bazı bilgiler verilecektir.

Tanım 5.1.3 $\mathcal{F}_t-$adapte proseslerin $(\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2)$-değerli ölçülebilir $(u(\cdot), \eta(\cdot))$ çifti bir kabul edilebilir kontroldür:

- $\eta(\cdot)$ sınırlı varyasyona sahip, azalmayan, soldan sürekli ve sağdan limitlidir. Ayrıca, $t > 0$ için $\eta(t_-) = \lim_{s\to t, s<t} \eta(s)$ olmak üzere; $\eta(0_-) = 0$ dır.
- $E\left[\sup_{t\in[s,T]} |u(t)|^2 + |\eta(T)|^2\right] < \infty$.
- Tüm kabul edilebilir kontroller kümesi $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ olup $d\eta(t)$ Lebesque ölçümü dt' ye göre singülerdir ve $\eta(\cdot)$ kontrolün singüler, $u(\cdot)$ ise kontrolün mutlak sürekli bileşenidir.

Koşullar (K1): $f, \sigma, g\,:\,[0,T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, ve $\psi\,:\,\mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları tüm değişkenler için ölçülebilirdir. Ayrıca, tüm $u \in \mathbb{U}_1, f(\cdot,\cdot,u)$, $\sigma(\cdot,\cdot,u)$, $g(\cdot,\cdot,u) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R})\mathbb{R})$ ve $\psi(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(\mathbb{R}\times Q_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ dir.
Eğer $\varphi(x,\mu) = f(x,\mu,u), \sigma(x,\mu,u), g(x,\mu,u), \psi(x,\mu)$ olduğu düşünülürse, $\varphi(\cdot,\cdot)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $x \in \mathbb{R}$ sabit sayısı için $\varphi(x,\cdot) \in \mathbb{C}_b^{1,1}(Q_2(\mathbb{R}^d))$.
- $\mu \in Q_2(\mathbb{R}^d)$ sabit sayısı için $\varphi(\cdot,\mu) \in \mathbb{C}_b^1(\mathbb{R})$.
- $\varphi := f, \sigma, g, \psi$ için $\partial_x\varphi$ ve $\partial_\mu\varphi$ türevleri sınırlı ve Lipschitz süreklidir. Burada, Lipschitz sabitleri $u \in \mathbb{U}_1$ den bağımsızdır.
- f, σ, g fonksiyonları kontrol değişkeni u' ya göre sürekli diferansiyellenebilirdir ve tüm $\partial_u f, \partial_u \sigma$ ve $\partial_u g$ türevleri sınırlı ve süreklidir.

Koşullar (K2): $M(\cdot)\,:\,[0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\ell(\cdot)\,:\,[0,T] \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonları göz önüne alındığında her $t \in [0,T]$ için $M(\cdot)$ fonksiyonu sınırlı ve sürekli, $\ell(\cdot)$ fonksiyonu ise süreklidir.

Üstte verilen (K1) ve (K2) koşulları altında McKean-Vlasov dinamik-(5.1.1)' in tek kuvvetli çözümü (unique strong solution) $x^{u,\eta}(t)$ aşağıdaki formda ifade edilir:

$$\begin{aligned} x^{u,\eta}(t) &= x_0 + \int_0^t f\left(s, x^{u,\eta}(s), \mathbb{P}_{x^{u,\eta}(s)}, u(s)\right) ds \\ &+ \int_0^t \sigma\left(s, x^{u,\eta}(s), \mathbb{P}_{x^{u,\eta}(s)}, u(s)\right) dW(s) + \int_{[0,t]} M(s) d\eta(s). \end{aligned}$$

Detaylı inceleme için (Buckdahn et al., 2014; Carnoma et al., 2013) bakılabilir. Ayrıca, $M(\cdot)$sınırlı ve sürekli olduğundan herhangi $n > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$E\left[\sup_{t\in[0,T]} |x^{u,\eta}(t)|^n\right] < C(n), \tag{5.1.10}$$

Burada $C(n)$ sabiti sadece n ye bağlıdır ve peformans fonksiyoneli J iyi tanımlıdır. $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot)) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ optimal kontrol olmak üzere ilgili durum prosesi $x^{u^*,\eta^*}(\cdot)$ dir ve (McV-SDEs)-(5.1.1) çözümü $x^*(\cdot) = x^{u^*,\eta^*}(\cdot)$ olarak ifade edilir.

$(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbb{P}})$ olasılık uzayı $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uzayının kopyası olmak üzere herhangi rastgele değişken çifti $(Z, \xi) \in \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d) \times \mathbb{L}^2(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d)$ için $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\mathbb{P}})$ üzerinde tanımlı (Z, ξ) den bağımsız bir $(\widehat{Z}, \widehat{\xi})$ ikilisi vardır. Çarpım olasılık uzayı $(\Omega \times \widehat{\Omega}, \mathcal{F} \otimes \widehat{\mathcal{F}}, \mathbb{P} \otimes \widehat{\mathbb{P}})$ olmak üzere herhangi $(w, \widehat{w}) \in \Omega \times \widehat{\Omega}$ için $(\widehat{Z}, \widehat{\xi})(w, \widehat{w}) = (Z(\widehat{w}), \xi(\widehat{w}))$ kurulabilir. $(\widehat{u}^*(t), \widehat{x}^*(t))$ ikilisi $(u^*(t), x^*(t))$ den bağımsız bir kopyası ise $\mathbb{P}_{x^*(t)} = \widehat{\mathbb{P}}_{\widehat{x}^*(t)}$ eşitliği yazılabilir. Olasılık ölçümü $\widehat{\mathbb{P}}$ altındaki beklenen değer $\widehat{E}$ ile gösterilir. Katsayı fonksiyonları $\varphi = f, \sigma, g, \psi$ için aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_\mu(t) &:= \partial_\mu \varphi(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \widehat{x}^*(t)), \\ \widehat{\varphi}_\mu^*(t) &:= \partial_\mu \varphi(t, \widehat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \widehat{u}^*(t); x^*(t)). \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Orta-alan stokastik kontrol problemi (5.1.1)-(5.1.3) ile ilişkili klasik Hamilton aşağıdaki formdadır:

$$H(t, x, \mu, u, \Phi(t), Q(t)) = \Phi(t) f(t, x, \mu, u) + Q(t) \sigma(t, x, \mu, u) + g(t, x, \mu, u), \tag{5.1.12}$$

Burada, herhangi $(t, x, \mu, u, \Phi, Q) \in [0, T] \times \mathbb{R} \times Q_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{U}_1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için

$(\Phi(\cdot), Q(\cdot)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Hamilton katsayı fonksiyonları üzerinden, orta-alan geri-stokastik diferansiyel denklemlerle (MF-BSDEs)-(5.2.1) verilir. Kontrol probleminin stokastik maksimum prensibinde yer alan ek denklemler aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{cases} -d\Phi(t) = \big\{ f_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t)) \, \Phi(t) \\ \qquad\qquad + \widehat{E} \Big[\partial_\mu f(t, \widehat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \widehat{u}^*(t); x^*(t)) \widehat{\Phi}(t) \Big] \\ \qquad\qquad + \sigma_x \left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t) \right) Q(t) \\ \qquad\qquad + \widehat{E} \Big[\partial_\mu \sigma(t, \widehat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \widehat{u}^*(t); x^*(t)) \widehat{Q}(t) \Big] \\ \qquad\qquad + \, g_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t)) \\ \qquad\qquad + \widehat{E} \left[\partial_\mu g(t, \widehat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \widehat{u}^*(t); x^*(t)) \right] \big\} \, dt \; - Q(t) dW(t), \\ \\ \quad \Phi(T) = \psi_x \left(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)} \right) + \widehat{E} \left[\partial_\mu \psi \left(\widehat{x}^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}; x^*(t) \right) \right]. \end{cases} \tag{5.1.13}$$

MF-BSDEs hakkında daha detaylı bilgi için (Buckdahn et al., 2009) bakılabilir. Üstte verilen (5.1.11) eşitlikleri kullanılarak $\varphi = f, \sigma, \psi, g$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\widehat{E} \left[\partial_\mu \varphi(t, \widehat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \widehat{u}^*(t); x^*(t)) \right] = \widehat{E} \left[\partial_\mu \varphi(t, \widehat{x}^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, \widehat{u}^*(t); y) \right] \Big|_{y = x^*(t)} \tag{5.1.14}$$

Ek denklem (5.1.13); $\mathcal{H}(t) := H\left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t), \Phi(t), Q(t)\right)$ eşitliği ile aşağıdaki forma dönüşür:

$$\begin{cases} -d\Phi(t) = \Big\{ \mathcal{H}_x(t) + \widehat{E} \left[\partial_\mu \mathcal{H}(t) \right] \Big\} dt - Q(t) dW(t) \\ \quad \Phi(T) = \psi_x \left(x^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)} \right) + \widehat{E} \left[\partial_\mu \psi \left(\widehat{x}^*(T), \mathbb{P}_{x^*(T)}; x^*(t) \right) \right]. \end{cases} \tag{5.1.15}$$

Ayrıca, (K1) koşulu altında ek denklem (5.1.13) ün bir yalnız bir $\mathcal{F}_t-$adapte kuvvetli çözümü $(\Phi(\cdot), Q(\cdot)) \in \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathbb{R}) \times \mathbb{L}^2_{\mathcal{F}}([0,T]; \mathbb{R})$ olmak üzere, aşağıdaki ifade geçerlidir (Buckdahn et al., 2016):

$$E\left[\sup_{s \leq t \leq T} |\Phi(t)|^2 + \int_0^T |Q(t)|^2 \, dt \right] \leq +\infty. \tag{5.1.16}$$

5.2 McV-SDEs İçin Optimal Singüler Kontrolün Gereklilik Koşulları

Bu alt bölümde, lineer olmayan McKean-Vlasov dinamikleri ile idare olunan optimal singüler stokastik sistemi için Pontryagin maksimum prensibi formunda optimalliğin gereklilik koşulları elde edilecektir. İkinci alt bölümde belirtilen olasılık ölçümüne göre alınan türevler, ilgili Itô formülü ve dualite metodu ile birlikte ele alınarak çalışmanın ana eksenini oluşturan teoremlerin ispatında kullanılacaktır.

Teorem 5.2.1 *Singüler kontrol problemi (5.1.1)-(5.1.3) ün optimal çözümü* $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot), x^*(\cdot))$ *olsun ve (K1)-(K2) koşulları sağlansın. Tüm* $(u, \eta) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ *için ek denklem (5.1.13) ün tek* $\mathcal{F}_t-$*adapte prosesleri çözüm çifti* $(\Phi(\cdot), Q(\cdot))$ *aşağıdaki eşitsizliği gerçekler:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\int_0^T H_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t), \Phi(t), Q(t))(u(t) - u^*(t))dt \\ &+ E\left[\int_{[0,T]} (\ell(t) + M(t)\Phi(t))d\left(\eta - \eta^*\right)(t)\right]. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Not 5.2.1 Teorem 5.2.1 in kabulleri altında, tüm $(u, \eta) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2;\ t \in [0, T]$ için ek denklem (5.1.13) nin tek $\mathcal{F}_t-$adapte prosesleri çözüm çifti $(\Phi(\cdot), Q(\cdot))$ aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\begin{aligned} 0 &\leq H_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t), \Phi(t), Q(t))(u(t) - u^*(t))dt \\ &+ E\left[\int_{[0,T]} (\ell(t) + M(t)\Phi(t))d\left(\eta - \eta^*\right)(t)\right],\ \mathbb{P}-a.s.,\ dt - a.e. \end{aligned}$$

McKean-Vlasov kontrol problemini dönüştürebilmek için aşağıdki ifadelere ihtiyaç duyulacaktır.

Kontrol problemi (5.1.1)- (5.1.3) ün optimal çözümleri $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot), x^*(\cdot))$ olsun. $(u(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ olmak üzere; yeteri kadar küçük $\theta > 0$ için $(u^\theta(\cdot), \eta^\theta(\cdot))$ ikilisi $(u^*(\cdot), \eta^*(\cdot))$ çiftinin sözde konveks perturbasyonudur ve aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$(u^\theta(t),\eta^\theta(t)) = (u^*(t),\eta^*(t)) + \theta\left[(u(t),\eta(t)) - (u^*(t),\eta^*(t))\right]. \qquad (5.2.2)$$

Burada, $\mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ nin konveksliğinden $(u^\theta(t),\eta^\theta(t)) \in \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2$ olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca, performans fonksiyoneli üzerindeki perturbasyon aşağıdaki eşitsizliği gerçekler:

$$J\left(u^\theta(\cdot),\eta^\theta(\cdot)\right) - J\left(u^*(\cdot),\eta^*(\cdot)\right) \geq 0. \qquad (5.2.3)$$

Bu durumda; $x^\theta(\cdot) = x^{(u^\theta,\eta^\theta)}(\cdot)$ durum prosesi kabul edilebilir kontrol $(u^\theta(t),\eta^\theta(t))$ ikilisine göre (5.1.1) in çözümüdür.

Lemma 5.2.1 *(K1) ve (K2) koşulları sağlansın. Bu durumda aşağıdaki eşitlik vardır:*

$$\lim_{\theta\to 0} E(\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^\theta(t) - x^*(t)\right|^2) = 0.$$

İspat. *Burkholder-Davis-Gundy Eşitsizliği* kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}
&E(\sup_{0\leq s\leq t}\left|x^\theta(s) - x^*(s)\right|^2)\\
&\leq E\int_0^t \left|f\left(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)\right) - f\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)\right)\right|^2 ds\\
&+E\int_0^t \left|\sigma\left(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)\right) - \sigma\left(r,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},x^*(s)\right)\right|^2 ds\\
&+E\left|\int_{[0,t]} M(s)d\left(\eta^\theta - \eta^*\right)(s)\right|^2.
\end{aligned}$$

Katsayı fonksiyonları f ve σ üzerinde verilen değişkenler x,μ ve u ya göre (K2) koşulu ve Lipschitz koşulları uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&E(\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^\theta(t) - x^*(t)\right|^2)\\
&\leq C_T E\int_0^t (\left|x^\theta(s) - x^*(s)\right|^2 + \left|\mathbb{W}_2\left(\mathbb{P}_{x^\theta(s)},\mathbb{P}_{x^*(s)}\right)\right|^2)ds \qquad (5.2.4)\\
&+C_T\theta^2 E\int_0^t \left|u^\theta(s) - u^*(s)\right|^2 ds + C_T\theta^2 E\left|\eta^\theta(T) + \eta^*(T)\right|^2
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada, $2-$*Wasserstein Metriği* $\mathbb{W}_2(\cdot,\cdot)$ ve özelliği kullanılarak aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılır:

$$\begin{cases} \mathbb{W}_2\left(\mathbb{P}_{x^\theta(s)},\mathbb{P}_{x^*(s)}\right) = \inf\left\{\left[E\left|\widetilde{x}^\theta(s)-\widetilde{x}^*(s)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}} \text{her } \widetilde{x}^\theta(\cdot),\widetilde{x}^*(\cdot)\in\mathbb{L}^2(\mathcal{F},\mathbb{R}^d) \right. \\ \qquad\qquad \left. \mathbb{P}_{x^\theta(s)} = \mathbb{P}_{\widetilde{x}^\theta(s)} \text{ ve } \mathbb{P}_{x^*(s)} = \mathbb{P}_{\widetilde{x}^*(s)}\right\}, \\ \qquad\qquad \leq \left[E\left|x^\theta(s)-x^*(s)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Üstteki (5.2.4), (5.2) eşitsizlikleri ve *Tanım 5.2.1* kullanılarak

$$E(\sup_{0\leq t\leq T}\left|x^\theta(t)-x^*(t)\right|^2) \leq C_T E\int_0^t \sup_{\tau\in[0,s]}\left|x^\theta(\tau)-x^*(\tau)\right|^2 ds + M_T\theta^2$$

ifadesi elde edilir. Son olarak, *Gronwall Eşitsizliği* yardımıyla $\theta\to 0$ için istenen sonuca ulaşılır. □

Lemma 5.2.2 *$\phi(t)$ aşağıdaki McKean-Vlasov sisteminin çözümü olsun:*

$$\begin{cases} d\phi(t) = \left\{f_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\,\phi(t)\right. \\ \qquad + \widehat{E}\left[\partial_\mu f\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\widehat{x}^*(t)\right)\widehat{\phi}(t)\right] \\ \qquad \left. + f_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))(u(t)-u^*(t))\right\}dt \\ \qquad + \left\{\sigma_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)\phi(t)\right. \\ \qquad + \widehat{E}\left[\partial_\mu\sigma\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\widehat{x}^*(t)\right)\widehat{\phi}(t)\right] \\ \qquad \left. + \sigma_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))\right\}dW(t) \\ \qquad + M(t)d\left(\eta-\eta^*\right)(t), \\ \phi(0) = 0. \end{cases} \tag{5.2.5}$$

Bu durumda, aşağıdaki tahmin (estimation) sağlanır:

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{0\leq t\leq T}\left|\left(x^\theta(t)-x^*(t)\right)\theta^{-1}-\phi(t)\right|^2\right] = 0. \tag{5.2.6}$$

İspat. (K1) ve (K2) koşulları altında, (5.2.5) tek (unique) çözüme sahiptir. $\mathbf{D}_\xi f(\mathbb{P}_{Z_0}) = \left\langle \mathbf{D}\widetilde{f}(Z_0)\cdot\xi\right\rangle = \frac{d}{dt}\widetilde{f}\left(Z_0+t\xi\right)\Big|_{t=0}$ olduğundan aşağıdaki *Taylor* *açılımı* yazılabilir:

$$f(\mathbb{P}_{Z_0+\xi}) - f(\mathbb{P}_{Z_0}) = \mathbf{D}_\xi f(\mathbb{P}_{Z_0}) + \mathcal{R}(\xi).$$

Burada, $\mathcal{R}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{L}^2\left(\mathcal{F}, \mathbb{R}^d\right)$ için $O\left(\|\xi\|_2\right) \to 0$ durumunda $O\left(\|\xi\|_2\right)$ nin mertebesidir. O halde;

$$\gamma^\theta(t) = \left(x^\theta(t) - x^*(t)\right)\theta^{-1} - \phi(t),\ t \in [0,T] \tag{5.2.7}$$

eşitliği göz önünü alındığında,

$$\begin{aligned}
\gamma^\theta(t) \;=\;& \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[f\left(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)\right) - f\left(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)\right)\right] ds \\
& + \frac{1}{\theta}\int_0^t \left[\sigma\left(s, x^\theta(s), \mathbb{P}_{x^\theta(s)}, u^\theta(s)\right) - \sigma\left(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)\right)\right] dW(s) \\
& + \frac{1}{\theta}\int_{[0,t]} M(s) d(\eta^\theta - \eta^*)(s) - \int_0^t \Big\{ f_x\left(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)\right)\phi(s) \\
& + \widehat{E}\left[\partial_\mu f\left(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s); \widehat{x}^*(s)\right)\widehat{\phi}(s)\right] \\
& + f_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))(u(s) - u^*(s))\Big\} ds \\
& - \int_0^t \Big\{\sigma_x\left(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s)\right)\phi(s) \\
& + \widehat{E}\left[\partial_\mu \sigma\left(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s); \widehat{x}^*(s)\right)\widehat{\phi}(s)\right] \\
& + \sigma_u(s, x^*(s), \mathbb{P}_{x^*(s)}, u^*(s))(u(s) - u^*(s))\Big\} dW(s) \\
& - \int_{[0,t]} M(s) d\left(\eta - \eta^*\right)(s),
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca, (5.2.3) kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\frac{1}{\theta}\int_{[0,t]} M(s) d(\eta^\theta - \eta^*)(s) = \int_{[0,t]} M(s) d(\eta - \eta^*)(s).$$

Bu ifade $\gamma^\theta(t)$ nin singüler kontrolden bağımsız olduğunu göstermektedir. Üstte yer alan (5.2.8) eşitliğinin ilk integral terimi aşağıdaki şekilde ayrıştırılabilir:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},x^*(s)))ds \\
&= \frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)))ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s)))ds \\
&+ \frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)))ds.
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki modifikasyonlar dikkate alındığında;

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)))ds \\
= \quad &\int_0^t \int_0^1 \left[f_x\left(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma^\theta(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)\right)(\gamma^\theta(s)+\phi(s))\right] d\lambda ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^\theta(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s)))ds \\
= \quad &\int_0^t \int_0^1 \widehat{E}\left[\partial_\mu f\left(s,x^\theta(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\gamma(s)+\phi(s))},u^\theta(s);\widehat{x}^*(s)\right)(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{\phi}(s))\right] d\lambda ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta}\int_0^t (f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^\theta(s)) - f(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)))ds \\
= \quad &\int_0^t \int_0^1 \left[f_u\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)+\lambda\theta(v(s)-u^*(s)\right)(v(s)-u^*(s))\right] d\lambda ds,
\end{aligned}
$$

benzer ilişkinin σ için de sağlandığı görülür. Böylelikle, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2}\right] \\
&\leq C(t)\left[E\int_0^t\int_0^1\left|f_x\left(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^{\theta}(s)\right)\gamma^{\theta}(s)\right|^2 d\lambda ds\right. \\
&+E\int_0^t\int_0^1\widehat{E}\left|\partial_\mu f(s,x^{\theta}(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{\phi}(s))},u^{\theta}(s);\widehat{x}^*(s))\widehat{\gamma}^{\theta}(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&+E\int_0^t\int_0^1\left|\sigma_x\left(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^{\theta}(s)},u^{\theta}(s)\right)\gamma^{\theta}(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&+E\int_0^t\int_0^1\widehat{E}\left|\partial_\mu \sigma(s,x^{\theta}(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\widehat{\gamma}(s)+\widehat{\phi}(s))},u^{\theta}(s);\widehat{x}^*(s))\widehat{\gamma}^{\theta}(s)\right|^2 d\lambda ds \\
&\left.+E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\beta^{\theta}(s)\right|^{2}\right]\right].
\end{aligned}
$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
\beta^{\theta}(t) \;&=\; \int_0^t\int_0^1[f_x\left(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma^{\theta}(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^{\theta}(s)\right) \\
&-\; f_x\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)\right)]\phi(s)d\lambda ds \\
&+\; \int_0^t\int_0^1\widehat{E}\left[\partial_\mu f(s,x^{\theta}(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\widehat{\gamma}^{\theta}(s)+\widehat{\phi}(s))},u^{\theta}(s);\widehat{x}^*(s))\right. \\
&-\; \partial_\mu f\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s);;\widehat{x}^*(s)\right)]\widehat{\phi}(s)d\lambda ds \\
&+\; \int_0^t\int_0^1 f_u\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)+\lambda\theta(v(t)-u^*(t)\right) \\
&-\; f_u\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)](v(t)-u^*(t)\right)d\lambda ds \\
\\
&+\; \int_0^t\int_0^1[\sigma_x\left(s,x^*(s)+\lambda\theta(\gamma^{\theta}(s)+\phi(s)),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^{\theta}(s)\right) \\
&-\; \sigma_x\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)\right)]\phi(s)d\lambda dW(s) \\
&+\; \int_0^t\int_0^1\widehat{E}\left[\partial_\mu \sigma(s,x^{\theta}(s),\mathbb{P}_{x^*(s)+\lambda\theta(\widehat{\gamma}^{\theta}(s)+\widehat{\phi}(s))},u^{\theta}(s);\widehat{x}^*(s))\right. \\
&-\; \partial_\mu \sigma\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s);\widehat{x}^*(s)\right)]\widehat{\phi}(s)d\lambda dW(s) \\
&+\; \int_0^t\int_0^1 \sigma_u\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)+\lambda\theta(v(t)-u^*(t)\right) \\
&-\; \sigma_u\left(s,x^*(s),\mathbb{P}_{x^*(s)},u^*(s)](v(t)-u^*(t)\right)d\lambda dW(s).
\end{aligned}
$$

f ve σ fonksiyonlarının (x,μ,u) ya göre türevleri Lipschitz sürekli olduğu için

$$\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{s\in[0,T]}\left|\beta^{\theta}(s)\right|^{2}\right]=0$$

sonucu elde edilir. Ayrıca, f ve σ fonksiyonları (x,μ,u) ya göre sınırlı olduğundan, $\forall t\in[0,T]$ için aşağıdaki eşitizlik yazılabilir:

$$E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2}\right]\leq c(t)\left\{E\int_{0}^{t}\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2}ds+E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\beta^{\theta}(s)\right|^{2}\right]\right\}.$$

Bu eşitsizliğe *Gronwall Lemma* uygulanırsa,

$$E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\gamma^{\theta}(s)\right|^{2}\right]\leq c(t)E\left[\sup_{s\in[0,t]}\left|\beta^{\theta}(s)\right|^{2}\right]\exp\left\{\int_{0}^{t}c(s)ds\right\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son olarak, $t=T$ alındığında ve $\theta\to 0$ için *Lemma 5.2.2* nin ispatı tamamlanmış olur. $\square$

Lemma 5.2.3 *Herhangi* $(u(\cdot),\eta(\cdot))\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ *için aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:*

$$\begin{aligned}0\leq E\Big\{&\Big[\psi_x\left(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)}\right)+\widehat{E}\left(\partial_\mu\psi\left(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)}\right)\right)\Big]\phi(T)\\&+\int_0^T\left[g_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)\phi(t)+\widehat{E}\left[\partial_\mu g(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\right]\phi(t)\right.\\&\left.+g_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))\right]dt\Big\}\\&+E\int_{[0,T]}\ell(t)d\left(\eta-\eta^*\right)(t).\end{aligned}\tag{5.2.9}$$

İspat. (5.1.4) ve (5.2.3) dikkate alındığında, aşağıdaki eşitsizlik dört bölümde incelenebilir:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq J\left(u^{\theta}(\cdot), \eta^{\theta}(\cdot)\right) - J\left(u^{*}(\cdot), \eta^{*}(\cdot)\right) \\
&= E\left[\psi(x^{\theta}(T), \mathbb{P}_{x^{\theta}(T)}) - \psi(x^{*}(T), \mathbb{P}_{x^{*}(T)})\right] \\
&+E\int_{0}^{T}\left[g(t, x^{\theta}(t), \mathbb{P}_{x^{\theta}(t)}, u^{\theta}(t)) - g(t, x^{*}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{\theta}(t))\right] dt \\
&+E\int_{0}^{T}\left[g(t, x^{*}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{\theta}(t)) - g(t, x^{*}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{*}(t))\right] dt \\
&+E\int_{[0,T]} \ell(t) d\left(\eta^{\theta} - \eta^{*}\right)(t) \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{5.2.10}
$$

İlk terim incelemesi aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= E\left[\psi(x^{\theta}(T), \mathbb{P}_{x^{\theta}(T)}) - \psi(x^{*}(T), \mathbb{P}_{x^{*}(T)})\right] \\
&= E\left[\psi(x^{\theta}(T), \mathbb{P}_{x^{\theta}(T)}) - \psi(x^{\theta}(T), \mathbb{P}_{x^{*}(T)})\right] \\
&+ E\left[\psi(x^{\theta}(T), \mathbb{P}_{x^{*}(T)}) - \psi(x^{*}(T), \mathbb{P}_{x^{*}(T)})\right] \\
&= E\int_{0}^{1} \widehat{E}[\partial_{\mu}\psi\left(x^{\theta}(T), \mathbb{P}_{x^{*}(T)+\lambda\theta(\gamma^{\theta}(T)+\phi(T))}; x^{*}(T)\right)]\theta(\widehat{\gamma}^{\theta}(T) + \widehat{\phi}(T)) d\lambda \\
&+ E\int_{0}^{1} [\psi_x\left(x^{*}(T) + \lambda\theta(\gamma^{\theta}(T) + \phi(T)), \mathbb{P}_{x^{*}(T)}\right)\theta(\gamma^{\theta}(T) + \phi(T)) d\lambda.
\end{aligned} \tag{5.2.11}
$$

İkinci terim incelemesi aşağıda belirtildiği gibidir:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= E\int_{0}^{T}\left[g(t, x^{\theta}(t), \mathbb{P}_{x^{\theta}(t)}, u^{\theta}(t)) - g(t, x^{*}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{\theta}(t))\right] dt \\
&= E\int_{0}^{T}\left[g(t, x^{\theta}(t), \mathbb{P}_{x^{\theta}(t)}, u^{\theta}(t)) - g(t, x^{\theta}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{\theta}(t))\right] dt \\
&+ E\int_{0}^{T}\left[g(t, x^{\theta}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{\theta}(t)) - g(t, x^{*}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{\theta}(t))\right] dt \\
&= E\int_{0}^{T}\int_{0}^{1} \widehat{E}[\partial_{\mu} g(t, x^{\theta}(t), \mathbb{P}_{x^{*}(t)+\lambda\theta(\gamma^{\theta}(t)+\phi(t))}, u^{\theta}(t))\theta(\widehat{\gamma}^{\theta}(t) + \widehat{\phi}(t)) d\lambda dt \\
&+ E\int_{0}^{T}\int_{0}^{1} [g_x(t, x^{*}(t) + \lambda\theta(\gamma^{\theta}(t) + \phi(t)), \mathbb{P}_{x^{*}(t)}, u^{\theta}(t))\theta(\gamma^{\theta}(t) + \phi(t)) d\lambda dt.
\end{aligned} \tag{5.2.12}
$$

Benzer biçimde, üçüncü terim aşağıdaki gibi elde edilir:

$$I_3 = E\int_0^T \int_0^1 g_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t) + \lambda\theta(v(t) - u^*(t)))\theta(v(t) - u^*(t)))d\lambda dt. \tag{5.2.13}$$

Dördüncü bölüm incelemesi için (5.2.2) ilişkisi ele alındığında, herhangi $\eta(\cdot) \in \mathbb{U}_2$ için;

$$\eta^\theta(t)) - \eta^*(t) = \theta\left(\eta(t) - \eta^*(t)\right)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak, I_4 aşağıdaki forma dönüşür:

$$I_4 = E\int_{[0T]} \ell(t)d\left(\eta^\theta - \eta^*\right)(t) = \theta E\int_{[0,T]} \ell(t)d(\eta - \eta^*)(t). \tag{5.2.14}$$

Elde edilen yeni dönüşümler (5.2.10) de tekrar yazılırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; & E\int_0^1 \widehat{E}[\partial_\mu \psi\left(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))}; x^*(T)\right)]\widehat{\phi}(T)d\lambda \\ + \;& E\int_0^1 \psi_x\left(x^*(T) + \lambda\theta(\gamma^\theta(t) + \phi(t)), \mathbb{P}_{x^*(T)}; x^*(T)\right)]\widehat{\phi}(T)d\lambda \\ + \;& E\int_0^T \int_0^1 \widehat{E}[\partial_\mu g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(t)+\phi(t))}, u^\theta(t))\widehat{\phi}(t)d\lambda dt \\ + \;& E\int_0^T \int_0^1 [g_x(t, x^*(t) + \lambda\theta(\gamma^\theta(t) + \phi(t)), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\phi(t)d\lambda dt \\ + \;& E\int_0^T \int_0^1 g_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t) + \lambda\theta(v(t) - u^*(t)))(v(t) - u^*(t)))d\lambda dt \\ + \;& E\int_{[0,T]} \ell(t)d(\eta - \eta^*)(t) + A_\theta\left(t\right). \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

Burada,

$$\begin{aligned} A_\theta\left(t\right) \;=\; & E\int_0^1 \widehat{E}[\partial_\mu \psi\left(x^\theta(T), \mathbb{P}_{x^*(T)+\lambda\theta(\gamma^\theta(T)+\phi(T))}; x^*(T)\right)]\widehat{\gamma}^\theta(T)d\lambda \\ + \;& E\int_0^1 \psi_x\left(x^*(T) + \lambda\theta(\gamma^\theta(T) + \phi(T)), \mathbb{P}_{x^*(T)}\right)]\gamma^\theta(T)d\lambda \\ + \;& E\int_0^T \int_0^1 \widehat{E}[\partial_\mu g(t, x^\theta(t), \mathbb{P}_{x^*(t)+\lambda\theta(\gamma^\theta(t)+\phi(t))}, u^\theta(t))\widehat{\gamma}^\theta(t)d\lambda dt \\ + \;& E\int_0^T \int_0^1 [g_x(t, x^*(t) + \lambda\theta(\gamma^\theta(t) + \phi(t)), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^\theta(t))\gamma^\theta(t)d\lambda dt. \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

Lemma 5.2.2 de (5.2.6) yaklaşımından da görüldüğü üzere $\lim_{\theta\to 0} E\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\gamma^{\theta}(t)\right|^2\right] = 0$ dır. Ayrıca, ψ ve g fonksiyonlarının (x, μ, u) ye göre türevleri sınırlı olduğu için aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lim_{\theta\to 0} A_\theta(t) = 0. \tag{5.2.17}$$

Son olarak, (5.2.6), (5.2.15)-(5.2.17) göz önünde tutulduğunda ve türevin Lipschitz sürekliliğinden dolayı $\theta \to 0$ için $u^{\theta}(t) \to u^*(t)$ olduğundan *Lemma 5.2.3* ispatlanmış olur. □

İspat Teorem 5.2.1 Itô formülü $\Phi(t)\phi(t)$ çarpımına uygulanıp, beklenen değeri (expectation) alındığında aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} E(\Phi(T)\phi(T)) &= E\int_0^T \Phi^*(t)d\phi(t) + E\int_0^T \phi(t)d\Phi^*(t) \\ &+ E\int_0^T Q^*(t)\left\{\sigma_x\left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t)\right)\phi(t)\right. \\ &+ \widehat{E}\left[\partial_\mu\sigma\left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \widehat{x}^*(t)\right)\widehat{\phi}(t)\right] \\ &\left.+ \sigma_u\left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))\right\}dt \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Burada, J_1 sektörü aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$\begin{aligned} J_1 &= E\int_0^T \Phi(t)d\phi(t) \\ &= E\int_0^T \Phi(t)\left\{f_x(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))\phi(t)\right. \\ &+ \widehat{E}\left[\partial_\mu f\left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \widehat{x}^*(t)\right)\widehat{\phi}(t)\right] \\ &\left.+ f_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))(u(t)-u^*(t))\right\}dt \\ &+ E\int_0^T \Phi(t)M(t)d(\eta-\eta^*)(t), \\ &= E\int_0^T \Phi(t)f_x\left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t)\right)\phi(t)dt \\ &+ E\int_0^T \Phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu f\left(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t); \widehat{x}^*(t)\right)\widehat{\phi}(t)\right]dt \\ &+ E\int_0^T \Phi(t)f_u(t, x^*(t), \mathbb{P}_{x^*(t)}, u^*(t))(u(t)-u^*(t))dt \\ &+ E\int_0^T \Phi(t)M(t)d(\eta-\eta^*)(t). \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

İkinci sektör J_2 aşağıdaki formda yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
J_2 &= E\int_0^T \phi(t)d\Phi^*(t)\\
&= -E\int_0^T \phi(t)\left\{f_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)\Phi(t)\\
&+\widehat{E}\left[\partial_\mu f(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\widehat{\Phi}(t)\right]\\
&+\sigma_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)Q(t)\\
&+\widehat{E}\left[\partial_\mu\sigma(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\widehat{Q}(t)\right]\\
&+g_x(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t))\\
&+\widehat{E}\left[\partial_\mu g(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\right]\big\}\,dt\\
&= -E\int_0^T \phi(t)f_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)\Phi(t)dt\\
&-E\int_0^T \phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu f(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\widehat{\Phi}(t)\right]\\
&-E\int_0^T \phi(t)\sigma_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)Q(t)dt\\
&-E\int_0^T \phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu\sigma(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\widehat{Q}(t)\right]\\
&-E\int_0^T \phi(t)g_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)dt\\
&-E\int_0^T \phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu g(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\right]dt.
\end{aligned}
\tag{5.2.20}
$$

Benzer biçimde, J_3 sektörü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$
\begin{aligned}
J_3 \;=\;& E\int_0^T Q(t)\sigma_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)\phi(t)dt\\
+\;& E\int_0^T Q(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu\sigma\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\widehat{x}^*(t)\right)\widehat{\phi}(t)\right]dt\\
+\;& E\int_0^T Q(t)\sigma_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))dt.
\end{aligned}
\tag{5.2.21}
$$

Elde edilen sektörler üzerinde *Fubini Teoremi* uygulanır ve beklenen değer $\widehat{E}\left[\cdot\right]$ nin "$\widehat{\cdot}$"ile sadece rastgele değişkenler üzerinde rol oynadığı düşünülürse, aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$
\begin{aligned}
& E\int_0^T \Phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu f(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);\widehat{x}(t))\widehat{\phi}(t)\right]dt \\
& = E\int_0^T \phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu f(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);\widehat{x}(t))\widehat{\Phi}(t)\right]dt, \\
& E\int_0^T Q(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu \sigma\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\widehat{x}^*(t)\right)\widehat{\phi}(t)\right]dt \\
& = E\int_0^T \phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu \sigma\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t);\widehat{x}^*(t)\right)\widehat{Q}(t)\right]dt.
\end{aligned}
$$

Ayrıca, (5.2.19)-(5.2.21) eşitlikleri dikkate alındığında ve final zamanındaki Φ fonksiyonu $\Phi(T) = \psi_x\left(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)}\right) + \widehat{E}\left[\partial_\mu\psi\left(\widehat{x}^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)};x^*(t)\right)\right]$ göz önünde tutulduğunda aşağıdaki eşitliğe ulaşılır:

$$
\begin{aligned}
& E\left\{\psi_x\left(x^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)}\right)+\widehat{E}\left[\partial_\mu\psi\left(\widehat{x}^*(T),\mathbb{P}_{x^*(T)};x^*(t)\right)\right]\phi(T)\right\} \\
& = E\int_0^T \Phi(t)f_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))dt \\
& +E\int_0^T Q^*(t)\sigma_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))dt \\
& -E\int_0^T \phi(t)g_x\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)dt \\
& -E\int_0^T \phi(t)\widehat{E}\left[\partial_\mu g(t,\widehat{x}^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},\widehat{u}^*(t);x^*(t))\right]dt \\
& +E\int_{[0,T]} \Phi(t)M(t)d(\eta-\eta^*)(t).
\end{aligned}
$$

Son olarak üstteki eşitliğe Lemma 5.2.3 uygulandığında,

$$
\begin{aligned}
0 \le\ & E\int_0^T \Phi(t)f_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))dt \\
& + E\int_0^T Q(t)\sigma_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))dt \\
& + E\int_s^T g_u\left(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t)\right)(u(t)-u^*(t))\,dt \\
& + E\int_{[0,T]} \ell(t)d\left(\eta-\eta^*\right)(t) + E\int_{[0,T]}\Phi(t)M(t)d(\eta-\eta^*)(t) \\
& = E\int_0^T H_u(t,x^*(t),\mathbb{P}_{x^*(t)},u^*(t),\Phi(t),Q(t))\,(u(t)-u^*(t))\,dt \\
& + E\int_{[0,T]} \left(\ell(t)+\Phi(t)M(t)\right)d\left(\eta-\eta^*\right)(t).
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle, *Teorem 5.2.1* ispatlanmış olur. □

5.3 McV-SDEs İçin Optimal Singüler Kontrolün Yeterlilik Koşulları

Bu alt bölümde, McKean-Vlasov dinamikleri tarafından idare olunan sistemlerde optimal stokastik singüler kontrol için yeterlilik koşulları elde edilecektir. Hamilton ve ψ fonksiyonları üzerinde bazı konvekslik koşulları altında gereklilik koşullarının aynı zamanda optimallik için yeterlilik koşulları olduğu ispat edilecektir.

Eğer her $(x,\mu),(x',\mu') \in \mathbb{R}\times Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)$ için $f:\mathbb{R}\times Q_2\left(\mathbb{R}^d\right)\to\mathbb{R}^d$ fonksiyonu konveks ise aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$f(x',\mu') - f(x,\mu) \geq f_x(x,\mu)\,(x'-x) + \widehat{E}\left[\partial_\mu f(x,\mu)\,(X'-X)\right].$$

Burada, $\mu = \mathbb{P}_X$, ve $\mu' = \mathbb{P}_{X'}$ dir.

Koşul (K3): $\psi(\cdot,\cdot):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $H(t,\cdot,\cdot,\cdot,\Phi,Q):\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{U}_1\to\mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $\psi(\cdot,\cdot)$ foksiyonu (x,μ) ye göre konvekstir.
- $H(t,\cdot,\cdot,\cdot,\Phi,Q)$ fonksiyonu (x,μ,u) ya göre konvekstir.

Teorem 5.3.1 *Kabul edilebilir kontrol çifti $(v(\cdot),\xi(\cdot)) \in \mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ olmak üzere $x^{v,\xi}(\cdot)$ ve $(\Phi^v(\cdot),Q^v(\cdot))$ sırasıyla (5.1.1) ve (5.1.15) in $(v(\cdot),\xi(\cdot))$ ye karşılık gelen çözümleri olsun. (K1)∼(K3) koşulları sağlansın ve singüler kontrol ikilisi $(v(\cdot),\xi(\cdot))$, herhangi $(u(\cdot),\eta(\cdot))\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ için*

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\int_0^T H_u(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t),\Phi^v(t),Q^v(t))(u(t)-v(t))dt \\ &+ E\left[\int_{[0,T]}(\ell(t)+M(t)\Phi^v(t))d\left(\eta-\xi\right)(t)\right] \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

eşitliğini sağlar. O halde, $(v(\cdot), \xi(\cdot))$ *bir optimal kontroldür ve*

$$J\left(v(\cdot), \xi(\cdot)\right) = \inf_{(u(\cdot),\eta(\cdot))\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2} J\left(u(\cdot), \eta(\cdot)\right). \tag{5.3.2}$$

İspat. Herhangi $(u(\cdot), \eta(\cdot)) \in \mathcal{U}_1 \times \mathcal{U}_2$ için (5.1.3) dikkate alındığında, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}
&J\left(u(\cdot), \eta(\cdot)\right) - J\left(v(\cdot), \xi(\cdot)\right) \\
&= E\left[\psi(x^{u,\eta}(T), \mathbb{P}_{x^{v,\eta}(T)}) - \psi(x^{v,\xi}(T), \mathbb{P}_{x^{v,\xi}(T)})\right] \\
&+ E\int_0^T \left[g(t, x^{u,\eta}(t), \mathbb{P}_{x^{v,\eta}(t)}, u(t)) - g(t, x^{v,\xi}(t), \mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)}, v(t))\right] dt \\
&+ E\int_{[0,T]} \ell(t) d(\eta - \xi)(t).
\end{aligned}$$

Koşul (K3) göz önünde bulundurulduğunda,

$$\begin{aligned}
&J\left(u(\cdot), \eta(\cdot)\right) - J\left(v(\cdot), \xi(\cdot)\right) \\
&\geq E\left[(\psi_x(x^{v,\xi}(T), \mathbb{P}_{x^{v,\xi}(T)}) + \widehat{E}\left[\partial_\mu \psi(\widehat{x}^{v,\xi}(T), \mathbb{P}_{x^{v,\xi}(T)}; x^*(t))\right])(x^{u,\eta}(T) - x^{v,\xi}(T))\right] \\
&+ E\textstyle\int_0^T \left[g(t, x^{u,\eta}(t), \mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)}, u(t) - g(t, x^{v,\xi}(t), \mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)}, v(t)\right] dt \\
&+ E\textstyle\int_{[0,T]} \ell(t) d(\eta - \xi)(t)
\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, aşağıdaki eşitlik dikkate alındığında,

$$\begin{aligned}
&x^{u,\eta}(t) - x^{v,\xi}(t) \\
&= \int_0^t \left[f(s, x^{u,\eta}(s), \mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)}, u(s))) - f(s, x^{v,\xi}(s), \mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)}, v(s))\right] ds \\
&+ \int_0^t \left[\sigma(s, x^{u,\eta}(s), \mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)}, u(s)) - \sigma(r, x^{v,\xi}(s), \mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)}, v(s))\right] dW(s) \\
&+ \int_{[0,t]} M(s) d\left(\eta - \xi\right)(s)
\end{aligned}$$

ve $\Phi^v(t)(x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))$ çarpımına *kısmi integrasyon* uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&E\left[\Phi^v(T)(x^{u,\eta}(T)-x^{v,\xi}(T))\right]\\
&=E\int_0^T \Phi^v(t)d(x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))+E\int_0^T (x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))d\Phi^v(t)\\
&+E\int_0^T Q^v(t)\left[\sigma\left(t,x^{u,\eta}(t),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)},u(t)\right)-\sigma(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t))\right]dt\\
&=A_1+A_2+A_3
\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

ifadesine ulaşılır. Burada, ilk sektör A_1 aşağıdaki gibi genişletilir:

$$\begin{aligned}
A_1&=E\int_0^T \Phi^v(t)d(x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))\\
&=E\int_0^T \Phi^v(t)\left[f(t,x^{u,\eta}(t),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)},u(t))\right.\\
&-\left.f(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t))\right]dt+E\int_{[0,T]}\Phi^v(t)M(t)d\left(\eta-\xi\right)(t).
\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Ek denklem (**??**) dikkate alındığında, A_2 sektörü aşağıdaki forma dönüşür:

$$\begin{aligned}
A_2&=E\int_0^T (x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))d\Phi^v(t)\\
&=-E\int_0^T (x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))\left[H_x(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t),\Phi^v(t),Q^v(t))\right.\\
&+\left.\widehat{E}(\partial_\mu H(t,\widehat{x}^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{\widehat{x}^{v,\xi}(t)},\widehat{v}(t),\Phi^v(t),Q^v(t),;x^*(t)))\right]dt.
\end{aligned} \tag{5.3.6}$$

Benzer biçimde, son sektör aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
A_3 &= E\int_0^T Q^v(t)\sigma\left(t,x^{u,\eta}(t),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)},u(t)\right)dt\\
&- E\int_0^T Q^v(t)\sigma\left(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t)\right)dt.
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

Genişletilmiş sektörler (5.3.4)-(5.3.7) ile birleştirilirse, aşağıdaki forma ulaşılır:

$$\begin{aligned}
&E(\Phi^v(T)(x^{u,\eta}(T)-x^{v,\xi}(T)))\\
&= E\int_0^T (H\left(t,x^{u,\eta}(t),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)},u(t),\Phi^v(t),Q^v(t)\right)\\
&- H(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t),\Phi^v(t),Q^v(t)))dt\\
&- E\int_0^T (x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))\left[H_x(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t),\Phi^v(t),Q^v(t))\right.\\
&+ \left.\widehat{E}(\partial_\mu H(t,\widehat{x}^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{\widehat{x}^{v,\xi}(t)},\widehat{v}(t),\Phi^v(t),Q^v(t)))\right]dt,\\
&- E\int_0^T g(t,x^{u,\eta}(t),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)},u(t)))dt + E\int_0^T g(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t))dt\\
&+ E\int_{[0,T]}\Phi^v(t)M(t)d\left(\eta-\xi\right)(t).
\end{aligned} \tag{5.3.8}$$

Ayrıca, (5.3.3)−(5.3.8) birlikte ele alındığında aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
J\left(u(\cdot),\eta(\cdot)\right)-J\left(v(\cdot),\xi(\cdot)\right) \geq\ & E\int_0^T (H\left(t,x^{u,\eta}(t),\mathbb{P}_{x^{u,\eta}(t)},u(t),\Phi^v(t),Q^v(t)\right)\\
&- H(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t),\Phi^v(t),Q^v(t)))dt\\
&- E\int_0^T (x^{u,\eta}(t)-x^{v,\xi}(t))\left[H_x(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t),\Phi^v(t),Q^v(t))\right.\\
&+ \left.\widehat{E}(\partial_\mu H(t,\widehat{x}^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{\widehat{x}^{v,\xi}(t)},\widehat{v}(t),\Phi^v(t),Q^v(t)))]\right]dt,\\
&+ E\int_{[0,T]}(\ell(t)+\Phi^v(t)M(t))d\left(\eta-\xi\right)(t).
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Son olarak, (5.1.3) ve (5.3.9) kulanılarak nihai forma ulaşılır:

$$\begin{aligned}
&J\left(u(\cdot),\eta(\cdot)\right)-J\left(v(\cdot),\xi(\cdot)\right)\\
&\geq E\int_0^T H_u(t,x^{v,\xi}(t),\mathbb{P}_{x^{v,\xi}(t)},v(t),\Phi^v(t),Q^v(t))(u(t)-v(t))dt\\
&+E\int_{[0,T]}(\ell(t)+\Phi^v(t)M(t))d\left(\eta-\xi\right)(t).
\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

Singüler kontrol $(u(\cdot),\eta(\cdot))$ kontrol edilebilir $\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ kümesinin keyfi elemanı olduğu için ve (5.3.1), (5.3.10) birleşiminden, herhangi $(u(\cdot),\eta(\cdot))\in\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J\left(u(\cdot),\eta(\cdot)\right)-J\left(v(\cdot),\xi(\cdot)\right)\geq 0.$$

Böylece, istenen (5.3.2) sonucuna ulaşılır. □

5.4 Uygulama: Ortalama-Varyans Portfolyö Seçim Problemi

Bu alt bölümde, Markowitz' in ortalama-varyans portfolyö seçim problemine, elde edilen optimalliğin gereklilik ve yeterlilik maksimum prensibi uygulanacak ve optimal portfolyö seçim stratejisi geri bildirim formunda açık ifadesiyle gösterilecektir. Değerleri stokastik prosesler olan bono ve hisse senetlerinden oluşmuş sanal bir finans market göz önüne alınsın. Bu menkul kıymetler; değerlemeleri farklı diferansiyel denklemler ile ifade edilen iki başlık altında incelenebilir:

(i) Bono: Değeri $R_0(t)$ olan ve aşağıdaki adi diferansiyel denkleme (ODE) göre değişen risksiz bir yatırım aracıdır.

$$dR_0\,(t) = \gamma(t)R_0\,(t)\,dt,\ t \in [0,T]\,,\ R_0\,(0) > 0, \tag{5.4.1}$$

Burada, $\gamma\,(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ yerel sınırlı sürekli bir dererministik fonksiyondur.

(ii) Hisse Senedi: Değeri $R_1\,(t)$ olan ve aşağıdaki stokastik diferansiyel denkleme (SDE) göre değişen riskli bir yatırım aracıdır.

$$dR_1\,(t) = \varsigma(t)R_1\,(t)\,dt + \sigma(t)R_1\,(t)\,dW(t),\ R_1\,(0) > 0. \tag{5.4.2}$$

Hisse senedi değerlemesi $R_1\,(t) > 0$ yi her $t \in [0,T]$ de garanti edebilmek için; öncelikle $\varsigma(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}$ olacak şekilde bir fonksiyon tanımlanabilir ve $\sigma(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}$ sınırlı sürekli dereministik bir dönüşüm seçilebilir. Böylece,

$$\varsigma(t),\ \sigma(t) \neq 0 \text{ and } \varsigma(t) - \gamma(t) > 0,\ \forall t \in [0,T].$$

Başlangıç değeri $x^{u,\eta}(0) = x_0 > 0$ ve $G \geq 0$ olsun. Üstteki (5.4.1) ve (5.4.2) denklemlerinin birleştirilmesiyle aşağıdaki varlık dinamikleri elde edilir:

$$\begin{cases} dx^{u,\eta}(t) = \gamma(t)x^{u,\eta}(t)dt + u(t)\left[\left(\varsigma(t) - \gamma(t)\right)dt + \sigma(t)dW(t)\right] + Md\eta(t), \\ x^{u,\xi}(0) = x_0. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

Burada, $\gamma(t)$ faiz oranı, $\varsigma(t)$ aşırı getiri oranı ve $\sigma(t)$ hisse fiyatlarının dalgalanması (volatilite) olarak ele alınmıştır.

Ortalama-varyans probleminin kontrol edildiği maliyet fonksiyoneli aşağıdaki formdadır:

$$J\left(u(\cdot),\eta(\cdot)\right)=\frac{\delta}{2}\mathbb{V}ar(x^{u,\eta}(T))-E(x^{u,\eta}(T))+E\int_{[0,T]}\ell(t)d\eta(t). \qquad (5.4.4)$$

Burada, bazı $\delta>0$ için $x^{u,\eta}(t)$ varlık prosesi $u(t)$ değeri ile kontrol edilir. Üstte ifade edilen maliyet fonksiyoneli daha açık formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$J\left(u(\cdot),\eta(\cdot)\right)=E\left[\frac{\delta}{2}x^{u,\eta}(T)^2-x^{u,\eta}(T)\right]-\frac{\delta}{2}\left[\mu^x(T)\right]^2+E\int_{[0,T]}\ell(t)d\eta(t). \qquad (5.4.5)$$

Burada, $\mu^x(T)=E(x^{u,\eta}(T))$,

$\mathbb{U}_1\times\mathbb{U}_2$: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nin kompakt ve konveks bir alt kümesi.

$\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$: Kabul edilebilir $\mathcal{F}_t-$predictable portfolyö stratejileri $\left(u\left(\cdot\right),\eta(\cdot)\right)$ nın $\mathbb{U}_1\times\mathbb{U}_2$ de değer aldığı küme.

Hamilton fonksiyoneli (5.1.12) aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$H\left(t,x,\mu,u,\Phi,Q\right)=\left[\gamma(t)x(t)+\left(\varsigma(t)-\gamma(t)\right)u(t)\right]\Phi(t)+\sigma(t)u(t)Q(t). \qquad (5.4.6)$$

Maksimum koşulu ((5.2.1), Teorem 5.2.1)' e göre ve $(u^*(\cdot),\eta^*(\cdot))$ optimal olduğundan aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\left(\varsigma(t)-\gamma(t)\right)\Phi^*(t)+\sigma(t)Q^*(t)=0. \qquad (5.4.7)$$

Ek denklem aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{cases} d\Phi^*(t)=-\gamma(t)\Phi^*(t)dt+Q^*(t)dW(t), \\ \Phi^*(T)=\delta\left(x^*(T)-\mu^{x^*}(T)\right)-1, \end{cases} \qquad (5.4.8)$$

Burada, $\psi(x,\mu)=\frac{\delta}{2}x^2-x-\frac{\delta}{2}\mu^2$.

Üstteki (5.4.8) denklemini çözebilmek ve optimal portfolyö stratejisi $(u^*(\cdot),\eta^*(\cdot))$

ni bulmak için $\Phi^*(t)$ prosesi aşağıdaki formda kabul edilir:

$$\Phi^*(t) = y_1(t)x^*(t) + y_2(t)\mu^{x^*}(t) + y_3(t), \tag{5.4.9}$$

Burada, $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ ve $y_3(\cdot)$ diferansiyellenebilen deterministik fonksiyonlardır. Varlık dinamikleri (5.4.3) dikkate alındığında aşağıdaki denklem elde dilir:

$$d(\mu^x(t)) = [\gamma(t)\mu^x(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))E(u(t))]\, dt + Gd\eta(t).$$

Konjektür formu (5.4.9)' a varlık dinamikleri (5.4.3) dikkate alınarak Itô formulü uygulanırsa aşağıdaki (SDE) elde edilir:

$$\begin{aligned} d\Phi^*(t) = {} & y_1(t)\left\{[\gamma(t)x^*(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))u^*(t)]\, dt + \sigma(t)u^*(t)dW(t) \right. \\ & \left. - Gd\eta(t)\right\} + x^*(t)y_1'(t)dt \\ & + y_2(t)\left[\gamma(t)\mu^{x^*}(t) + (\varsigma - \gamma(t))E(u(t))\right] dt \\ & - y_2(t)Md\eta(t) + \mu^{x^*}(t)y_2'(t)dt + y_3'(t)dt, \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Burada, $y_1'(t)$, $y_2'(t)$, ve $y_3'(t)$ sırasıyla $y_1(t)$, $y_2(t)$ ve $y_3(t)$ nin t ye göre türevlerini göstermektedir. Böylelikle, (5.4.10) yardımıyla aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{cases} d\Phi^*(t) = \{y_1(t)\left[\gamma(t)x^*(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))\, u^*(t)\right] + x^*(t)y_1'(t) \\ \qquad + y_2(t)\left[\gamma(t)\mu^{x^*}(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))E(u(t))\right] + y_2'(t)\mu^{x^*}(t) + y_3'(t)\}\, dt \\ \qquad - (y_1(t) + y_2(t))Gd\eta(t) + y_1(t)\sigma(t)u^*(t)dW(t) \\ \Phi^*(T) = y_1(T)x^*(T) + y_2(T)\mu^{x^*}(T) + y_3(T), \end{cases} \tag{5.4.11}$$

Ayrıca, (5.4.11) ve (5.4.8) birleşiminden

$$\begin{aligned} & -\gamma(t)\Phi^*(t) = y_1(t)\left[\gamma(t)x^*(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))u^*(t)\right] + x^*(t)y_1'(t) \\ & +y_2(t)\left[\gamma(t)\mu^{x^*}(t) + (\varsigma(t) - \gamma(t))E(u^*(t))\right] + y_2'(t)\mu^{x^*}(t) + y_3'(t), \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

$$Q^*(t) = y_1(t)\sigma(t)u^*(t). \tag{5.4.13}$$

denklemleri elde edilir. Üstte (5.4.11 de $\Phi^*(t)$ nin final koşuluna dikkat edildiğinde aşağıdaki sonuçlara ulaşılır:

$$y_1(T) = \delta,\; y_2(T) = -\delta, \text{ and } y_3(T) = -1. \tag{5.4.14}$$

Bunlara ek olarak, (5.4.12) ve (5.4.9) nin birleştirilmesiyle, $y_1(\cdot), y_2(\cdot)$ ve $y_3(\cdot)$ fonksiyonlarının aşağıdaki (ODEs) yi sağlayacağı sonucuna varılır:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -2\gamma(t)y_1(t), \quad y_1(T) = \delta, \\ y_2'(t) = -2\gamma(t)y_2(t), \quad y_2(T) = -\delta, \\ y_3'(t) = -\gamma(t)y_3(t) + y_1(t)(\gamma(t) - \varsigma(t))u^*(t) + y_2(t)(\gamma(t) - \varsigma(t))E(u^*(t)), \\ y_3(T) = -1. \end{cases} \tag{5.4.15}$$

Üstteki (ODEs) in ilk iki denklemi çözülerek;

$$y_1(t) = -y_2(t) = \delta \exp\left\{ 2\int_t^T \gamma(s)ds \right\} \tag{5.4.16}$$

elde edilir. (5.4.7), (5.4.11), (5.4.12) ve (5.4.16) birlikte değerlendirildiğinde optimal kontrol aşağıdaki gibi bulunur:

$$u^*(t) = \frac{(\gamma(t) - \varsigma(t))}{\sigma(t)^2}(x^*(t) - \mu^{x^*}(t) + \frac{y_3(t)}{y_1(t)}). \tag{5.4.17}$$

Optimal kontrolün $u^*(t)$, beklenen değeri aşağıdaki gibidir:

$$E\left(u^*(t)\right) = \frac{(\gamma(t) - \varsigma(t))}{\sigma(t)^2}\frac{y_3(t)}{y_1(t)}. \tag{5.4.18}$$

Ayrıca, (5.4.15) de üçüncü denklem; (5.4.16) ve (5.4.18) ile birlikte çözülürse,

$$\begin{aligned} y_3'(t) &= -\gamma(t)y_3(t),\; t \in [0, T] \\ y_3(T) &= -1 \end{aligned}$$

olmak üzere, sonuçta

$$y_3(t) = -\exp\left\{ \int_t^T \gamma(s)ds \right\} \tag{5.4.19}$$

çözümü elde edilir.

$y_1(t) = -y_2(t)$ olduğundan,singüler kontrol katsayısı $d\eta(t)$ sıfır olur (5.4.16). Bu durum, ek proses $\Phi^*(\cdot)$ ın singüler kontrolden bağımsız oldugunu gösterir. Optimal singüler kontrol $\eta^*(\cdot)$ maksimum şartı (5.3.4) yi sağlasın. Herhangi $\xi(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$E\left[\int_{[0,T]} (\ell(t) + M\Phi^*(t))d\eta^*(t)\right] \geq E\left[\int_{[0,T]} (\ell(t) + M\Phi^*(t))d\xi(t)\right], \quad (5.4.20)$$

Burada, ek proses $\Phi^*(t)$ optimal kontrol $u^*(\cdot)$' a tekamül eder. Aşağıdaki küme tanımlansın:

$$\mathbb{D} = \{(w,t) \in \Omega \times [0,T] : \ell(t) + M\Phi^*(t) > 0\}, \quad (5.4.21)$$

ve $\xi(\cdot) \in \mathcal{U}_2$ olmak üzere,

$$d\xi(t) = \begin{cases} 0 : \text{if } (w,t) \in \mathbb{D}, \\ d\eta^*(t) : \text{if } (w,t) \in \overline{\mathbb{D}}. \end{cases} \quad (5.4.22)$$

Burada, $\overline{\mathbb{D}}$ kümesi, $\mathbb{D}$ nin tümleyenidir. Ayrıca, $\boldsymbol{\chi}_{\mathbb{D}}$ fonksiyonu $\mathbb{D}$ nin indikatör fonksiyonudur. Üstteki (5.4.20) ve (5.4.22) birlikte ele alındığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq E\int_{[0,T]} (\ell(t) + M\Phi^*(t))d\left(\xi(t) - \eta^*(t)\right) \\ &= E\int_{[0,T]} (\ell(t) + M\Phi^*(t))\boldsymbol{\chi}_{\mathbb{D}}(t,w)d\left(-\eta^*\right)(t) \\ &= -E\int_{[0,T]} (\ell(t) + M\Phi^*(t))\boldsymbol{\chi}_{\mathbb{D}}(t,w)d\eta^*(t). \end{aligned}$$

Bu ifade, herhangi $t \in [0,T]$ için $\eta^*(\cdot)$ ın aşağıdaki eşitliği sağladığını gösterir:

$$E\int_{[0,T]} (\ell(t) + M\Phi^*(t))\boldsymbol{\chi}_{\mathbb{D}}(t,w)d\eta^*(t) = 0.$$

Bunlara ek olarak, (5.4.21) ve (5.4.22) göz önünde tutulduğunda, optimal singüler kontrol $\eta^*(\cdot)$ aşağıdaki formda elde edilir:

$$\eta^*(t) = \xi(t) + \int_0^t \boldsymbol{\chi}_{\overline{\mathbb{D}}}(s,w)ds, \; t \in [0,T].$$

Sonuç olarak, optimal portfolyö seçim stratejisi $x^*(\cdot)$ ve $\mu^{x^*}(t)$ terimlerini içerecek şekilde açık gösterimleriyle birlikte geri bildirim formunda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} u^*(t, x^*(t), \mu^{x^*}(t)) &= \frac{(\gamma(t) - \varsigma(t))}{\sigma(t)^2}(x^*(t) - \mu^{x^*}(t) + \frac{y_3(t)}{y_1(t)}), \\ \eta^*(t) &= \int_0^t \boldsymbol{\chi}_{\overline{\mathbb{D}}}(s, w)ds + \xi(t),\ t \in [0, T]. \end{aligned}$$

5.5 Sonuçlar

Bu bölümde, genel kontrollü McKean-Vlasov dinamikleri için optimal singüler kontrolün gereklilik ve yeterlilik koşulları elde edildi. Olasılık ölçümüne ve uygun Itô formülüne göre çözüm prosesinin türevleri temel sonucu ortaya koyabilmek için kullanıldı. Tanım kümesi konveks olmayan singüler kontrol problemleri için Pontryagin maksimum prensibininin bazı optimallik koşulları oluşturuldu. Elde edilen sonuçların en önemli özelliği birtakım yeni matematiksel finans problemlemlerine; özellikle, fiyat etkili optimal singüler izleme problemleri ve koşullu ortalama-varyans portfolyö seçim problemlerine açık çözüm verebilmeleridir.

GENEL SONUÇLAR

Tezin ikinci bölümünde, anahtarlamalı sistemler için lineer kuadratik optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Problem; bilinmeyen anahtarlama parametresine bağlı ve sabit aralıkta bilinmeyen sınır değerlere sahip integrale dönştürülerek sonlu boyutlu bir optimizasyon problemine indirgenmiştir. Kontrol probleminin çözümünde Gradyan Projeksiyon Metodu kullanılarak optimal anahtarlama anı, optimal kontrol fonksiyonu ve optimal maliyet değeri bulunmuştur. Her bir optimal argüman uygun aralıklarda grafikler üzerinde gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde, sıçrama-sistemli orta-alan stokastik diferansiyel denklemleri için optimal sürekli-singüler kontrolün gereklilik koşulları elde edildi. Kontrol probleminin analizinde maksimum prensip yaklaşımı ile karma konveks-spike perturbasyon yöntemi kullanıldı ve elde edilen souçlar Markowitz 'in ortalama-varyans portfolyö seçim problemine uygulandı.

Dördüncü bölümde, Levy proseslerine bağlı Teugels martingaller tarafından idare olunan orta-alan ileri-geri stokastik diferansiyel denklemleri için maksimum prensip formundaki optimalliğin gereklilik ve yeterlilik koşulları elde edilmiştir. Kontrol probleminin analizinde konveks varyasyon metodu ve dualite ilişkisi kullanılmıştır. Elde edilen souçuçlar Markowitz' in ortalama-varyans porfolyö seçim problemine uygulanmıştır.

Son bölümde, genel kontrollü lineer olmayan McKean-Vlasov tipi stokastik diferansiyel denklemlerin idare ettiği sistemlerde optimal stokastik singüler kontrol problemi için gereklilik ve yeterlilik koşulları elde edildi. Kontrol probleminin analizinde konveks perturbasyon metodu kullanıldı ve ulaşılan teorik sonuçlar Markowitz' in seçim problemine uygulanarak geri bildirim formundaki optimal portfolyö seçim stratejisi açık ifadesiyle gösterildi.

KAYNAKÇA

Aghayeva C., 2016, Stochastic singular optimal control problem of switching systems with constraints, *Journal of Inequalities and Applications*, Springer, https://doi.org/10.1186/s13660-015-0944-5.

Allen E., 2007, Modelling with Itô Stochastic Differential Equations, *Springer*, 230p.

Alvarez L.H.R., 1999, A class of solvable singular stochastic control problems, *Stochastics, Stochastics Rep.*, 67, 83-122p.

Antsaklis P. J. and Nerode A., 1998, Special issue on hybrid system, *IEEE Trans. Automat. Control*, 43 No: 4, April.

Applebaum D., 2009, Lévy Processes and Stochastic Calculus, *Cambridge University Press*, 492p.

Azmyakov V. V., Galvan-Guerra R. and Polyakov A. E., 2009, On the method of dynamic programming for linear-quadratic problems of optimal control in hybrid systems, *Automation and Remote Control*, 70(5), 787-799p.

Belman R., 1957, Dynamic programming, *Princeton Univ. Press*, Princeton, New Jersey, 392 pp.

Bensoussan, A. and Menaldi, J. L., 1997, Hybrid control and dynamic programming. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Application and Algorithm* 3 (4), 395–442p.

Bertoin J., 1996, Lévy Processes, *Cambridge University Press*, Cambridge, 278p.

Bittanti S., 1996, History and prehistory of the Riccati equation, *In proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December. 1599-1604p.

Boltyanskii V., 2004, The maximum principle for variable structure systems, *International Journal of Control*, vol. 77, 1445-1451p.

Branicky M. S., Borkar V. S. and Mitter S. K., 1998, A unifed framework for hybrid control: model and optimal control theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(1): 31-45p.

Bryson A. E., 1996, Optimal control-1950 to 1985. *IEEE Control Systems*, 16(3), June, 26-33pp.

Buckdahn R., Djehiche B., Li, J., 2011, A general stochastic maximum principle for SDEs of mean-field type. *Applied Mathematics and Optimization*, 64, 197-216p.

Buckdahn R., Li J, Peng S. Rainer C., Buckdahn, R, Li, J., Peng, S., Rainer, C., 2014, Mean-field stochastic differential equations and associated PDEs. Preprint, *arXiv:1407.1215v1*.

Buckdahn R., Li, J., Ma J., 2016, A stochastic maximum principle for general mean-field system, *Appled Mathematics and Optimization*, 74, 507-534p.

Buckdahn, R., Li, J., Peng, S., 2009, Mean-field backward stochastic differential equations and related partial differential equations, *Stoch. Process. Appl.*, 119, 3133-3154p.

Cadenillas A. and Haussmann U. G., 1994, The stochastic maximum principle for singular control problem, *Stochastics and Stochastic Reports*, 49(3-4), 211-237p.

Capuzzo Dolcetta I. and Evans L. C., 1984, Optimal switching for ordinary diferential equations. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 22(1): 143-161p.

Caravello R. M. and Piccoli B., 2002, Hybrid necessary principle, preprinti SSSA 71.

Carnoma, R., Delarue, F., Lachapelle, A., 2013, Control of McKean-Vlasov dynamics versus mean field games. *Math. Financ. Econ.*, 7(2), 131-166p.

Dmitruk A. V. and Kaganovich A. M., 2008, The hybrid maximum principle is a consequence of pontryagin maximum principle, *System and Control Letters*, vol. 57, 964-970p.

Dufour F., Miller B., 2007, Necessary conditions for optimal singular stochastic control problems, *Stochastics* 79(5), 469-504p.

Evans L. C., 2014, An Introduction to Stochastic Differential Equations, *American Mathematical Society*, 151p.

Giaquinta M. and Hildebrandt S., 2006, Calculus of variations, I,II, *Springer-Verlag*, Berlin, 474p.

Goldstein H. H., 1980,,A history of the calculus of variations: From the 17th through the 19th century, *Springer-Verlag, New York,* NY, 410 pp.

Hafayed M. and Abbas S., 2013, A general maximum principle for stochastic differential euations of mean field type with jump processes, *Optimization and Control*, arXiv: 1301.7327, 28p.

Hafayed M., 2014, A mean-field necessary and suffucient conditions for optimal singular stochastic control, *Communications in Mathematics and*

Statistics, 1(4), 417-435p.

Hafayed, M., 2014, Singular mean-field optimal control for forward-backward stochastic systems and applications to finance, *International Journal of Dynamics and Control*, 2(4), 542-554p.

Hafayed M. and Abbas S., 2014, On near-optimal mean-field stochastic singular controls: necessary and sufficient conditions for near-optimality, *Journal of Optimization Theory and Application*, 160(3), 778-808p.

Hafayed M. and Meherrem S., 2018, On optimal control of mean-field stochastic systems driven by Teugels martingales via derivative with respect to measures, *International Journal of Control*, Accepted, doi.org/10.1080/00207179.2018.1489148

Hafayed M. and Meherrem S., 2019, Maximum principle for optimal control of McKean-Vlasov FBSDEs with Lévy process via the differentiability with respect to probability law, *Optimal Control Appl. Meth.*, Accepted, doi.org/10.1002/oca.2490.

Hafayed M., Abbas S., Abba A, 2015, On mean-field partial information maximum principle of optimal control for stochastic systems with Lévy processes, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 167(3), 1051-1069p.

Hafayed M., Abba A. and Abbas S., 2016, On partial-information optimal singular control problem for mean-field stochastic differential equations driven by Teugels martingales measures, *International Journal of Control*, Vol. 89, No. 2, 397-410p.

Hafayed M., Boukaf S., Shi Y., Meherrem S., 2016, A McKean-Vlasov optimal mixed regular-singular control problem, for nonlinear stochastic systems with Poisson jump processes, *Neurocomputing*, 182(19), 133-144p.

Hafayed M., Ghebouli M., Boukaf S. and Shi Y., 2016, Partial information optimal control of mean-field forward-backward stochastic syste driven by Teugels martingales with applications, *Neurocompting*, Vol. 200, 11-21p.

Hafayed M., Meherrem S., Gucoglu D. H. and Eren S., 2017, Variational principle for stochastic singular control of mean-field Lévy-forward-backward system driven by orthogonal Teugels martingales with application, *International Journal of Modelling, Identification and Control*, Vol. 28, No. 2, 97-113pp.

Hafayed M., Meherrem S., Eren S. and Gucoglu D. H. , 2018, On optimal singular control problem for general Mckean-Vlasov differential equations: Necessary and sufficient optimality conditions, *Optimal Control, Application and Methods*, Vol. 39, Issue 3, 1202-1219 pp.

Haussmann U. G. and Suo, W., 1995, Singular optimal control I, *SIAM*

Journal on Control and Optimization, 33(3), 916-936p.

Hestenes M. R., 1950, A general problem in the calculus of variations with applications to paths of least time, Research Mem. Santa Mnica, Clifornia, 326 pp.

Huang J., Wang G. and Xiong J., 2009, A maximum principle for partial information backward stochastic control problems with applications, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48(4), 2106-2117p.

Kac M., 1956, Foundations of kinetic theory. *In Proceedings of the 3-rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 3:171-197p.

Kac M., 1958, Probability and Related Topics in the Physical Sciences. *Interscience Publishers, New York.*

Kalman R. E., 1960, Contribution to the theory of optimal control, *Bol, Soc. Matem. Mex.*, 5: 102-119 p.

Kirk D. E., 1970, Optimal Control Theory, Prentice Hall, Eglewood Cliffs, NJ, 480p.

Klebaner F. C., 2005, Introduction to Stochastic Controls With Applications, *ICP*, 430p.

Kurina G. A., 2011, On decomposition of linear-quadratic optimal control problems for two-steps descriptor systems, *50th IEEE Conference on Decision and Control European Control*, December, 12-15.

Kurina G. A. and Zhou Y., 2011, Decomposition of linear-quadratic optimal control problems for two-steps systems, *Doklady Mathematics*, Vol. 83, No. 2, 275-277p.

Li J., 2012, Stochastic maximum principle in the mean-field controls. *Automatica*, 48, 366-373p.

Li R., Teo K. L., Wong K. H. and Duan G. R., 2006, Control parameterization enhancing transform for optimal control of switched systems, *Mathematical and Computer Modelling*, Volume 43, Issues 11-12, June, 1393-1403p.

Lu J., Liao L., Nerode A. and Taylor J. H., 1993, Optimal control of systems with continuous and discrete states. *In Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control*, San Antonio, TX, December, 2292-2297p.

Lucas S. K. and Kaya C. Y., 2001, Switching-time computation for bang-bang control laws *Proceedings of the American Control Conference* (ACC 01), Washington, D.C., 176-181p.

Ma G., Zhang Y. and Liu M., 2017, A generalized gradient projection method based on a new working set for minimax optimization problems with inequality constraints, *J. Inequal Appl.*, 1828–1833pp.

Maharramov Sh. F., 2010, Necessary optimality conditions for switching control system, *American Institute for Mathematical Science, Journal of Industrial and Manegament Optimization*, vol. 6, 47-58p.

Meherrem S., Gucoglu D. H. and Guliyev S., 2018a, Numerical solution of linear-quadratic optimal control problems for switching systems, *Miskolc Mathematical Notes*, Vol. 19, No. 2, 1035–1045pp.

Meherrem S., Hafayed M., and Abbas S., 2019, On Peng's type maximum principle for optimal control of mean-field stochastic differential equations with jump processes, *International Journal of Modelling, Identification and Control*, Vol. 31, No. 3, 245-258pp.

Meherrem S., Hafayed M., Gucoglu D. H. and Eren S., 2018b, A general characterization of the stochastic optimal combined control of mean field stochastic system with application, *International Journal of Dynamics and Control (Scopus, Springer)*, Vol. 6, Issue 2, 873–880pp.

Meng Q. and Shen Y., 2015, Optimal control of mean-field jump-diffusion systems with delay: A stochastic maximum principle approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 13-30p.

Meng Q. X. Zhang F. and Tang M. N., 2012, Maximum principle for backward stochstic systems associated with Levy processes under partial information, *Proceedings of the 31st Chinese Control Conference,* July, Hefei, China, 25-27p.

Meng Q. X., 2009, A maximum principle for optimal control problem of fully coupled forward-backward stochastic systems with partial information, *Science in China Series A-Mathematics*, 52(7), 1579-1588p.

Meng Q. X. and Tang M. N., 2009, Necessary and sufficient conditions for optimal control of stochastic systems associated with Levy processes, *Sci China Ser F-Inf Sci.* Vol. 52, No. 11, 1982-1992 pp.

Mikosh T., 1998, Elementary Stochastic Calculus With Finance in View,*World Scientific Publishing Co.*, Singapore, Pte Ltd, 226p.

Mitsui K. and Tabata M., 2008, A stochastic linear quadratic problem with Lévy process and its application to finance, *Stochastic Processes and Their Applications.* Vol. 118, 120-152p.

Mundaca G. and ∅ksendal B., 1998, Optimal stochastic intervention control with application to the exchange rate.*Journal of Mathematical Economics*, 29, 225-243p.

Muthukumar P. and Deepa R., 2016, Infinite horizon optimal control of forward-backward stochastic system driven by Teugels martingales with

Lévy processes, *Stochastics and Dynamics*, 17(3), 17p.

Naidu, D. S., 2002, Optimal control systems, *CRC Press,* Florida, 464 pp.

Nualart D. and Schoutens W., 2001, BSDE's and Feynman-Kac formula for Lévy process with application in finance, *Bernoulli*, Vol.7, 761-776p.

Nualart. D. and Schoutens W., 2000, Chaotic and predictable representations for Lévy processes, *Stochastic Processes and Their Applications*, Vol. 90, 109-122p.

∅ksendal B., 2014, Stochastic Differential Equations, *Springer*, 379p.

∅ksendal B. and Sulem A., 2007, Applied stochastic control of jump diffusions, *2nd edition, Springer-Verlag*, Berlin, 260p.

Piccoli B., 1998, Hybrid systems and optimal control. *In Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tempa, FL, December, 13-18p.

Protter P. E., 2005, Stochastic Integration and Differential Equations, *Springer*, 302p.

Shen Y., Meng Q. and Shi P., 2014, Maximum principle for mean-field jump-diffusions to stochastic delay differential equations and its applications to finance, *Automatica*, 50(6), 1565-1579p.

Shi J., 2012, Sufficient conditions of optimality for mean-field stochastic control problems. *12th International Conference on Control, Automation, Robotics & Vision, Guangzhou, P.R. China, December*, 5-7, 747-752p.

Susmann H. J. and Willems J. C., 1997, 300 years of optimal control: from the brachistochrone to the maximum prenciple. *IEEE Control Systems Magazine*, 17: 32-44.

Sussmann H. J., 1999, A maximum principle for hybrid optimal control problems. *In Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, AZ, December, 410-415p.

Tang H. and Wu Z., 2009, Stochastic differential equations and stochastic linear quadratic optiaml control problem with Lévy processes, *Journal of Systems Science and Complexity* , Vol. 22, 122-136p.

Tang H. and Zhang Q., 2012, Optimal variational principle for backward stochastic control systems associated with Levy processes, *Sci Cina Math,* Vol. 55, No. 4, 745-761pp.

Wang G. Zhang C. and Zhang W., 2014, Stochstic maximum principle for mean-field type optimal control under partial information, *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(2), 522-528p.

Wang G. and Wu Z., 2009, The maximum principle for stochastic recursive optimal control problems under partial information, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, No. 6, 1230-1242p.

Witsenhausen H. S., 1966, A class of hybrid-state continuous-time dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2): April, 161-167p.

Wu L., Su, X. and Shi P., 2014, Output feedback control of Markovian jump repeated scalar nonlinear systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(1), 199-204p.

Wu Z., 2013, A general maximum principle for optimal control of forward-backward stochastic systems, *Automatica*, Vol. 49, 1473-1480p.

Wu Z. and Zhang F., 2011, Stochastic maximum principle for optimal control problem of forward-backward systems involving impulse controls, *IEEE Transactions an Automatic Control,* Vol. 56, No. 6 1401-1406p.

Xiao H. and Wang G., 2011, A necessary condition for optimal control of initial coupled forward-backward stochastic differential equations with partial information, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Vol. 37, 347-359p.

Xu H., Xinzhi L. and Teo K. L., 2008, Delay independent stability criteria of impulsive switched systems with time-invariant delays, *Mathematical and Computer Modelling*, Volume 47, Issues 3-4, February, 372-379p.

Yong J., 1989, Systems governed by ordinary diferential equations with continuous, switching and impulse controls. *Appl. Math. Optim.*, vol. 20, 223-235p.

Yong J., 2010, Optimality variational principle for controlled forward-backward stochastic differential equations with mixed initial-terminal conditions, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 48, N. 6, 4119-4156p.

Yong J. and Zhou X. Y., 1999, Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations, *Springer*, 439p.

Zhang H., 2016, A necessary conditions for mean-field type stochastic differential equations with correlated state and observation noises, *Journal of Industrial and Management Optimization*, 12(4), 1287-1301p.